О КОЛИЧЕСТВЕ ТОЧЕК С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ ВБЛИЗИ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И.М. Морозова [1], **О.Н. Кемеш** [1], **Н.В. Сакович** [2]

[1] Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
inna.morozova@tut.by
[2] Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Могилев, Беларусь

Задачи, связанные с асимптотическим ростом количества точек в некоторой области $\Gamma(Q) \subset \mathbb{R}^n$, мера Лебега которой $\mu\Gamma(Q) \to \infty$ при $Q \to \infty$, имеют давнюю историю и важность для понимания арифметической структуры $\mathbb{R}^n$. Задача о количестве целых точек в области обобщена на точки с рациональными и алгебраическими координатами в работах [1–4]. В данной работе мы рассматриваем обобщение на случай действительных алгебраических чисел.

Пусть задана точка $\bar{b}(q) = (p_1/q, \ldots, p_k/q, p_{k+1}/q)$ и поверхность $z = f(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_k)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in D \subset \mathbb{R}^k$. Для достаточно большого Q и $\lambda > 0$ рассмотрим систему неравенств

$$\left| f\left(\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_k}{q}\right) - \frac{p_{k+1}}{q} \right| < Q^{-\lambda}, \quad 1 < q < Q. \tag{1}$$

В настоящей работе рассматривается вопрос о разрешимости (1) и о количестве решений при $Q \to \infty$.

Рассмотрим неравенство (1) в случае действительных алгебраических чисел $k = 2$ и достаточно большого $Q \in \mathbb{N}$.

Пусть множество полиномов

$$P_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \quad \deg P = n, \quad H(P) \leqslant Q\}, \tag{2}$$

где $\deg P = n \geqslant 3$ — степень полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $H = H(P) = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ — высота $P(x)$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — действительные сопряженные алгебраические числа, корни некоторого полинома $P(x) \in P_n(Q)$ и J — некоторый интервал на $\mathbb{R}$.

Для непрерывной на J функции $\varphi(\bar{x})$ рассмотрим неравенство

$$|\varphi(\alpha_1, \alpha_2) - \alpha_3| < Q^{-\gamma}, \quad \gamma \geqslant 0, \tag{3}$$

и обозначим через $\#B(Q, \gamma, J)$ количество решений (3) в $P(x) \in P_n(Q)$, имеющих три действительных корня. Тогда доказана следующая

Теорема. *При* $Q \to \infty$ *справедливо асимптотическое неравенство*

$$\#B(Q, \gamma, J) < cQ^{n+1-\gamma}, \quad 0 \leqslant \gamma < 1, \quad c = \cos t.$$

Работа выполнена в рамках задания ГПНИ «Конвергенция–2020».

Литература

1. Beresnevich V., Dickinson D., Velani S. *Diophantine approximation on planar curves and distribution of rational points* // Ann. Of Math. 2007. P. 367–426.

2. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. *The distribution of close unjagate algebraic numbers* // Compos. Math. 2010. P. 1165–1179.

3. Bernik V., Götze F. *Ddistribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals* // Jrv Ross Acad. Nanh. Ser. Mat. 2015. P. 21–42.

4. Bernik V., Götze F., Kukso O. *On algebraic points in the plane near smooth curves* // Lithuanian Math. J. 2014. P. 231–251.