УДК 511.36

В. И. БЕРНИК, Н. В. САКОВИЧ

РЕГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Счетное множество Γ чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, произвольной природы (вещественных, комплексных, p-адических) вместе с положительной функцией N на Γ называется регулярной системой (Γ, N), если для любого (интервала, круга, элементарного цилиндра) G существует положительное число $K=K(G)$ такое, что для любого $T>K$ найдутся элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ из Γ, что при $j\neq k$, $1\leqslant j$, $k\leqslant t$, выполняются условия

$$\gamma_j \in G,\ N(\gamma_j)\leqslant T, \quad |\gamma_j-\gamma_k|\geqslant T^{-1},\ t>c_1\mu G T^s, \tag{1}$$

где $c_1=c_1(\Gamma, N)$, μG — мера G и $s=1$ для вещественных и p-адических чисел и $s=2$ для комплексных чисел.

Множество вещественных алгебраических чисел образует регулярную систему, что доказали А. Бэйкер и В. Шмидт [4]. Это позволило им получить точное значение размерности Хаусдорфа множества вещественных чисел, допускающих заданный порядок аппроксимации алгебраическими числами, и точную оценку снизу для размерности Хаусдорфа множества вещественных чисел, в которых значения многочленов с заданным порядком приближают нуль. Оценка сверху, совпадающая с оценкой снизу в этой задаче, была получена в [1]. В данной работе мы получаем обобщение этих двух результатов на множество комплексных чисел. Обозначим через $K_n(v)$ и $M_n(w)$ множество комплексных чисел, для которых неравенства

$$|z-\alpha|<H(\alpha)^{-v-1} \tag{2}$$

и

$$|P(z)|<H(P)^{-w} \tag{3}$$

имеют бесконечное число решений в алгебраических числах α, $\deg\alpha\leqslant n$ и целочисленных полиномах

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0 \tag{4}$$

соответственно. Здесь $H(P)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|$ и $H(\alpha)$ — высоты полинома $P(z)$ и алгебраического числа α.

Теорема 1. *При* $v>\dfrac{n-1}{2}$ *имеем*

$$\dim K_n(v)=\frac{n+1}{v+1}.$$

Теорема 2. *При* $\frac{n-1}{2} < w \leqslant 4n+3$ *имеем*

$$\dim M_n(w) = \frac{n+1}{w+1}.$$

Заметим, что теорема 1 является полным аналогом теоремы А. Бэйкера и В. Шмидта [4], а теорема 2 слабее своего вещественного аналога [1], поскольку точный результат получается только в ограниченном диапазоне для w.

Приведем доказательства теорем 1 и 2. Прежде всего заметим, что оценка сверху в теореме 1 тривиальна, оценка снизу для $\dim M_n(w)$ следует из оценки снизу для $\dim K_n(v)$.

Доказательство неравенства $\dim K_n(v) \geqslant \frac{n+1}{v+1}$ основано на трех леммах.

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon_1 > 0$ *и* T — *конечное объединение кругов и* $S_T(H)$ — *множество* $\xi \in T$, *для которых существуют алгебраические числа* α, $\deg \alpha \leqslant n$, $H(\alpha) \leqslant H$ *с условием* $|\xi - \alpha| < \psi(\alpha)^{-\frac{n+1}{2}+\frac{n}{2}\varepsilon_1}$. *Тогда* $\mu S_T(H) \to \mu T$.

Доказательство. Пусть ξ — любое трансцендентное число, принадлежащее $T \backslash S_T(H)$. По теореме Минковского о линейных формах [2] существует полином $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ с целыми коэффициентами степени не более n такой, что

$$|P(\xi)| \ll H^{-\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2}\varepsilon_1}, \quad |P'(\xi)| \leqslant H, \quad |a_i| < H^{1-\varepsilon_1}, \quad i = 3, \ldots, n. \tag{5}$$

Возможны случаи

1) $|P'(\xi)| < H^{1-\varepsilon_1}$, тогда $|a_2| < H^{1-\varepsilon_1}$ и $|a_1| < H^{1-\varepsilon_1}$, и, следовательно, $|H(P)| < H^{1-\varepsilon_1}$. Тогда неравенство (5) можно переписать в виде

$$|P(\xi)| < H^{\frac{(1-\varepsilon_1)\left(-\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2}\varepsilon_1\right)}{1-\varepsilon_1}} < H(P)^{\frac{-\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2}\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}} = \tag{6}$$

$$= H(P)^{-\frac{n-1}{2}-\frac{\varepsilon_1}{2}}.$$

Неравенство (6) по теореме Спринджука [1] имеет бесконечное число решений только для множества нулевой меры, и потому ξ принадлежит множеству, мера которого стремится к нулю при $H \to \infty$.

2) Осталось предположить, что $|P'(\xi)| \gg H^{1-\varepsilon_1}$. Перепишем (4) в виде $P(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)$ и считаем далее, что α_1 — ближайший к ξ корень $P(z)$. Тогда

$$P'(z) = a_n((z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n) + (z-\alpha_1)(z-\alpha_3)\ldots$$
$$\ldots(z-\alpha_n) + \ldots + (z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{n-1})),$$

откуда получаем

$$\left|\frac{P'(\xi)}{P(\xi)}\right| = \left|\frac{1}{\xi-\alpha_1} + \frac{1}{\xi-\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\xi-\alpha_n}\right| \leqslant \frac{n}{|\xi-\alpha_1|},$$

$$|\xi - \alpha_1| \leqslant n\frac{|P(\xi)|}{|P'(\xi)|} < nH^{-\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2}\varepsilon_1-(1-\varepsilon_1)} = nH^{-\frac{n+1}{2}+\frac{n}{2}\varepsilon_1},$$

т. е. $\xi \in S_T(H)$, что противоречит предположению, сделанному вначале. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\psi(z) = z^{-1/2+\varepsilon_1 \frac{n}{2(n+1)}}$. *Тогда множество алгебраических чисел* α *с функцией* $N(\alpha) = \psi(H(\alpha))^{-n-1}$ *образует регулярную систему.*

Доказательство. По лемме 1 при достаточно большом H имеем $\mu S_T(H) \geqslant 0{,}5\mu T$. Пусть $K = K_T$ — достаточно большое число и $G = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$ — максимальная система элементов из G с условием $H(\gamma) < H$, $N(\gamma_i) = \psi(H(\gamma))^{-n-1} = K$, $|\gamma_i - \gamma_j| > K^{-1}$. Для любого алгебраического числа α, не входящего в максимальную систему, существует алгебраическое число γ_i из G такое, что

$$|\alpha - \gamma_i| \leqslant K^{-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant t.$$

Все алгебраические числа могут приблизить с точностью до $\psi(H)^{n+1}$ только комплексные числа, находящиеся в круге с центром в одном из алгебраических чисел из G и радиусом $2\psi(H)^{n+1}$. Значит,

$$t 4\pi \psi(H)^{2(n+1)} > 0{,}5\mu C,$$

откуда

$$t > \frac{1}{8\pi} \psi(H)^{-2(n-1)} \mu C = \frac{1}{8\pi} \mu C K^2.$$

Регулярная система построена.

Для любой регулярной системы (Γ, N) и любой положительнозначной функции $f(x)$, определенной для $x > 0$, будем обозначать через (Γ, N, f) множество комплексных ξ, для которых существует бесконечно много $\gamma \in \Gamma$ таких, что

$$|\xi - \gamma| < f(N^2(\gamma)).$$

Лемма 3. *Пусть* $f(x)$, $g(x)$ — *действительные функции, определенные для* $x > 0$, *такие, что* $f(x)$ *убывает и* $f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$ *для больших* x, $g(x)$ *и* $\frac{x}{g(x)}$ *возрастают и стремятся к* 0 *при* $x \to 0$, $xg(1/2f(x)) \to \infty$ *при* $x \to \infty$. *Тогда для любой регулярной системы множество* (Γ, N, f) *нельзя покрыть счетным множеством кругов* C_j, $j = 1, 2, \ldots$ *так, чтобы для любых* $\lambda > 0$, $\delta > 0$ *выполнялись условия* $\mu C_j \leqslant \lambda$, $\sum_{j=1}^{\infty} g \mu C_j < \delta$.

Доказательство леммы 3 может быть проведено с использованием идеи работы [1, лемма 5].

Теперь несложно получить оценку снизу $\dim K_n(v)$. Положим $f(x) = x^{-\sigma}$, $g(x) = x^{\rho}$, $0 < \rho < \sigma^{-1} < 1$. Тогда неравенство (2) можно переписать в виде

$$|z - \alpha| < H(\alpha)^{-v-1} = H(\alpha)^{(n+1+\varepsilon_1 n) \frac{-v-1}{n+1+\varepsilon_1 n}},$$

откуда по лемме 3 получаем, что $\dim K_n(v) \geqslant \frac{n+1+\varepsilon_1 n}{v+1}$ при любом ε_1.

Ввиду произвольности ε_1 заключаем $\dim K_n(v) \geqslant \frac{n+1}{v+1}$.

Оценка сверху $\dim M_n(w)$, как и в случае вещественных чисел, вначале получается для многочленов второй степени, в случае достаточно большой первой производной и для классов второго рода [3]. В том случае, когда производная принимает промежуточные значения, предположение о большом числе таких многочленов приводит к редукции, к некоторому множеству полиномов меньшей степени. Существование хотя бы двух полиномов без общих корней среди этого множества приводит к противоречию. Если же полиномов без общих корней не оказывается, то из некоторого их подмножества $t_1(z), \ldots, t_k(z)$ выделяется общий множитель $d(z)$, и уже среди полиномов $t_1(z)d^{-1}(z), \ldots, t_k(z)d^{-1}(z)$ снова оказываются хотя бы два без общих корней. Применение индукции, а также лемм о высоте и степени, размеров круга, а также порядка малости двух полиномов на этом круге [1] приводит при $w \leqslant 4n+3$ к противоречивым системам неравенств. Возможно, развитие этого метода позволит получить теорему 2 и без ограничения $w \leqslant 4n+3$.

Summary

The exact value of the Hausdorff dimension of a set of complex numbers with the given transcendence measure is obtained.

Литература

1. Берник В. И., Мельничук Ю. В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. Минск. 1988. 2. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М., 1961. 3. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967. 4. Baker A., Schmidt W. // Proc. London Math. 1970. Vol. 21. P. 1—11.

Институт математики АН Беларуси,
Белорусский государственный
педагогический университет

Поступило 23.02.94