

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ГИПОТЕЗЫ БЕЙКЕРА-ШМИДТА ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Н.В. Сакович

Пусть $w > 0$ - некоторое действительное число, $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ -многочлен с целыми коэффициентами. $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ - высота $P(x)$. Обозначим че-

рез $N_n(w)$ множество $\beta \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $|P(\beta)| < H^{-w}$ имеет бесконечное число решений. В.И. Берником в [1] было доказано, что $\dim N_n(w) \leq \frac{n+1}{w+1}$ (гипотеза Бейкера-Шмидта [6]). Рассмотрим неравенство $|P(z)| < H^{-w}$ в случае комплексных чисел. Пусть

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (1)$$

целочисленный полином. $H = H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ - высота $P(z)$. Определим $N_n(v)$ - мно-

жество комплексных чисел z , для которых неравенство

$$|P(z)| < H^{-v} \quad (2)$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(z)$. Неравенство (2) при $v \leq \frac{n+1}{2}$ имеет для любого $z \in \mathbb{C}$ бесконечное число решений в $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ [4]. При $v > \frac{n+1}{2}$, как показал В.Г. Спринджук [4], неравенство (2) имеет бесконечное число решений только для множества нулевой меры.

Пользуясь обозначениями работы [4], сформулируем три предложения:

Предложение 1. При $v > \frac{n+1}{2}$ имеем $\dim N_2(v) \leq \frac{3}{v+1}$.

Предложение 2. Пусть $P(z) \in P_n(H, \bar{I})$. Обозначим через $N_n^{(1)}(v)$ множество $z \in \mathbb{C}$, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений в полиномах $P(z)$ с условием $0 \leq p_1(P) \leq 1$. Тогда $\dim N_n^{(1)}(v) \leq \frac{n+1}{v+1}$.

Пусть далее $N_n^{(2)}(v)$ множество $z \in \mathbb{C}$, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений в $P(z)$ с условием $\frac{l_1}{T} > \frac{n}{4} - \frac{P_2}{2}$.

Предложение 3. Для множества $N_n^{(2)}(v)$ имеем $\dim N_n^{(2)}(v) \leq \frac{n+1}{v+1 - \frac{n}{2}}$.

Доказательство предложений 1-3 несложно и можно провести аналогично случаю вещественных чисел. Учитывая предложения 1-3, мы будем считать в дальней-

шем: $n \geq 3$, $p_1 > 1$, $\frac{l_1}{T} > \frac{n}{4} - \frac{P_2}{2}$. В работе доказана следующая теорема.

При $\frac{n+1}{v} < v \leq 4n + 3$ имеем $\dim N_n(v) \leq \frac{n+1}{v+1}$.

Предложение 1 будем считать базой индукции. Далее считаем, что теорема доказана для всех многочленов степени, меньшей n . Будем считать также, что w принадлежит кругу $C_1 = C_1(0, n+1)$. Вокруг круга C_1 опишем квадрат со стороной $2n+2$. Полученный квадрат разобьем на более мелкие квадраты со стороной $H^{1/T}$. Пусть каждому такому маленькому квадрату принадлежит $c(n)H^S$ многочленов. Многочлен $P(w)$ принадлежит квадрату K , если $\exists w \in K: |P(w)| < H^{-1}$. Число многочленов, принадлежащих K , не превосходит $c(n)H^{2/T}$. Тогда общее число полиномов $P(w) \in P_n(H, \bar{L})$ не превосходит $c(n)H^{(2/T)+S}$. Все $w \in S(x_1)$, для которых выполняется неравенство (2), находятся внутри квадрата со стороной $c(n)H^{-v-1+p_1+n\epsilon_1}$. Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} H^{(2/T)+S} (H^{-v-1+p_1+n\epsilon_1})^{\frac{n+1}{v+1}+\epsilon_2} < c(n) \sum_{i=1}^{\infty} H^{(2/T)+S-n-1+p_1+\frac{n+1}{v+1}}.$$

где $\epsilon_2 = \epsilon(v+1-p_1-n\epsilon_1) - n\epsilon_1 \frac{n+1}{v+1}$. При $S < n-p_1(2 + \frac{n+1}{v+1}) + \epsilon_2$ ряд сходится, и $\dim N_n(v) \leq \frac{n+1}{v+1}$.

Предположим, что существуют квадраты K , которым принадлежит более $c(n)H^S$ полиномов. Рассмотрим один из таких квадратов. Представим S в виде: $S = k + (S-k)$. Два многочлена из множества $P_n(H, \bar{L})$: $P_1(z) = Hz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ и $P_2(z) = Hz^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0$, принадлежащие квадрату K , будем относить одному классу, если

$$a_{n-1} = c_{n-1}, \dots, a_{n-[k]+1} = c_{n-[k]+1}. \quad (3)$$

Так как число различных классов не превосходит $c(n)H^{[k]+1}$, то среди $c(n)H^S$ многочленов существует не менее $c(n)H^{S-[k]+1}$ многочленов, принадлежащих одному и тому же классу. Запишем их: $P_0(z), P_1(z), \dots, P_m(z)$, где $m = c(n)H^\theta$, $\theta = p_1(2 + \frac{n+1}{v+1})$. Образует новые многочлены

$$t_i(z) = P_i(z) - P_0(z), \dots, t_m(z) = P_m(z) - P_0(z).$$

Все m многочленов имеют степень не выше $n - [k]$, а все коэффициенты не превосходят $2H$. Все многочлены $t_i(z)$ различны. Разлагая $P(w)$ в окрестности корня x_1 в ряд Тейлора и учитывая, что $|P(w)| < c(n)H^{1-2p_1}$, получим

$$|t_i(w)| < c(n)H^{1-2p_1}.$$

Если среди многочленов $t_i(w)$, $i = \overline{1, m}$ имеются хотя бы два без общих корней, то квадрат K назовем неособенным. К многочленам $t_i(w)$ применим теорему из работы [2]. Получим $4p_1 \leq p_1(2 + \frac{n+1}{v+1}) - \epsilon_3'$, где $\epsilon_3' = \epsilon_2 - \delta_2$. Последнее неравенство противоречиво. Обозначим через $N_n^{(3)}(v)$, где $v > \frac{n+1}{2}$, множество $w \in C$, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений при w , попадающих в бесконечное

число неособенных квадратов. Тогда

$$\dim N_n^{(3)}(v) \leq \frac{n+1}{v+1},$$

Рассмотрим случай, когда среди полиномов $t_1(w), \dots, t_m(w)$ нет хотя бы двух без общих корней. Тогда, рассматривая многочлены y которых $a_{n-1} = c_{n-1}, \dots, a_{n-[k]+1} = c_{n-[k]+1}$, по принципу ящиков Дирихле и лемме 16 из [3] существует $c(n)H^{(n)}$ многочленов

$$t_i(w) = k_i(w) d(w), \quad i = \overline{1, m} \\ \deg t_i(w) \leq p_1(2 + \frac{n+1}{v+1}) - \varepsilon_2, \quad (4)$$

$$H(t_i(w)) \leq 2H, \quad |t_i(w)| < c(n)H^{1-2p_1}, \quad w \in K,$$

причем уже среди многочленов $k_i(w)$ есть хотя бы два без общих корней. Предположим, что

$$|d(w)| < c(n)H \cdot \frac{v+1}{n+1} (l+1)^{\lambda+\lambda} \quad (5)$$

Так как $\deg d(w) < n$, то по индуктивному предположению размерность Хаусдорфа множества точек w , принадлежащих бесконечному числу таких квадратов K , во всех точках которого выполняется неравенство (5), не превосходит

$$(l+1) : \left(\frac{v+1}{n+1} (l+1)^{\lambda+\lambda} \right) = \frac{n+1}{v+1}.$$

Поэтому теореме остается доказать в том случае, когда w принадлежит бесконечному числу квадратов K , для точек которых не выполняется неравенство (5) на множестве B с мерой $\mu B \geq \frac{1}{2} \mu K$. В этом случае, в силу (4), выполняется неравенство

$$|k_i(w)| < c(n)H^{1-2p_1+\lambda} \frac{v+1}{n+1} (l+1)^{\lambda}.$$

Из определения многочленов $k_i(w)$ следует, что существуют два многочлена $k'(w)$ и $k''(w)$ без общих корней. Применим к ним теорему из работы [2]. Тогда

$$2p_1 - \lambda \frac{v+1}{n+1} (l+1) + 2 \max(p_1 - \lambda \frac{v+1}{n+1} (l+1), 0) \leq (1-\lambda)(p_1(2 + \frac{n+1}{v+1})). \quad (6)$$

Неравенство (6) распадается на две системы

$$1 \left\{ \begin{array}{l} p_1 > \lambda \frac{v+1}{n+1} (l+1), \\ p_1 + 3(p_1 - \lambda \frac{v+1}{n+1} (l+1)) \leq (1-\lambda)(p_1(2 + \frac{n+1}{v+1}) - l) - \varepsilon_3. \end{array} \right.$$

$$\Pi \begin{cases} p_1 \leq \lambda \frac{v+1}{v+1} (l+1), \\ 2p_1 - \lambda(l+1) \frac{v+1}{v+1} \leq (1-\lambda)(p_1(2 + \frac{v+1}{v+1} - l) - \varepsilon_3), \end{cases}$$

где $\varepsilon_3 = \varepsilon_2(1-\lambda) - \delta$. Система II с учетом того, что $v > \frac{v-1}{2}$ несовместна. При решении системы I исследуем функцию

$$f(l) = (1 - \frac{kp_1(n+1)}{(l+1)(v+1)}) (p_1(2 + \frac{v+1}{v+1} - l) - l - \varepsilon_3).$$

Так как при всех k , $0 \leq k < 1$, $f'(k) < 0$, а значит на всем отрезке $[0;1]$ функция $f(l)$ есть функция убывающая, откуда $f_{\min} = f(1)$, $f_{\max} = f(0)$. Тогда второе неравенство системы с учетом обозначений выполняется при $v > 4n + 3 + \varepsilon_6$, $\varepsilon_6 > 0$, а значит, система I совместна при $v > 4n + 3 + \varepsilon_6$.

Из всего сказанного вытекает

Лемма: Система неравенств I при $v \leq 4n + 3$ противоречива.

Из доказанной леммы автоматически следует теорема, сформулированная вначале.

Литература

1. Берник В.И. Докл. АН СССР. 1984. т. 277. N 5.
2. Берник В.И., Желудевич Ф.Ф. Необходимое условие взаимной простоты целочисленных многочленов, принимающих малые значения в некотором круге. - Минск. 1993. Препринт/ Ин-т математики АН БССР: 25(12).
3. Берник В.И., Мельничук Ю.Ф. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. - Минск. 1988.
4. Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. - Минск, 1967.
5. Baker A., Schmidt W. // Proc. London Math. Soc. 1970. Vol. 21, N 3. P. 7-11.