УДК 511.36

Э. И. КОВАЛЕВСКАЯ, Н. В. САКОВИЧ

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЯРТЛИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть I — отрезок в $\mathbf{R}$, $D>0$; функции $f_i(x)$ — $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемы на I $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и в каждой точке $x \in I$ удовлетворяют неравенствам:

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n+1} |f^{(j)}(x)| \leqslant D, \quad \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |f^{(j)}(x)| \geqslant d > 0.$$

В [1] А. С. Пяртли установил, что для почти всех $x \in I$ («почти все» в смысле меры Лебега в $\mathbf{R}$) неравенство $|a_0 + a_1 f_1(x) + \ldots + a_n f_n(x)| < A^{-v}$, где $A = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i| > 0$, имеет при $v > n^2 + n + 1$ только конечное число решений в целых числах $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Тем самым был получен один из первых метрических результатов о диофантовых приближениях для точек гладких кривых из $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$.

Метрические характеристики играют важную роль в вопросах изучения малых значений последовательностей функций, так как показывают характер аппроксимации нуля «в целом» тогда, когда изучить индивидуальные свойства не удается. В случае поля действительных чисел по этим вопросам имеется обширная литература [2—4]. Случай комплексных чисел изучен гораздо хуже, хотя именно такие вопросы возникают в ряде задач математической физики [5].

До сих пор в приложениях метрические теоремы для аналитических функций $f(z)$, где $z=x+iy$, доказывались отдельно для действительной и мнимой частей аргумента. В данной работе доказана теорема, устанавливающая новую метрическую характеристику приближений точек комплексной кривой в $\mathbf{C}^n=\mathbf{C}\times\ldots\times\mathbf{C}$ векторами с целыми гауссовыми координатами. В дальнейшем используем меру Лебега в $\mathbf{C}$, которая понимается как мера Лебега в $\mathbf{R}^2$. Меру Лебега измеримого множества X будем обозначать через μX.

Теорема. *Пусть* $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ — *аналитические функции в круге* $K_{z_0}(r)$ *с центром в точке* z_0 радиуса $r>0$. *Положим* $\mathbf{a}=(a_0, a_1, \ldots, a_n)\in\mathbf{Z}^{n+1}$, $\mathbf{a}\neq(0)$, $\mathbf{f}(z)=(1,\ f_1(z),\ \ldots,\ f_n(z))$, $F(z)=(\mathbf{a},\ \mathbf{f}(z))$ — *скалярное произведение*, $A=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|$. *Тогда для почти всех* $z\in K_{z_0}(r)$ *неравенство* $|F(z)|<A^{-w}$ *имеет при* $w>2n^2+n-3$ *только конечное число решений в векторах* $\mathbf{a}$.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $\delta>0$, $F(z)=a_0+a_1f_1(z)+\ldots+a_nf_n(z)$, *где* $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ — *аналитические функции в круге* $K_{z_0}(r)$ *с центром в точке* z_0 *радиуса* $r>0$, $a_i\in\mathbf{Z}\ (0\leqslant i\leqslant n)$. *Пусть вронскиан*

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix} f_1'(z)\ldots f_n'(z)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ f_1^{(n)}(z)\ldots f_n^{(n)}(z)\end{vmatrix},\quad |\Delta(z)|>\delta$$

и $\rho=\max\limits_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}\ (\sup\limits_{z\in K_{z_0}(r)}|f_i^{(j)}(z)|)$. *Тогда в каждой точке* $z\in K_{z_0}(r)$ *существует такое* j, $1\leqslant j\leqslant n$, *что* $|F^{(j)}(z)|>c_1(\delta)A$, *где* $c_1(\delta)=\delta/n\rho^{n-1}$, $A=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|>0$.

Доказательство проводится методом от противного, как в лемме 1 из [6].

Лемма 2. *Пусть* $\alpha>0$, $f(z)$ — *аналитическая функция в круге* $K_{z_1}(r)$, $|f(z)|\leqslant M$, $|f^{(n)}(z)|>\alpha$ *для* $z\in K_{z_1}(r)$, $n\geqslant1$. *Пусть* $f(z_1)=0$, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)^{n-1}2^{-nk}$, *число* δ_1 *удовлетворяет условию:* $0<\delta_1<\min(1,\ \alpha(2r)^n/n!\,S_n(M+1))$. *Положим* $\delta=\delta_1 r/2^n$. *Тогда в круге* $K_{z_1}(\delta)$ *существует не более* n *нулей функции* $f(z)$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $f(z_i)=0$ $(1\leqslant i\leqslant n+1)$, $z_i\in K_{z_1}(\delta)$. Так как функция $f(z)$ — аналитическая в круге $K_{z_1}(\delta)$, то в точках $z_i\ (2\leqslant i\leqslant n+1)$ получим

$$0=f'(z_1)(z_i-z_1)+\frac{f''(z_1)}{2!}(z_i-z_1)^2+\ldots+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_1)}{k!}(z_i-z_1)^k.$$

Отсюда для $i=2, \ldots, n+1$ имеем

$$0=f'(z_1)+f''(z_1)(z_i-z_1)/2!+\ldots+\sum_{k=n+1}^{\infty}f^{(k)}(z_1)(z_i-z_1)^{k-1}/k!$$

Вычитая поочередно из равенства для $i=2$ оставшиеся $n-1$ равенств и сокращая полученное j-е равенство на (z_2-z_j) $(3\leqslant j\leqslant n+1)$, получим

$$0=f''(z_1)/2!+f'''(z_1)(z_2-2z_1+z_i)/3!+\ldots+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k\sum_{m=0}^{k-n}(z_2-z_1)^{k-2-m}\times$$
$$\times(z_i-z_1)^m,\ (3\leqslant i\leqslant n+1).$$

Применяя к вновь полученным равенствам вышеизложенные рассуждения $n-3$ раза, учитывая, что при вычитании взаимно уничтожаются старшие слагаемые, не зависящие от z_i, и что старшая степень оставшихся слагаемых равна $k-n$, находим

$$0=f^{(n)}(z_1)/n!+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k\sum_{m=0}^{k-n}(z_2-z_1)^{k-n-m}\sum_{r_1=0}^{m}(z_3-z_1)^{m-r_1}\ldots$$
$$\sum_{r_{n-2}=0}^{r_{n-3}-1}(z_n-z_1)^{r_{n-3}-r_{n-2}-1}(z_{n+1}-z_1)^{r_{n-2}}=f^{(n)}(z_1)/n!+R. \qquad (1)$$

Оценим ряд R, используя неравенства $|z_i-z_1|\leqslant\delta<1$ $(2\leqslant i\leqslant n+1)$ и неравенство Коши для коэффициентов c_k:

$$|R|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}(M+1)r^{-k}\sum_{m=0}^{k-n}\delta^{k-n}\sum_{r_1=0}^{m}\sum_{r_2=0}^{r_1}\ldots\sum_{r_{n-2}=0}^{r_{n-3}-1}1.$$

Положим $k-n=q$. Тогда

$$|R|\leqslant\sum_{q=1}^{\infty}(M+1)r^{-q-n}\sum_{m=0}^{q}\delta^q(q+1)^{n-2}=(M+1)(2r)^{-n}\delta_1\times$$
$$\times\sum_{q=1}^{\infty}\delta_1^{q-1}(q+1)^{n-1}2^{-nq-1}<(M+1)(2r)^{-n}\delta_1\sum_{q=1}^{\infty}(q+1)^{n-1}2^{-nq-1}. \qquad (2)$$

По признаку Даламбера ряд в (2) сходится. В обозначениях леммы его сумма равна S_n. Следовательно, $|R|<(M+1)(2r)^{-n}\delta_1S_n<\alpha/2n!$ Тогда из условия леммы имеем

$$|f^{(n)}(z_1)+Rn!|>\alpha/2. \qquad (3)$$

Но (3) противоречит (1). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть a, r, M, ε — положительные числа, $f(z)$ — аналитическая функция в круге $K_{z_0}(r)$, удовлетворяющая условиям: $|f'(z)|>a$, $|f(z)|\leqslant M$. Пусть $\delta=\min(r/2,\ r^2a/5M)$. Положим $\sigma(f,\ \varepsilon)=\{z\in K_{z_0}(r):|f(z)|<\varepsilon\}$. Тогда $\mu\sigma(f,\ \varepsilon)\leqslant16\pi(\varepsilon a^{-1})^2$, где μ — мера Лебега, упомянутая во введении.*

Доказательство см. в [7, лемма 4].

Лемма 4. *Пусть $\gamma=\gamma(m)$, r, ε, $M=M(m)$ — положительные числа, $f(z)$ — аналитическая функция в $K_{z_0}(r)$, удовлетворяющая условиям: $|f^{(j)}(z)|\leqslant M$ $(0\leqslant j\leqslant n)$, $|f^{(n)}(z)|>\gamma$ для $n\geqslant2$, $|f^{(j)}(z)|$ — монотонная функция при изменении аргумента по любому лучу, выходящему из $\tilde z$, $\tilde z\in K_{z_0}(r)$ $(0\leqslant j\leqslant n)$. Пусть величины $\gamma(m)$ и $M(m)$ имеют одинаковый порядок роста при $m\to\infty$. Положим $\sigma(f,\ \varepsilon)=\{z\in K_{z_0}(r):|f(z)|<\varepsilon\}$.*

Тогда 1) $\mu\sigma(f,\ \varepsilon)<c_1(n,\ r)(\varepsilon\gamma^{-1})^{2/n}$, *если величины $\rho(m)=(\varepsilon^{n-1}\gamma(m))^{1/n}$ и $M(m)$ имеют одинаковый порядок роста при $m\to\infty$;*

2) $\mu\sigma(f,\ \varepsilon)<c_2(n,\ r)(M\varepsilon)^{2/(2n-1)}\gamma^{-4/(2n-1)}$, *если $\rho_1(m)=(M\varepsilon)^{1/(2n-1)}\times\gamma^{(2n-3)/(2n-1)}<M(m)$.*

Здесь $c_1(n, r)$, $c_2(n, r)$ — константы, зависящие только от n, r. Если одновременно выполняются указанные условия для величин $\rho(m)$, $\rho_1(m)$, $M(m)$, то для $\mu\sigma(f, \varepsilon)$ выбираем минимальную верхнюю оценку.

Доказательство. Рассмотрим случай 1). Для него лемма доказана при $n = 1, 2$ [7, леммы 4,5]. Пусть $n \geqslant 3$. Доказательство проведем методом математической индукции. Предположим, что лемма верна для $n - 1$. Множество $\sigma(f, \varepsilon)$ разделим на два подмножества: $\sigma_1 = \{z \in K_{z_0}(r) : |f^{(n-1)} \times \times (z)| > \rho\}$, $\sigma_2 = \{z \in K_{z_0}(r) : |f^{(n-1)}(z)| \leqslant \rho\}$, где $\rho = (\varepsilon\gamma^{n-1})^{1/n}$. По предложению индукции имеем $\mu\sigma_1 < c_1(n = 1, \ r)(\varepsilon\rho^{-1})^{2/(n-1)}$, если величины $(\varepsilon^{n-2}\rho)^{1/(n-1)}$ и M имеют одинаковый порядок роста на ∞. Меру множества σ_2 оценим с помощью леммы 3, поскольку $f^{(n)}(z)$ играет такую же роль для $f^{(n-1)}(z)$, что и $f'(z)$ для $f(z)$. Поэтому в силу указанного свойства монотонности $|f^{(n)}(z)|$ имеем $\mu(\sigma_2 \cap K_{z_0}(\delta_2)) \leqslant 16\pi(\varepsilon\gamma^{-1})^2$, где $z_2 \in K_{z_0}(r)$, $\delta_2 = \min(r/2, \ r^2\gamma/4M)$. Из условия на величины γ и M получаем, что отношение площадей кругов $K_{z_0}(r)$ и $K_{z_2}(\delta_2)$ равно константе, зависящей только от r. Следовательно, $\mu\sigma_2 \leqslant c_2(r)(\varepsilon\gamma^{-1})^2$,

$$\mu\sigma(f, \ \varepsilon) = \mu\sigma_1 + \mu\sigma_2 < c_1(n, \ r)(\varepsilon\gamma^{-1})^{2/n}.$$

В случае 2) сначала докажем теорему для $n = 2$. Снова разделим множество $\sigma(f, \ \varepsilon)$ на два подмножества: $\sigma_3 = \{z \in K_{z_0}(r) \colon |f'(z)| > \rho_1\}$, $\sigma_4 = \{z \in K_{z_0}(r) : |f'(z)| \leqslant \rho_1\}$, где $\rho_1 = (M\varepsilon\gamma)^{1/3}$. Тогда по лемме 3 при $z_1 \in K_{z_0}(r)$, $\delta = \min(r/2, \ r^2\rho_1/4M)$ в силу указанного свойства монотонности $|f(z)|$ получим $\mu(\sigma_3 \cap K_{z_1}(\delta)) \leqslant 16\pi(\varepsilon\rho_1^{-1})^2$. Так как величины ρ_1 и M связаны неравенством $\rho_1 < M$, то, учитывая, что количество N кругов вида $K_{z_1}(\delta)$ в исходном круге $K_{z_0}(r)$ оценивается величиной $N \leqslant c_3(r)M^2\rho_1^{-2}$, получим

$$\mu\sigma_3 \leqslant c_4(r)(\varepsilon\rho_1^{-1})^2\rho_1^{-2}M^2 = c_4(r)(M\varepsilon)^2\rho^{-4}.$$

Меру множества σ_4 оценим с помощью леммы 3, когда $f''(z)$ играет такую же роль для $f'(z)$, что и $f'(z)$ для $f(z)$. Тогда в силу указанного свойства монотонности $|f'(z)|$ получим $\mu(\sigma_4 \cap K_{z_2}(\delta_2)) \leqslant 16\pi(\rho_1\gamma^{-1})^2$, если $z_2 \in K_{z_0}(r)$, $\delta_2 = \min(r/2, \ r^2\gamma/4M)$. Из условия на величины γ и M, как выше в случае 1) для множества σ_2, получим $\mu\sigma_4 \leqslant c_5(r)(\rho_1\gamma^{-1})^2$. Таким образом,

$$\mu\sigma(f, \ \varepsilon) = \mu\sigma_3 + \mu\sigma_4 < c_6(r)(M\varepsilon)^{2/3}\gamma^{-4/3}.$$

Далее рассуждаем по индукции. Пусть лемма верна для $n = 1$. Множество $\sigma(f, \ \varepsilon)$ разделим на два множества: $\sigma_5 = \{z \in K_{z_0}/r) : |f^{(n-1)}(z)| > \rho_1\}$, $\sigma_6 = \{z \in K_{z_0}(r) : |f^{(n-1)}(z)| \leqslant \rho_1\}$, где $\rho_1 = (M\varepsilon)^{1/(2n-1)} \cdot \gamma^{(2n-3)/(2n-1)}$. Тогда по индуктивному предположению имеем

$$\mu\sigma_5 \leqslant c_2(n - 1, \ r)(M\varepsilon)^{2/(2n-3)}\rho^{-4/(2n-3)}.$$

Меру σ_6 оцениваем аналогично мере σ_4 в случае $n = 2$ т. е. $\mu\sigma_6 \leqslant c_5(r) \times \times (\rho_1\gamma^{-1})^2$. Следовательно, $\mu\sigma(f, \ \varepsilon) = \mu\sigma_6 + \mu\sigma_5 < c_2(n, \ r)(M\varepsilon)^{2/(2n-1)} \times \rho^{-4/(2n-1)}$. Лемма доказана.

Лемма 5. (Бореля—Кантелли). *Если A_n $(n=0, 1, \ldots)$ — бесконечная последовательность измеримых множеств и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu A_n$ сходится, то мера тех x, которые попадают в бесконечно многие множества A_n, равна нулю.*

Доказательство теоремы. Рассмотрим определитель $\Delta(z)$, введенный в лемме 1. Так как функции $f_i(z)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — аналитические в $K_{z_0}(r)$, то $\Delta(z)$ — аналитическая функция в $K_{z_0}(r)$. Из свойства, что аналитическая функция обращается в нуль лишь на счетном множестве точек z, лежащих в области ее аналитичности, получаем: $|\Delta(z)| \neq 0$ почти всюду в $K_{z_0}(r)$. В силу метрических соображений, как в [2, с. 85—87], замечаем, что теорему достаточно доказать для $z = x + iy \in K_0(1)$ и считать, что $|\Delta(z)| > \varepsilon$ для $z \in K_0(1)$, где $\varepsilon > 0$ как угодно мало.

Положим

$$F(z) = a_0 + a_1 f_1(z) + \dots + a_n f_n(z). \tag{4}$$

При фиксированном A рассмотрим одну из функций $F(z)$. Пусть множество $\sigma(F)$ — множество тех $z \in K_0(1)$, для которых при взятой функции F выполняется

$$|F(z)| < A^{-w}. \tag{5}$$

Найдем $\mu\sigma(F)$. Возьмем $z_1 \in \sigma(F)$. По лемме 1 существует $j\,(1 \leqslant j \leqslant n)$, что выполняется неравенство $|F^{(j)}(z_1)| > c_1(\varepsilon, \mathbf{f})\,A$. Далее применяем леммы 3, 4, 2. Проверим условия леммы 4. Имеем

$$\gamma(A) = c_1(\varepsilon, \mathbf{f})\,A,\ M(A) = A,\ \rho(A) = c_2(\varepsilon, \mathbf{f}) \times$$
$$\times A^{(1-w(j-1))/j},\ \rho_1(A) = c_1(\varepsilon, \mathbf{f})\,A^{1-(w+1)/(2j-1)},\ w > 1.$$

Ясно, что для $j \geqslant 2$ выполняются условия случая 2). Следовательно, имеем

$$\mu\sigma(F) < c_2(j, r)\,(A^{1-w})^{2/(2j-1)}\,(c_1(\varepsilon, \mathbf{f})\,A)^{-4/(2j-1)} =$$
$$= c_3(j, r, \varepsilon, \mathbf{f})\,A^{-(w+2)/(2j-1)} \text{ для } j \geqslant 2,$$
$$\mu\sigma(F) < c_4(r)\,A^{-2(w-1)} \text{ для } j = 1.$$

Наихудшая оценка получается при $j = n$. Поэтому $\mu\sigma(F) < nc_5(n, \varepsilon, r, \mathbf{f})\,A^{-(w+2)/(2n-1)}$, где $c_5(n, \varepsilon, r, \mathbf{f}) = \max\limits_{2 \leqslant j \leqslant n}(c_3(j, \varepsilon, r, \mathbf{f}, c_4(r))$. Поскольку при фиксированном A число функций $F(z)$ вида (4), удовлетворяющих (5), не более чем $(A+1)^n$, то суммарная мера всех $\mu\sigma(F)$ не превосходит

$$c_6(n, \varepsilon, r, \mathbf{f}) \sum_{A=1}^{\infty} A^{n-(w+2)/(2n-1)}.$$

Так как полученный ряд сходится при $w > 2n^2 + n - 3$, то лемма Бореля—Кантелли завершает доказательство теоремы.

Авторы выражают искреннюю благодарность проф. В. И. Бернику за постановку задачи и обсуждение.

Summary

New metric characteristic for the approximations of the points on the smooth curve in $\mathbf{C}^n$ by the vectors with the integer Gauss'es coordinates is received.

Литература

1. Пяртли А. С. // Функц. анализ и его приложение. 1969. Т. 3, вып. 4. С. 59—62.
2. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М., 1977.
3. Берник В. И. // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33, № 8. С. 681—683.
4. Baker A. Transcendental Number Theory. Camb. Univ. Press, 1975.
5. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984.
6. Ковалевская Э. И. Экстремальные многообразия размерности 3 в R^6. Минск, 1989 (Препринт / АН БССР. Ин-т математики; № 27 (377)).
7. Ковалевская Э. И. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1991. № 6. С. 11—16.

Институт математики АН Беларуси,
Белорусский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 22.03.93