ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В C^4

Наталья Владимировна Сакович (Беларусь, Могилев)

Проблемы, связанные с приближением нуля целочисленными линейными комбинациями аналитических функций имеют давнюю историю [1]. Обозначим через

$$F(z) = a_4 f_4(z) + a_3 f_3(z) + a_2 f_2(x) + a_1 f_1(z) + a_0,\ \ a_j \in \mathbf{Z},\ 0 \le j \le 4 \qquad (1)$$

и $H(F) = \max\limits_{0\le j\le 5} |a_j|$.

Пусть задана кривая $\Gamma = \{f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z) : z \in U\}$, где U — некоторая область в C, $f_1, f_2, f_3, f_4 : U \to \mathbf{C}$ — аналитические функции комплексной переменной и вронскиан функций $f_1'(z), f_2'(z), f_3'(z), f_4'(z)$ для почти всех $z \in U$ отличен от нуля.

А.С. Пяртли установил первый метрический результат о диофантовых приближениях для точек гладких кривых $\Gamma = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$ из $\mathbf{R}^n$, $n \ge 1$: если $H > H_0(x,\varepsilon)$, то $F(x)| > H^{-n^2-n+1-\varepsilon}$ для почти всех x.

Без ограничения общности мы можем считать, что z изменяется на некотором замкнутом круге $K \subset U$ с центром в некоторой точке z_0 и радиуса $r > 0$. В [2] был доказан аналог теоремы Пяртли для аналитических функций комплексного переменного: для почти всех $z \in K$ (в смысле меры Лебега в $\mathbf{R}^2$) неравенство $|F(z) < H^{-w}$ имеет при $w > 2n^2 + n - 3$ только конечное число решений в векторах $\vec{a} = (a_0,\ldots,a_n)$. При $n = 4$ условие на w принимает вид $w > 33$. Нами получено усиление этого результата.

Теорема. *Неравенство* $|F(z)| < H^{-3,5-\varepsilon}$ *для почти всех* $z \in \mathbf{C}$ *имеет лишь конечное число решений в функциях* $F(z)$ *вида (1).*

Литература. 1. Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Мн.: Наука и техника, 1967.

2. Ковалевская Э.И., Сакович Н.В. Аналог теоремы Пяртли для аналитических функций комплексного переменного // Весці НАН РБ. Сер. фіз.-мат. навук. 1994. №4. С.16-20.