О МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

Э.И.КОВАЛЕВСКАЯ, Н.В.САКОВИЧ

Метрические характеристики играют важную роль в вопросах изучения малых значений последовательностей функций, поскольку показывают характер аппроксимации нуля "в целом", в то время, когда изучить индивидуальные свойства не удаётся. В случае поля действительных чисел имеется обширная литература по этим вопросам [1,5,6] Случай комплексных чисел изучен гораздо хуже, хотя именно такие задачи возникают в ряде задач математической физики [4].

До сих пор в приложениях метрические теоремы доказывались отдельно для действительной и мнимой частей аргумента. В данной работе доказана теорема, устанавливающая новую метрическую характеристику приближений точек комплексной кривой в $\mathbb{C}^n$ векторами с целыми гауссовыми координатами.

Теорема. Пусть $f_1(z),\dots,f_n(z)$ - аналитические функции в круге $K_{z_0}(r)$ с центром в точке z_0 радиуса $r>0$. Положим $\bar{a}=(a_0, a_1,\dots,a_n)$, $\bar{a}\in Z^{n+1}$, $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{f}(z)=(1,f_1(z),\dots,f_n(z))$, $F(z)=(\bar{a},\bar{f}(z))$ - скалярное произведение, $A=\max\limits_{0\le i\le n}|a_i|$. Тогда для почти всех z неравенство $|F(z)|<A^{-w}$ имеет при $w>2n^2+n-3$ только конечное число решений в векторах $\bar{a}$.

Лемма I. Пусть $\delta>0$, $F(z)=a_0+a_1f_1(z)+\dots+a_nf_n(z)$, где $f_1(z),\dots,f_n(z)$ - аналитические функции в круге $K_{z_0}(r)$ с центром в точке z_0 радиуса $r>0$. Пусть $\Delta(z)=W(f_1'(z),\dots,f_n'(z))$ - вронскиан системы функций $f_1'(z),\dots,f_n'(z)$, $|\Delta(z)|>\delta$ и $\rho=\max(\sup|f_i^{(j)}(z)|)$. Тогда в каждой точке $z\in K_{z_0}(r)$ существует такое j, $1\le j\le n$, что $|F^{(j)}(z)|>c_1(\delta)A$, где $c_1(\delta)=\delta/n\rho^{n-1}$.

Доказательство. Проводится методом от противного, как в лемме I из [3].

Лемма 2. Пусть $\alpha>0$, $f(z)$ - аналитическая функция в круге $K_{z_1}(r)$,

$|f(z)|\le M$, $|f^{n}(z)|>\alpha$ для $z\in K_{z_1}(r)$, $n\ge 1$. Пусть $f(z_1)=0$, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)^{n-1}2^{-nk}$ и δ_1 удовлетворяет условию: $0<\delta_1<\min\left(1,\dfrac{\alpha(2r)^n}{(M+1)n!\,S_n}\right)$. Положим $\delta=\delta_1 r/2^n$. Тогда в круге $K_{z_1}(r)$ существует не более n нулей функции $f(z)$.

Доказательство. Предположим $f(z_i)=0$, $i=\overline{2,\ n+1}$, $z_i\in K_{z_1}(\delta)$. Так как функция $f(z)$ - аналитическая в круге $K_{z_1}(\delta)$, то в точках z_i, $2\le i\le n+1$ имеем:

$$0=f'(z_1)(z_i-z_1)+\frac{f''(z_1)}{2!}(z_i-z_1)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z_i-z_1)^n+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_1)}{k!}(z_i-z_1)^k.$$

Применим к полученным равенствам следующие рассуждения: вычтем поочерёдно из первого равенства оставшиеся равенства, учитывая, что при вычитании взаимно сокращаются старшие слагаемые, независящие от z_n и z_{n+1} и что старшая степень оставшихся слагаемых равна $k-n$, получим:

$$0=\frac{f^{n}(z_1)}{n!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}C_k\sum_{m=0}^{k-n}(z_2-z_1)^{k-n-m}\cdot\sum_{z=0}^{m}(z_3-z_1)^{m-z_1}\ldots\sum_{z_{n-2}=0}^{z_{n-3}}(z_n-z_1)^{z_{n-3}-1\cdot z_{n-2}}(z_{n+1}-z_1)^{z_{n-2}}=$$

$$=\frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}+R$$

Оценим ряд R, обозначив $k-n=s$ и принимая во внимание неравенство Коши для коэффициентов ряда и то, что $|z_i-z_1|\le\delta<1$,

$$|R|\le\sum_{s=1}^{\infty}\frac{M}{2^{s+n}}\sum_{m=0}\delta^s(s+1)^{n-2}<M\cdot 2^{-n}\cdot\delta_1\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(s+1)^{n-1}}{2^{ns}}\qquad\text{(I)}$$

По признаку Даламбера ряд в (I) сходится. В обозначениях леммы его сумма равна S_n. Следовательно, $|R|<M\cdot 2^{-n}\cdot\delta_1\cdot S_n<\delta_n/(2n!)$. Тогда из условия леммы получим $\left|\dfrac{f^{(n)}(z_1)}{n!}+R\right|>\dfrac{\delta_n}{2n!}$, что противоречит (I).

Лемма 3. Пусть a, r, M, ε - положительные числа, $f(z)$ - аналитическая функция в круге $K_{z_0}(r)$, удовлетворяющая условиям: $|f'(z)|>a$, $|f(z)|<M$. Пусть $\delta=\min(r/2,\ r^2a/5M)$. Положим

$$\sigma(f,\varepsilon)=\{z\in K_{z_0}(\delta):|f(z)|<\varepsilon\}.$$

Тогда $\mu\,\sigma(f,\varepsilon)\le 16\pi(\varepsilon a^{-1})^2$, где μ мера, упомянутая во введении.

Доказательство см. в [2, лемма 4].

Лемма 4. Пусть $\gamma=\gamma(m)$, r, ε, $M=M(m)$ – положительные числа, $f(z)$ – аналитическая функция в $K_{z_0}(r)$, удовлетворяющая условиям: $|f^{(j)}(z)|\leq M$ $(j=0,1,\ldots,n)$, $|f^{(n)}(z)|>\gamma$ для $n\geq 2$ и $|f^{(j)}(z)|$ – монотонная функция при изменении аргумента по любому лучу, выходящему из $\tilde{z}$, $\tilde{z}\subset K_{z_0}(r)$, $(j=0,1,\ldots,n)$. Пусть величины $\gamma(m)$ и $M(m)$ имеют одинаковый порядок роста при $m\to\infty$. Положим $\sigma(f,\varepsilon)=\{z\in K_{z_0}(r): |f(z)|<\varepsilon\}$. Тогда I) $\mu\sigma(f,\varepsilon)<C_1(n,r)(\varepsilon\gamma^{-1})^{2/n}$, если величины $\rho(m)=(\varepsilon^{n-1}\gamma(m))^{2/n}$ и $M(m)$ имеют одинаковый порядок роста при $m\to\infty$;
2) $\mu\sigma(f,\varepsilon)<C_2(n,r)(M\varepsilon)^{2/(2n-1)}\gamma^{-4/(2n-1)}$, если

$$\rho_1(m)=(M\varepsilon)^{1/(2n-1)}\cdot\gamma^{(2n-3)/(2n-1)}<M(m).$$

Здесь $C_1(n,r)$, $C_2(n,r)$ – константы, зависящие только от n, r. Если одновременно выполняются указанные условия для величин $\rho(m)$, $\rho_1(m)$, $M(m)$, то для $\mu\sigma(f,\varepsilon)$ выбираем минимальную верхнюю оценку.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 в [2] с учетом количества кругов радиуса δ в исходном круге $K_{z_0}(r)$.

Лемма 5. (Бореля-Кантелли). Если A_n $(n=0,1,\ldots)$ – бесконечная последовательность измеримых множеств и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\mu A_n$ сходится, то мера тех x, которые попадают в бесконечно многие множества A_n, равна нулю.

Доказательство теоремы. Рассмотрим определитель $\Delta(z)$, введённый в лемме I. Так как функции $f_i(z)$ $(1\leq i\leq n)$ – аналитические в $K_{z_0}(r)$, то $\Delta(z)$ – аналитическая функция в $K_{z_0}(r)$. Из свойства, что аналитическая функция обращается в нуль лишь на счётном множестве точек z, лежащих в области её аналитичности, получаем: $|\Delta(z)|\neq 0$ почти всюду в $K_{z_0}(r)$. В силу метрических соображений как в [1, с.85-87], замечаем, что теорему достаточно доказать для $z=x+iy\in K_0(1)$ и считать, что $|\Delta(z)|>\varepsilon$ для $z\in K_0(1)$, где $\varepsilon>0$ как угодно мало. Положим

$$F(z) = a_0 + a_1 f_1(z) + \ldots + a_n f_n(z) \tag{2}$$

При фиксированном A рассмотрим одну из функций $F(z)$. Пусть множество $\sigma(F)$ – множество тех $z \in K_0(1)$, для которых при взятой функции F выполняется

$$|F(z)| < A^{-w} \tag{3}$$

Найдём $\mu\sigma(F)$. Возьмём $z_1 \in \sigma(F)$. По лемме I существует j, $1 \le j \le n$, что выполняется неравенство $|F^{(j)}(z_1)| > c_1(\varepsilon, \bar{f}) \cdot A$. Далее применяем леммы 2,3. Проверим условия леммы 4. Имеем $\gamma(A) = c_1(\varepsilon, \bar{f}) \cdot A$, $M(A) = A$, $\rho(A) = c_2(\varepsilon, \bar{f}) \cdot A^{[1-w(j-1)]/j}$, $\rho_1(A) = A^{1-\frac{w+1}{2j-1}} < A$, $w > 1$. Ясно, что для $j \ge 2$ выполняются условия случая 2).

Следовательно, имеем $\mu\sigma(F) \le c_2(j, 2)\left(A^{1-w(2j-1)}\right)(c_1(\varepsilon, \bar{f}) A)^{-1/(2j-1)} =$

$= c_3(j, 2, \varepsilon, \bar{f}) \cdot A^{-(w+2)/(2j-1)}$ для $j \ge 2$,

$\mu(\sigma(F)) < c_4(2) \cdot A^{-2/(w-1)}$ для $j =$ I.

Наихудшая оценка получается при $j = n$. Поэтому

$\mu\sigma(F) < c_5(n, \varepsilon, 2, \bar{f}) \cdot A^{-(w+2)/(2n-1)}$, где $c_5(n, \varepsilon, 2, \bar{f}) = \max\limits_{2 \le j \le n}(c_3, c_4)$.

Поскольку при фиксированном A число функций $F(z)$ вида (2), удовлетворяющих (3), не более чем $A+1$, то суммарная мера всех $\mu\sigma(F)$ не превосходит $c_6(n, \varepsilon, 2, \bar{f}) \sum\limits_{A=1}^{\infty} A^{n-(w+2)/(2n-1)}$

Так как полученный ряд сходится при $w > 2n^2 + n - 3$, то лемма Бореля-Кантелли завершает доказательство теоремы.

Литература:

I. Спринджук В.Г. Проблемы Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967. 181 с.
2. Ковалевская Э.И. Диофантовы приближения на многообразиях в $\mathbb{C}^2$//ВесцI АН БССР. Сер. фIз.-мат. навук. 1991. №6.
3. Ковалевская В.И. Экстремальные многообразия размерности 3 в . Минск, 1989(Препринт/АН БССР. Ин-т математики; №27)
4. Пташник Б.И. Неккоректные граничные задачи дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984. 264 с.
5. Берник В.И. Диофантовы приближения на дифференцируемых многообразиях//Докл. АН БССР. 1989. Т.33. №8. С. 681-683.
6. Baker A. Transcendental Number Theory Camb. Univ Press, 1975