УДК 511.36

Н. В. САКОВИЧ

РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В C

Пусть $w > 0$ — некоторое действительное число, $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$ — многочлен с целыми коэффициентами, $H(P) = \max\limits_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ — высота $P(x)$. Обозначим через $N_n(w)$ множество $\beta \in \mathbf{R}$, для которых неравенство $|P(\beta)| < H^{-w}$ имеет бесконечное число решений. В. И. Берником в [1] было доказано, что $\dim N_n(w) \leqslant \dfrac{n+1}{w+1}$ (гипотеза Бейкера—Шмидта [5]). Рассмотрим неравенство $|P(z)| < H^{-w}$ в случае комплексных чисел. Пусть

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{1}$$

— целочисленный полином, $H = H(P) = \max\limits_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ — высота $P(z)$. Определим $N_n(v)$ — множество комплексных z, для которых неравенство

$$|P(z)| < H^{-v} \qquad (2)$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(z)$. Неравенство (2) при $v \leqslant \frac{n-1}{2}$ имеет для любого $z \in \mathbf{C}$ бесконечное число решений в $P(z) \in \mathbf{Z}[z]$ [4]. При $v > \frac{n-1}{2}$, как показал В. Г. Спринджук [4], неравенство (2) имеет бесконечное число решений только для множества нулевой меры. Пользуясь обозначениями работы [3], сформулируем три предложения:

Предложение 1. *Пусть $v > 1/2$, имеем* $\dim N_2(v) \leqslant \frac{3}{v+1}$.

Предложение 2. *Пусть $P(z) \in P_n(H, \vec{l})$. Обозначим через $N_n^{(1)}(v)$ множество $z \in \mathbf{C}$, для которых наравенство (2) имеет бесконечное число решений в полиномах $P(z)$ с условием $0 \leqslant p_1(P) \leqslant 1$. Тогда*

$$\dim N_n^{(1)}(v) \leqslant \frac{n+1}{v+1}.$$

Пусть далее $N_n^{(2)}(v)$ множество $z \in \mathbf{C}$, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений в $P(z)$ с условием $\frac{l_2}{T} > \frac{n}{4} - \frac{p_2}{2}$.

Предложение 3. *Для множества $N_n^{(2)}(v)$ имеем* $\dim N_n^{(2)}(v) \leqslant \leqslant \frac{n+1}{v+1-\frac{n}{2}}$.

Доказательство предложений $1-3$ несложно, их можно провести аналогично случаю вещественных чисел. Учитывая предложения $1-3$, мы будем считать в дальнейшем: $n \geqslant 3$, $p_1 > 1$, $\frac{l_2}{T} \leqslant \frac{n}{4} - \frac{p_2}{2}$. В работе доказана следующая

Теорема. *При* $\frac{n-1}{2} < v < 4n+3$ *имеем* $\dim N_n(v) \leqslant \frac{n+1}{v+1}$.

Предложение 1 будем считать базой индукции. Далее считаем, что теорема доказана для всех многочленов степени, меньшей n. Это значит, что если неравенство (2) выполняется бесконечно часто для некоторого множества $B \subset \mathbf{C}$ в полиномах $P(z)$ степени $l \leqslant n-1$, то $\dim B \leqslant \frac{l+1}{v+1}$. Будем считать также, что ω принадлежит кругу $C_1 = C_1(0; n+1)$ с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом $r = n+1$, так как если ω не принадлежит указанному кругу, то можно доказать, что неравенство (2) не может выполняться ни при каком $v > 0$. Вокруг круга C_1 опишем квадрат со стороной $2n+2$. На полученный квадрат нанесем сетку со стороной $H^{-\frac{l_2}{T}}$. Пусть каждому такому маленькому квадрату K принадлежит $c(n) H^s$ многочленов. Многочлен $P(\omega)$ принадлежит квадрату K, если $\exists \omega \in K: |P(\omega)| < H^{-v}$. Тогда общее число полиномов $P(\omega) \subset P_n(H, \vec{l})$ не превосходит $c(n) H^{2\frac{l_2}{T}+s}$, поскольку число квадратов сетки не превосходит $c(n) H^{2\frac{l_2}{T}}$. Пусть $S(\varkappa_i)$ — множество комплексных чисел ω, удаленных от $\varkappa_i$ не более чем от других корней $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$, т. е. $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\omega - \varkappa_j| = |\omega - \varkappa_i|$. Все $\omega \in S(\varkappa_1)$, для которых выполняется неравенство (2), находятся внутри квадрата со стороной $c(n)H^{-v-1+p_1+n\varepsilon_1}$, где $\varepsilon_1 > 0$. Тогда имеем

$$\sum_{H=1}^{\infty} H^{2\frac{l_2}{T}+s}\left(H^{-v-1+p_1+n\varepsilon_1}\right)^{\frac{n+1}{v+1}+\varepsilon} < c(n)\sum_{H=1}^{\infty} H^{2\frac{l_2}{T}+s-n-1+p_1\frac{n+1}{v+1}-\varepsilon_2},$$

где ε, ε_1 — сколь угодно малые положительные числа $\left(\varepsilon_2 = \varepsilon(v+1-p_1-n\varepsilon_1) - n\varepsilon_1\dfrac{n+1}{v+1}\right)$. При $s < n - p_1\left(2 + \dfrac{n+1}{v+1}\right) + \varepsilon_2$ ряд сходится и $\dim N_n(v) \leqslant \dfrac{n+1}{v+1}$.

Предположим, что существуют квадраты K, которым принадлежит более $c(n)H^s$ полиномов. Рассмотрим один из таких квадратов. Представим s в виде $s = k + (s-k)$, $k = [k] + \{k\}$. Два многочлена из множества $P_n(H, \vec{l}) : P_1(z) = Hz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ и $P_2(z) = Hz^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$, принадлежащие квадрату K, будем относить одному классу, если

$$a_{n-1} = c_{n-1}, \ \ldots, \ a_{n-[k]+1} = c_{n-[k]+1}. \tag{3}$$

Так как число различных классов не превосходит $c(n)H^{[k]-1}$, то среди $c(n)H^s$ многочленов существует не менее $c(n)H^{s-[k]+1}$ многочленов, принадлежащих одному и тому же классу. Занумеруем их: $P_0(z)$, $P_1(z), \ldots, P_m(z)$, где $m = c(n)H^{\theta}$, $\theta = p_1\left(2 + \dfrac{n+1}{v+1}\right)$. Образуем новые многочлены:

$$t_1(z) = P_1(z) - P_0(z), \ \ldots, \ t_m(z) = P_m(z) - P_0(z).$$

Все m многочленов имеют степень не выше $n - [k]$, а все коэффициенты не превосходят $2H$. Все многочлены $t_j(z)$ различны, так как в противном случае совпадали бы многочлены $P_j(z)$. Пусть $P(\varkappa_1) \subset P(K)$. Разложим $P(\omega)$ в окрестности корня $\varkappa_1$ в ряд Тейлора:

$$P(\omega) = P'(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1) + \frac{1}{2}P''(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}P^{(n)}(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1)^n.$$

Так как по лемме 7, гл. 4 из [3] $|P'(\varkappa_1)||\omega - \varkappa_1| < c(n)H^{1-p_1}H^{-\frac{l_2}{T}} = c(n)H^{1-2p_2}$, то с учетом того, что $p_i = \dfrac{l_{i+1} + \ldots + l_n}{T}$, получаем

$$|P''(\varkappa_1)||\omega - \varkappa_1|^2 < c(n)H^{1-p_2}H^{-2\frac{l_2}{T}} \leqslant c(n)H^{1-2p_1}$$

и для любого $i \geqslant 3$ $|P^{(i)}(\varkappa_1)||\omega - \varkappa_1|^i < c(n)H^{1-2p_1}$. Тогда из последнего неравенства и разложения $P(\omega)$ в ряд Тейлора для всех $\omega \in K$ имеем $|P(\omega)| < c(n)H^{1-2p_1}$ и, значит, $|t_i(\omega)| < c(n)H^{1-2p_1}$.

Если среди многочленов $t_i(\omega)$, $i = \overline{1, m}$, имеются хотя бы два без общих корней, то квадрат K назовем неособенным. К многочленам $t_i(\omega)$ применим следующую, доказанную в работе [2] лемму.

Лемма 1. *Пусть $P(x)$ и $Q(x) \in \mathbf{Z}[x]$ — взаимно простые многочлены,* $\deg P = n_1$, $\deg Q = n_2$, $H(P) = H^{\lambda_1}$, $\lambda_1 > 0$, $H(Q) = H^{\lambda_2}$, $\lambda_2 > 0$. *Тогда,* *если для всех* ω *из круга* $K = C(z_0, H^{-\eta})$, $K \subset C(0, n)$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, $\eta > 0$, *выполняются неравенства* $|P(\omega)| < H^{-\tau_1}$, $|Q(\omega)| < H^{-\tau_2}$, $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau = \min(\tau_1 + \lambda_1, \tau_2 + \lambda_2)$, *то для каждого* $\delta > 0$ *существует достаточно большое вещественное число* $H_0 = H_0(\delta, n_1, n_2, \eta, \tau)$, *что при* $H \geqslant H_0$

$$2\tau + 4\max(\tau - \eta, 0) \leqslant \lambda_1 n_2 + \lambda_2 n_1 + \delta.$$

Если условие $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$ *отсутствует, то*

$$\tau + 2\max(\tau - \eta, 0) \leqslant \lambda_1 n_2 + \lambda_2 n_1 + \delta.$$

Имеем:

$$\tau_1 = \tau_2 = 2p_1 - 1,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \tau = 2p_1,\ \eta = \frac{l_2}{T},$$

$$\tau - \eta = 2p_1 - \frac{l_2}{T} = p_1,\ n_1 = n_2 = p_1\left(2 + \frac{n+1}{v+1}\right) - \varepsilon_2.$$

Тогда $4p_1 \leqslant p_1\left(2 + \dfrac{n+1}{v+1}\right) - \varepsilon_3'$, *где* $\varepsilon_3' = \varepsilon_2 - \delta/2$.

Последнее неравенство противоречиво. Обозначим через $N_n^{(3)}(v)$, где $v > \dfrac{n-1}{2}$, множество $\omega \in \mathbf{C}$, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений при ω, попадающих в бесконечное число неособенных квадратов. Тогда

$$\dim N_n^{(3)}(v) \leqslant \frac{n+1}{v+1}.$$

Рассмотрим случай, когда среди полиномов $t_1(\omega), \ldots, t_m(\omega)$ нет хотя бы двух без общих корней. Тогда, рассматривая многочлены, у которых $a_{n-1} = c_{n-1}, \ldots, a_{n-[k]+1} = c_{n-[k]+1}$, по принципу ящиков Дирихле и лемме 16 из [3] существует $m = c(n) H^{\theta}$ многочленов, представимых в виде

$$t_i(\omega) = k_i(\omega) d(\omega),\quad i = \overline{1, m},$$

$$\deg t_i(\omega) \leqslant p_1\left(2 + \frac{n+1}{v+1}\right) - \varepsilon_2,$$

$$H(t_i(\omega)) \leqslant 2H,\quad |t_i(\omega)| < c(n) H^{1-2p_1},\quad \omega \in K, \tag{4}$$

причем уже среди многочленов $k_i(\omega)$ есть хотя бы два без общих корней. Обозначим: $\deg d(\omega) = l$, $H(d(\omega)) = H^{\lambda}$. Тогда $\deg k_i(\omega) \leqslant p_1\left(2 + \dfrac{n+1}{v+1}\right) - l - \varepsilon_2$, $H(k_i(\omega)) < c(n) H^{1-\lambda}$. Из (4) следует, что или $d(\omega)$, или $k_i(\omega)$ принимают на K малые значения. Предположим, что

$$|d(\omega)| < H(d)^{-\frac{v+1}{n+1}(l+1)+1} < c(n) H^{-\frac{v+1}{n+1}(l+1)\lambda + \lambda} \tag{5}$$

для некоторого множества $B \subset K$, $\mu B \geqslant \dfrac{1}{2}\mu K$. По лемме 10 из [3]

$$|d(\omega)| < c(n) H^{-\frac{v+1}{n+1}(l+1)\lambda + \lambda} \tag{6}$$

для всех $\omega \in K$. Так как $\deg d(\omega) < n$, то по индуктивному предположению размерность Хаусдорфа множества точек ω, принадлежащих бесконечному числу таких квадратов K, во всех точках которого выполняется неравенство (6), не превосходит

$$\frac{l+1}{\frac{v+1}{n+1}(l+1)-1+1}=\frac{n+1}{v+1}.$$

Поэтому теорему остается доказать в том случае, когда ω принадлежит бесконечному числу квадратов K, для точек которых не выполняется неравенство (5) на множестве B с мерой $\mu B \geqslant \frac{1}{2}\mu K$. В этом случае в силу (4) выполняется неравенство

$$|k_i(\omega)| < c(n)\, H^{1-2p_1+\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1)-\lambda}.$$

По лемме 10 из [3] получаем, что данное неравенство выполняется для всех $\omega \in K$ с несколько большей величиной $c(n)$. Из определения многочленов $k_i(\omega)$ следует, что существуют два многочлена $k'(\omega)$ и $k''(\omega)$ без общих корней. Применим к ним лемму 1. Имеем:

$$\tau_1=\tau_2=2p_1-1-\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1)+\lambda,\quad \lambda_1=\lambda_2=1-\lambda,$$

$$n_1=n_2=p_1\left(2+\frac{n+1}{v+1}\right)-l-\varepsilon_2,\quad \tau=2p_1-\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1),$$

$$\eta=\frac{l_2}{T},\quad \tau-\eta=p_1-\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1).$$

Тогда

$$2p_1-\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1)+2\max\left(p_1-\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1),\ 0\right)\leqslant$$
$$\leqslant(1-\lambda)\left(p_1\left(2+\frac{n+1}{v+1}\right)\right). \tag{7}$$

Неравенство (7) распадается на две системы неравенств:

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} p_1>\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1),\\ p_1+3\left(p_1-\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1)\right)\leqslant(1-\lambda)\left(p_1\left(2+\frac{n+1}{v+1}\right)-l\right)-\varepsilon_3,\end{cases}$$

и

$$\mathrm{II}\ \begin{cases} p_1\leqslant\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1),\\ 2p_1-\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1)\leqslant(1-\lambda)\left(p_1\left(2+\frac{n+1}{v+1}\right)-l\right)-\varepsilon_3,\end{cases}$$

где $\varepsilon_3=\varepsilon_2(1-\lambda)-\delta$.

Первое неравенство системы I можно переписать в виде

$$\lambda=\frac{k_1p_1(n+1)}{(l+1)(v+1)},\ \text{где } 0\leqslant k_1<1.$$

Тогда второе запишется в виде

$$p_1(4-3k_1)\leqslant\left(1-\frac{k_1p_1(n+1)}{(l+1)(v+1)}\right)\left(p_1\left(2+\frac{n+1}{v+1}\right)-l-\varepsilon_3\right). \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$f(l) = \left(1 - \frac{k_1 p_1 (n+1)}{(l+1)(v+1)}\right)\left(p_1\left(2 + \frac{n+1}{v+1}\right) - l - \varepsilon_3\right).$$

Произведя замену, обозначив $s_1 = \frac{k_1 p_1 (n+1)}{v+1}$, $t = p_1\left(2 + \frac{n+1}{v+1}\right)$,

и учитывая, что $l+1$ сравнимо с l при больших l, получим $f(l) = \left(1 - \frac{s_1}{l}\right)(t - l - \varepsilon_3)$. Критической точкой данной функции $f(l)$ является точка $l_0 = \sqrt{s_1(t-\varepsilon_3)}$. Рассмотрим функцию $f(l)$ в точке l_0. С учетом обозначений

$$f(l_0) = \left(1 - \sqrt{\frac{k_1 p_1 (n+1)}{v+1} : \left(p_1\left(2 + \frac{n+1}{v+1}\right) - \varepsilon_3\right)}\right) \times$$

$$\times \left(p_1\left(2 + \frac{n+1}{v+1}\right) - \varepsilon_3 - \sqrt{\frac{kp_1(n+1)}{v+1}\left(p_1\left(2 + \frac{n+1}{v+1}\right) - \varepsilon_3\right)}\right).$$

Обозначим теперь $\frac{n+1}{v+1}$ через x. Тогда имеем

$$f(l_0) = p_1\left(1 - \sqrt{\frac{k_1 x}{2 + x - \varepsilon_4}}\right)(x + 2 - \varepsilon_4 - \sqrt{k_1 x (2 + x - \varepsilon_4)}),$$

где $\varepsilon_4 = \varepsilon_3/p_1$. Переходя к неравенству (8), имеем

$$4 - 3k \leqslant \left(1 - \sqrt{\frac{k_1 x}{2 + x - \varepsilon_4}}\right)(2 + x - \varepsilon_4 - \sqrt{k_1 x (2 + x - \varepsilon_4)}). \quad (9)$$

На границе изменения параметра k_1 при $k_1 = 1$ получаем $x \leqslant \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon_5}{4}$,

где $\varepsilon_5 = \varepsilon_4(2 - \varepsilon_4)$, и с учетом обозначений система I совместна для всех $v \geqslant 4n + 3 + \varepsilon_6$, где $\varepsilon_6 = \varepsilon_5(v+1)$. При любом k_1, $0 \leqslant k_1 < 1$, имеем:

$$x^2(k_1^2 - 2k_1 + 1) + 2x(3k_1^2 - 3k_1 - 2) + 9k_1^2 - 12k_1 + 4 - \varepsilon_7 \geqslant 0,$$

где $\varepsilon_7 = \varepsilon_4(2k_1 x + 2x + 6k_1 - 8 - \varepsilon_4)$. Рассмотрим квадратное уравнение относительно x, приравняв левую часть последнего неравенства к нулю. Корнями этого уравнения являются числа

$$x_{1,2} = \frac{-3k_1^2 + 3k_1 + 2 \pm \sqrt{4k_1(3k_1^2 - 10k_1 + 8) + \varepsilon_8}}{(k_1 - 1)^2}, \quad 0 \leqslant k_1 < 1.$$

Тогда решением последнего неравенства, а значит, и неравенства (9) с учетом того, что $v > \frac{n-1}{2}$, будут все x из интервала $]0, x_1]$, где x_1 есть левый корень, который изменяется в зависимости от параметра k_1, $0 \leqslant k_1 < 1$, т. е. x_1 есть функция от k_1:

$$f(k_1) = \frac{-3k_1^2 + 3k_1 + 2 - \sqrt{4k_1(3k_1^2 - 10k_1 + 8) + \varepsilon_8}}{(k_1 - 1)^2}.$$

Производной данной функции есть функция

$$f(k_1) = \left\{\left(-6k_1 + 3 - \frac{9k_1^2 - 20k_1 + 8 + \varepsilon_9}{\sqrt{k_1(3k_1^2 - 10k_1 - 8) - \varepsilon_{10}}}\right) \times \right.$$

$$\left. \times (k_1 - 1) + 2(3k_1(k_1 - 1) + 2(1 + \sqrt{k_1(3k_1^2 - 10k_1 + 8) + \varepsilon_{10}})) \right\} \times$$

$$\times \{(k_1 - 1)^3\}^{-1},$$

где $\varepsilon_9 = \varepsilon_8/4$, $\varepsilon_{10} = \varepsilon_9'$. Знаменатель полученной функции всегда отрицателен, числитель будем рассматривать на интервалах $\left[0;\ \frac{1}{2} + \varepsilon_{11}\right[$ и $\left[\frac{1}{2} + \varepsilon_{11};\ 1\right[$, где $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(\varepsilon_{10}, \varepsilon_9)$. При $k_1 \in \left[0;\ \frac{1}{2} + \varepsilon_{11}\right[$ выражение $(-6k_1 + 3) - \frac{9k_1^2 - 20k_1 + 8 - \varepsilon_9}{\sqrt{k_1(3k_1^2 - 10k_1 + 8) + \varepsilon_{10}}}$ не превосходит нуля, так как $-6k_1 + 3$ по модулю не превосходит вычитаемого, а тогда при умножении на $k_1 - 1$ полученное выражение будет неотрицательно. Второе слагаемое в числителе функции $f'(k_1)$ при всех k_1, $0 \leqslant k_1 < 1$, неотрицательно, так как $2(1 + \sqrt{k_1(3k_1^2 - 10k_1 + 8) + \varepsilon_{10}}) \geqslant 2$, модуль же отрицательного выражения $3k_1(k_1 - 1)$ не превосходит 1, а тогда и весь числитель на интервале $\left[0;\ \frac{1}{2} + \varepsilon_{11}\right[$ есть выражение положительное, а значит, на указанном интервале $f'(k_1) < 0$. На интервале $\left[\frac{1}{2} + \varepsilon_{12},\ 1\right[$ модуль отрицательного выражения $\left(-6k_1 + 3 - \frac{9k_1^2 - 20k_1 - 8 - \varepsilon_9}{\sqrt{k_1(3k_1^2 - 10k_1 + 8) - \varepsilon_{10}}}\right) \times$ $\times (k_1 - 1)$ не превосходит 1, а модуль второго слагаемого в числителе при k_1, $0 \leqslant k_1 < 1$, не менее 2. Тогда на интервале $\left[\frac{1}{2} + \varepsilon_{11},\ 1\right[$ числитель функции $f'(k_1)$ положителен, а значит, при $k_1 \in \left[\frac{1}{2} + \varepsilon_{11},\ 1\right[$ имеем $f'(k_1) < 0$. Итак, при всех k_1, $0 \leqslant k_1 < 1$, $f'(k_1) < 0$, а значит, $f(k_1)$ на всем отрезке $[0;\ 1]$ есть функция убывающая, откуда $f_{\min} = f(1)$, $f_{\max} = f(0)$. Тогда неравенство (9) с учетом обозначений выполняется при $v \geqslant 4n + 3 + \varepsilon_6$, а значит, система I совместна при $v \geqslant 4n + 3 + \varepsilon_6$. Из всего сказанного вытекает

Лемма 2. *Система неравенств I при $v < 4n+3$ противоречива.*

Лемма 3. *Система неравенств II при $v < 4n+3$ противоречива.*

Доказательство леммы 3 проводится аналогично доказательству леммы 1. Из леммы 2 и леммы 3 следует теорема, сформулированная вначале.

При $v \geqslant 4n+3$, по-видимому, также верно, однако доказательство этого факта потребует, вероятно, привлечения новых соображений.

Summary

The paper presents the upper bound of the Hausdorff dimension of the complex number set for which the inequality $|P(z)| < H(P)^{-v}$ has infinitely many solutions in the integral polynomials $P(z)$, where $H(P)$ is the height of $P(z)$, $\frac{n-1}{2} < V < 4n+3$ and n is the degree of $P(z)$.

Литература

1. Берник В. И. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 5. С. 1036—1039.
2. Берник В. И., Желудевич Ф. Ф. Необходимое условие взаимной простоты целочисленных многочленов, принимающих малые значения в некотором круге. Минск, 1983. (Препринт / Ин-т математики АН БССР: 25/12)).

3. Берник В. И., Мельничук Ю. В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. Минск, 1988.

4. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.

5. Baker A., Schmidt W. // Proc. London Math. Soc. 1970. Vol. 21, N 3. P. 7—11.

Белорусский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 28.12.93