УДК 511.42

О КОЛИЧЕСТВЕ ТОЧЕК С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ ВБЛИЗИ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

О. Н. Кемеш
старший преподаватель,
Белорусский аграрный технический университет, г. Минск, РБ
И. М. Морозова
кандидат физико-математических наук, доцент,
Белорусский аграрный технический университет, г. Минск, РБ
Н. В. Сакович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова,
г. Могилев, РБ

Задачи, связанные с асимптотическим ростом количества точек в некоторой области $\Gamma(Q)\subset\mathbb{R}^n$, мера Лебега которой $\mu\Gamma(Q)\to\infty$ при $Q\to\infty$, имеет давнюю историю и важность для понимания арифметической структуры пространства $\mathbb{R}^n$ и встречаются в приложениях, например, при вычислении кратных интегралов. К таким задачам относятся: проблема Гаусса о целых точках в круге с центром в начале координат и радиусом r, задача Дирихле о количестве делителей натурального числа $n<Q$ при $Q\to\infty$, задача о количестве целых чисел внутри эллипсоидов , где $f(x_1,x_2,...,x_k)$ – положительно определенная квадратичная форма от k переменных [1]. Во всех перечисленных задачах главный член асимптотично равен площади круга, области под гиперболой $xy<Q$, объему эллипсоида. Задача состоит в оценке остатка в асимптотической формуле, о наилучших значениях оценки остатка. Существуют гипотезы, которые не доказаны во всех трех задачах. Чем лучше оценка остатка, тем в меньшей окрестности границы области можно получить асимптотическую формулу для количества целых чисел [2]. Наиболее интересным оказался случай, когда точки лежат в узкой полосе около кривой или поверхности. Задача о количестве целых точек в области обобщена на точки с рациональными координатами

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

Пусть задана точка $\bar{b}(q)=\left(\frac{p_1}{q},...,\frac{p_k}{q},\frac{p_{k+1}}{q}\right)$ и поверхность $z=f(x_1,x_2,...,x_k)$, $(x_1,x_2,...,x_k)\in D\subset\mathbb{R}^k$. Для достаточно большого Q и $\lambda>0$ рассмотрим систему неравенств:

$$\left|f\left(\frac{p_1}{q},\ldots,\frac{p_k}{q}\right)-\frac{p_{k+1}}{q}\right|<Q^{-\lambda};\qquad 1<q\le Q. \tag{1}$$

Разрешимо ли неравенство (1), а если разрешимо, то какое асимптотическое количество решений оно имеет при $Q\to\infty$?

Наиболее исследован случай $k=1$ для дважды дифференцируемой функции $f(x_1)$. Будем считать в этом случае, что в неравенстве (1) переменная x_1 принадлежит некоторому интервалу на действительной прямой $x_1\in J\subset\mathbb{R}$, величины $c_1,c_2,\ldots$ – положительные, зависят от степени многочленов, но не от высот многочленов и величины Q.

Обозначим A – количество элементов конечного множества $A\subset\mathbb{R}$. М. Хаксли в [3] доказал, что при $c_1\le\left|f''(x_1)\right|\le c_2$, $\varepsilon_1>0$ верно асимптотическое неравенство

$$\# A(Q,\lambda,J)<c_3(\varepsilon_1)Q^{3-\lambda+\varepsilon_1},\ \ 0\le\lambda\le 2, \tag{2}$$

где $A(Q,\lambda,J)$ – количество решений неравенства (1). Оценку вида (2) без ε_1 в правой части получил С. Велани [4].

В. Бересневич, Д. Дикинсон, С. Велани получили оценку снизу

$$\# A(Q,\lambda,J)>c_4Q^{3-\lambda},\quad 0\le\lambda\le 2. \tag{3}$$

Оценка (3) была получена с использованием методов метрической теории диофантовых приближений. Менее точная оценка была получена в [6], [7], [8].

Рассмотрим обобщение неравенства (1) на случай действительных алгебраических чисел для $k=2$ и достаточно большого натурального Q.

Рассмотрим множество полиномов

$$P_n(Q)=\left\{P(x)\in Z[x],\quad \deg P(x)=n,\quad H(P)\le Q\right\}, \tag{4}$$

где $\deg P(x)=n\ge 2$ – степень полинома $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $H=H(P)=\max_{0\le j\le n}|a_j|$ – высота $P(x)$.

Пусть α_1,α_2 – действительные сопряженные алгебраические числа, корни некоторого полинома $P(x)\in P_n(Q)$.

Для непрерывной на интервале J функции $\varphi(x)$ рассмотрим неравенство

$$\left|\varphi(\alpha_1)-\alpha_2\right|<Q^{-\gamma},\gamma\ge 0, \tag{5}$$

и обозначим через $B(Q,\gamma,J)$ количество решений неравенства (5) в $P(x)\in P_n(Q)$.

Для величины $B(Q,\gamma,J)$ в [2] при $0\le\gamma<\frac{1}{2}$ и $n=1$ доказано неравенство

$$\# B(Q,\gamma,J)>c_5Q^{n+1-\gamma}. \tag{6}$$

Оценка (6) получена при $0\le\gamma\le\frac{3}{4}$ и этот результат находится в печати.

Теорема. *При $Q\to\infty$ справедливо асимптотическое неравенство*

$$\# B(Q,\gamma,J)<c_6Q^{n+1-\gamma},\quad 0\le\gamma<1. \tag{7}$$

Доказательство. Дадим геометрическую интерпретацию неравенства (5). На интервале J рассмотрим непрерывную функцию $y=\varphi(x)$ и полосу

$$K(\varphi,Q)=\left\{x\in \Pi;\left|\varphi(x)-y\right|<Q^{-\gamma}\right\}.$$

Множество $B(Q,\gamma,J)$ представляет собой множество точек $\bar{b}=(\alpha_1,\alpha_2)$ с действительными алгебраическими сопряженными числами α_1 и α_2. Эти числа корни некоторого многочлена $P(x)\in P_n(Q)$, а точка $\bar{b}\in K(\varphi,Q)$.

Покроем полосу $K(\varphi,Q)$ квадратами $S_j(Q^{-\gamma})$.

$$K(\varphi,a)=\bigcup_{j=1}^{L} S_j\left(Q^{-\gamma}\right). \tag{8}$$

В (8) сторона квадрата $S_j(Q^{-\gamma})$ равна $c_7Q^{-\gamma}$, а их количество $L=c_8Q^{2\gamma}$. Представление (8) в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ возможно при достаточно большой величине c_7.

Предположим, что теорема не верна. Тогда при любом c_6 найдется полоса $K(\varphi,Q)$, в которой справедливо неравенство

$$\#B(Q,\gamma,J)>c_6Q^{n+1-\gamma}. \tag{9}$$

Из неравенства (9) и (8) следует, что существует хотя бы один квадрат $S_j(Q^{-\gamma})$ со стороной $c_7Q^{-\gamma}$, в котором не менее

$$c_5c_8^{-1}Q^{n+1-2\gamma}=c_9Q^{n+1-2\gamma} \tag{10}$$

точек $\bar{b}$.

Пусть

$$P_j(x)\in P_n(Q),\ j=0,1,\dots,l,\ l>\frac{1}{2}c_7Q^{n+1-2\gamma} \tag{11}$$

многочлены, два корня которых лежат в $K(\varphi,Q)$. Это означает, что в $P_j(\alpha_i)=0,\quad i=1,2$. Разложим многочлен $P_j(x)$ в окрестности корня x_i по формуле Тэйлора при $x\in S_j(Q^{-\gamma})$:

$$P(x_i)=P(\alpha_i)+P'(\alpha_i)(x_i-\alpha_i)+\dots+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}P^{(k)}(\alpha_i)(x_i-\alpha_i)^k. \tag{12}$$

Так как числа α_1,α_2 – корни многочлена $P(x)$, то $P(\alpha_i)=0$. Будем считать, что $J\subset[0,1)$ и поэтому в (12):

$$\left|P'(\alpha_i)(x_i-\alpha_i)\right|<n^2c_7Q^{1-\gamma}$$

$$\left|P^{(k)}(\alpha_i)(x_i-\alpha_i)^k\right|<n^{k+1}c_7^kQ^{1-\gamma},\quad 0\le k\le n. \tag{13}$$

Из (13) при достаточно большом Q получаем

$$\left|P(x_i)\right|<c_{10}Q^{1-\gamma},\quad i=1,2. \tag{14}$$

Зафиксируем вектор $\bar{a}=(a_n,\dots,a_0)$, состоящий из коэффициентов многочленов $P(x)$. Количество таких векторов при достаточно большом Q не превосходит величины $(2Q+1)^{n-1}<2^nQ^{n-1}$.

Рассмотрим многочлены:

$$R_j(x)=P_j(x)-P_0(x),\quad 1\le j<l_1,\quad l_1>\tfrac{1}{2}c_9Q^{n+1-2\gamma}.$$

Поскольку при достаточно большой величине c_9 количество таких многочленов $l_1>2^nQ^{n-1}\cdot 2^{-n-1}c_9Q^{2-2\gamma}$, то воспользуемся принципом ящиков Дирихле. Получим не менее $2^{-n-1}c_9Q^{2-2\gamma}$ многочленов первой степени $R_t(x)=a_tx+b_t$, для которых:

$$|R_t(x_i)|\le 2c_{10}Q^{1-\gamma},\quad i=1,2,\quad t>2^{n-1}c_9Q^{2-2\gamma}. \tag{15}$$

Из (15) имеем систему неравенств

$$\begin{cases}|a_tx_1+b_t|<2c_{10}Q^{1-\gamma}\\ |a_tx_2+b_t|<2c_{10}Q^{1-\gamma}\end{cases},\quad t>2^{-n-1}c_9Q^{2-2\gamma} \tag{16}$$

Преобразуем систему (16) в систему уравнений

$$\begin{cases}|a_tx_1+b_t|=2c_{10}\Theta_1Q^{1-\gamma}\\ |a_tx_2+b_t|=2c_{10}\Theta_2Q^{1-\gamma}\end{cases}, \tag{17}$$

где $|\Theta_i|\le 1$, при всех $(\Theta_1,\Theta_2)\in[0,1)^2$.

В силу условий $|x_2-x_1|>\delta$ определитель системы (17) $\Delta\ne 0$. Разрешим систему уравнений (17) относительно a_t и b_t

$$|a_t|=\frac{\begin{vmatrix}2c_{10}\Theta_1Q^{1-\gamma} & 1\\ 2c_{10}\Theta_2Q^{1-\gamma} & 1\end{vmatrix}}{|\Delta|}<\delta^{-1}c_{11}Q^{1-\gamma},$$

(18)

$$|b_t|=\frac{\begin{vmatrix}x_1 & 2c_{10}\Theta_1Q^{1-\gamma}\\ x_2 & 2c_{10}\Theta_2Q^{1-\gamma}\end{vmatrix}}{|\Delta|}<\delta^{-1}c_{12}Q^{1-\gamma}.$$

Количество многочленов первой степени с условиями (18) не превосходит $c_{13}\delta^{-2}Q^{2-2\gamma}$.

Эта оценка не превосходит $2^{-n-1}c_9Q^{2-2\gamma}$ при достаточно большой величине c_6. Получили противоречие, которое показывает, что при достаточно большой величине c_6 при $Q\to\infty$, $0\le\gamma<1$ справедливо неравенство (7) и тем самым теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Bernik, V. I., Kleinbock D., Margulis G. A.*** // Khintchine-type theorems on manifolds the convergence case for standard and multiplicative versions, Internet. Marh. Res. Notices. – 2001. – P. 453–486.

2. ***Kaliada D., Götze F., Kukso O.*** // The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminates. Lithuanian Mathematical Journal. – 2014. – Vol. 54. – P. 150–165.
3. ***Huxley, M. N.*** // Area, lattive points and exponential sums, London mathematical Socicety monograps, New York, 1996.
4. ***Beresnevich V., Dickinson D., Velani S.*** // Diophantine approximation on planar curves and distribution of rational points // Ann. Of Math. – 2007. – Vol. 166, no 2. – P. 367–426.
5. ***Beresnevich V., Bernik V., Götze F.*** // The distribution of close unjagate algebraic numbers, Compos. Math. – Vol. 146, no. 5. – 2010. – P. 1165–1179.
6. ***Берник, В. И.*** Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Известия РАН. Серия математическая. 79:1. – 2015. – P. 21–42.
7. ***Bernik V., Götze F., Kukso O.*** // On algebraic points in the plane near smooth curves. Lithuanian Math. Journal. – Vol. 54. – 2014. – P. 231–251.
8. ***Гётце, Ф.*** Алгебраические числа в коротких интервалах / Ф. Гётце, А. Г. Гусакова // Доклады НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 11–16.

Поступила в редакцию 11.07.2016 г.
Контакты: +375 29 124 28 58 (Кемеш Оксана Николаевна)

Kemesh O.N., Morozova I.I., Sakovich N.V. ON THE AMOUNT OF POINTS WITH ACTUAL ALGEBRAIC COORDINATES CLOSE TO A SMOOTH CURVE.

The tasks connected with the asymptomatic increase in the amount of points in the area $\Gamma(Q) \subset \mathbb{R}^n$*, the Lebesgue measure of which is* $\mu\Gamma(Q) \to \infty$ *with* $Q \to \infty$*, have a long history and are important to understand the arithmetic structure of the space* $\mathbb{R}^n$*. These tasks are found in appendices, for example, to measure multiple integrals. Among such tasks one comes across the Gaussian problem of integers in a circle with the centre in the origin of coordinates and the radius r, the Dirichlet problem on the amount of factors of the natural number* $n \le Q$ *with* $Q \to \infty$ *and the problem of the amount of whole numbers inside the ellipsoids* $K : |f(x_1, x_2, ..., x_k)| < Q$*, where* $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ *is a positive quadratic form of k variable. For all the mentioned above problems the dominant term is asymptotically equal to the circle square, the space below the hyperbole* $xy \le Q$*, the ellipsoid volume. The aim is to assess the remainder in the asymptomatic formula.*

Keywords: polynomial root, algebraic number, the system of Diophantine inequalities, order of approximation, set cover.