УДК 511.42

О.Н. КЕМЕШ, Н.В. САКОВИЧ

РЕГУЛЯРНОСТЬ МНОЖЕСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

Рациональные числа при своем естественном упорядочивании равномерно распределены на любом интервале. Для алгебраических чисел степени большей единицы к настоящему времени это неизвестно. А. Бейкер и В. Шмидт в работе [1] *ввели понятие регулярности распределения последовательностей и доказали регулярность распределения действительных алгебраических чисел любой степени. Доказана регулярность множества рациональных чисел с функцией* $N\left(\frac{p}{q}\right)=q^2$ *на любом интервале I:* $|I|>q^{-1}$.

Пусть S – счетное множество действительных чисел и $N:S\to\mathbb{R}$ некоторая положительная функция. Пара (S,N) называется регулярной системой, если существуют постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$ такие, что для любого интервала $I=[a,b]$ существует достаточно большое число $T_0=T_0(S,I)>0$ такое, что для любого $T>T_0$ существует набор $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_t$ чисел из S, удовлетворяющий условиям:

$$N(\gamma_i)\le T,\quad 1\le i\le t, \tag{1}$$

$$\left|\gamma_i-\gamma_j\right|>c_1T^{-1},\quad 1\le i<j\le t, \tag{2}$$

$$t>c_2|I|T. \tag{3}$$

Пусть A_n – множество действительных алгебраических чисел степени n. А. Бейкер и В. Шмидт доказали, что действительные алгебраические числа α_i с функцией

$$N(\alpha_i)=H^{n+1}(\alpha_i)\left(\ln H(\alpha_i)\right)^{-\gamma}$$

образуют регулярную систему при $\gamma=3n(n+1)$. Величина $H(\alpha_i)$ для алгебраического числа α_i степени n – есть максимум модулей коэффициентов минимального многочлена для α_i. В.И. Берник [2] усилил последний результат до $\gamma=1+\delta,\delta>0$. В.В. Бересневич [4] установил окончательное значение $\gamma=0$.

При доказательстве регулярности величины c_1 и c_2 можно выписать явно. Не эффективной является зависимость величины T_0 от длины интервала I. Бересневичем в [4] установлено, что:

$$\text{при } n=1:\ T_0\left(A_n,I\right)=100|I|^{-1}\ln\left(100|I|^{-1}\right);$$

$$\text{при } n=2:\ T_0\left(A_n,I\right)=48|I|^{-1}\ln\left(24|I|^{-1}\right).$$

Если $n\geq 3$, то зависимость T_0 от $|I|$ можно найти, но она будет иметь вид $T_0=|I|^{-\gamma_1}$ при γ_1 значительно больше единицы. Докажем регулярность множества рациональных чисел с функцией $N\left(\frac{p}{q}\right)=q^2$ на любом интервале I при $|I|>q^{-1}$ и покажем, что зависимость T_0 от I из [4] не является наилучшей.

Теорема. Рациональные числа $\frac{p}{q}$ образуют регулярную систему с функцией $N\left(\frac{p}{q}\right)=q^2$ на любом интервале I при $T_0=|I|^{-1}$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. Для достаточно большого $Q>0$ обозначим через B_1 множество $x\in I$, для которых система неравенств

$$\begin{cases}|qx-p|<Q^{-1}\\ 1\leq q<\delta Q\end{cases} \tag{4}$$

имеет решение в целых числах $(p,q)\in Z\times N$. Тогда при $\delta<\frac{1}{27}$ имеем $\mu B_1<\frac{1}{4}|I|$.

Доказательство. Запишем первое неравенство (4) в виде

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<q^{-1}Q^{-1}. \tag{5}$$

Множество решений неравенства (5) обозначим $L(q,Q)$. Мера Лебега для этого множества $\mu L(q,Q)=2\,q^{-1}Q^{-1}$. При фиксированном q просуммируем эту оценку по всем p, для которых существуют $x\in I$ с условием (5).

Множество таких чисел p обозначим через $A_q(I)$. В этом случае точка должна попадать в интервал $I_1 = \left[a - q^{-1}Q^{-1}, b + q^{-1}Q\right]$, длина которого равна $|I_1| = |I| + 2q^{-1}Q^{-1}$. При достаточно большом Q справедливо неравенство $|I_1| < 1{,}1|I|$. Обозначим через $\# A_q(I)$ число элементов данного множества. Нетрудно получить

$$\# A_q(I) \le \begin{cases} |I_1|q + 1, & \text{если} \quad q > |I_1|^{-1} \\ \gamma, & \text{если} \quad q < |I_1|^{-1} \end{cases}, \tag{6}$$

где $\gamma = 0$ или 1. Просуммируем оценку $L(q,Q)$ по всем $p \in A_q(I)$.

Если $q > |I_1|^{-1}$, то:

$$\sum_{p \in A_q(I)} L(q,Q) \le 2q^{-1}Q^{-1} \cdot 2{,}2|I| = 4{,}4Q^{-1}|I|;$$

$$\sum_{1 \le q \le \delta Q} \sum_{p \in A_q(I)} L(q,Q) \le 4{,}4\delta|I|. \tag{7}$$

Пусть теперь выполняется второе неравенство (6). Покажем, что интервалы:

$$J_i = \left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{c_2}{q_i Q}, \quad J_k = \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{c_2}{q_k Q}$$

не пересекаются при $c_2 = 0{,}5\delta^{-1}$. В самом деле, если $x \in J_{i,k} = J_i \cap J_k \ne 0$, то из системы неравенств

$$\frac{1}{q_i q_k} \le \left|\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_k}{q_k}\right| \le \left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| + \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{c_2}{Q}\left(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_k}\right)$$

получаем противоречивое неравенство

$$1 \le \frac{c_2}{Q}(q_i + q_k) < \frac{2c_2\delta Q}{Q} = 2c_2\delta \le 1.$$

Поэтому

$$\sum_{q_i} |J_i| = 2c_2 Q^{-1} \sum_{q_i} q_i^{-1} < |I_1| < 1{,}1|I| \tag{8}$$

и

$$\sum_i q_i^{-1} < 1{,}1\,\delta|I|Q. \tag{9}$$

Из второй оценки (4) и (9) имеем

$$\sum_{q<\delta Q} L(q,Q) < 2Q^{-1} \cdot 1,1\delta|I|Q = 2,2\delta|I|. \qquad (10)$$

Выберем $\delta = \frac{1}{27}$. Тогда сумма мер в неравенствах (7) и (10) не превзойдет $\frac{1}{4}|I|$. Лемма доказана.

Для величины $\sum_{q} L(q,Q)$ оценка (10) не является наилучшей при всех $Q > c_0|I|^{-1}$. Если при достаточно большой величине c_2 верно неравенство $Q > c_2|I|^{-1}\ln|I|^{-1}$, то получаем оценку

$$\sum_{q<\delta Q} L(q,Q) < 2Q^{-1}\sum_{q<\delta Q} q^{-1} < 2Q^{-1}\ln Q. \qquad (11)$$

Оценка (11) при величине $Q = c_2|I|^{-1}\ln|I|^{-1}$ оказывается лучше оценки (10).

Доказательство теоремы. Для каждой точки $x \in B_1 \setminus I_1$, $\mu B_1 > \frac{3}{4}|I|$, по теореме Дирихле, можно найти рациональное число $\frac{p}{q}$ с выполнением системы неравенств

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < q^{-1}Q^{-1}, \frac{1}{27}Q \le q \le Q,$$

откуда $\left|x - \frac{p}{q}\right| < 27Q^{-2}$.

Рассмотрим на интервале I максимальную систему Γ рациональных точек с условием

$$\left|\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_k}{q_k}\right| \ge \frac{1}{q_i q_k} \ge Q^{-2} = T^{-1}.$$

Если некоторое рациональное число $\frac{p_\ell}{q_\ell}$ не входит в Γ, то найдется рациональное число $\frac{p_i}{q_i}$ такое, что $\left|\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_k}{q_k}\right| < T^{-1}$. Интервал

$\left|x-\frac{p_i}{q_i}\right|<54T^{-1}$ содержит все числа интервала I, для которых

$\left|x-\frac{p_\ell}{q_\ell}\right|<27T^{-1}$.

Обозначим через t количество рациональных чисел в Γ. По лемме имеем

$$t\cdot 108T^{-1}>\frac{3}{4}|I|,$$

откуда получаем $t>\frac{1}{144}|I|T$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Baker, A.*** Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker and W. Schmidt // Proc. Lond. Math. – 1970 – Soc.21 – P.1–11.
2. ***Bernik, V.I.*** The exact order of approximation zero by values of integer polynomials / V.I. Bernik // Acta Arith. – 1989 – 53/1– P. 17–28.
3. ***Beresnevich, V.V.*** On approximation of real numbers by real algebraic numbers/ V.V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999 – 90/1 – P. 97–112.
4. ***Bugeand, Y.*** Approximation by algebraic numbers/ Y. Bugeand // Cambridge Tracts in Mathematics, 160. Cambridge University Press. Cambridge – 2004. – XVI – P. 274.

Поступила в редакцию 09.12.2013 г.