МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Могилевский государственный университет им. А.А.Кулешова

Борбат В.Н., Сазонова А.М., Сакович Н.В.,
Чеботаревский Б.Д.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Могилев 1999

УДК 511+512+513(075.8)
М 54

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, доцент **Морозов Н.П.**

Под общей редакцией
профессора, доктора педагогических наук **Радькова А.М.**

Методические указания для подготовки к государственному
М 54 экзамену по алгебре и геометрии / В.Н. Борбат, А.М. Сазонова, Н.В. Сакович и др. – Изд-во Могилевского гос. ун-та им. А.А. Кулешова, 1999. – 18 с.

Пособие предназначено для помощи студентам при подготовке к государственному экзамену по алгебре и теории чисел и по геометрии. В пособии приведен план ответа на каждый из вопросов, указана литература, рекомендованная для подготовки этого вопроса.

Программа государственного экзамена по алгебре и теории чисел и по геометрии разбита на двадцать пять вопросов. Ниже приводится план ответа на каждый вопрос с указанием страниц рекомендованной для прочтения литературы.

Общие рекомендации:

Ответ на вопрос должен быть логичным, связным, надо последовательно формулировать определения, приводить примеры, формулировать теоремы и следствия из них, указывать их применение. Ответ на вопрос должен включать доказательство хотя бы одного из предложений.

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности и разбиение множества на классы. Фактор-множество

Определение бинарного отношения как тройки множеств, формулировка наиболее важных типов бинарных отношений: (рефлексивные, антирефлексивные, симметричные, антисимметричные, транзитивные, связные), пример отношения каждого типа. Отношение эквивалентности и теорема о разбиении множества на классы отношением эквивалентности. Фактор-множество, примеры фактор-множеств по отношению эквивалентности.

[4, с. 17 – 22]; [12, с. 11 – 15]; [1, с. 65 – 69]; [2, с.365 – 368]; [10, с. 28 – 35]; [11, с. 20 – 30].

2. Система натуральных чисел. Принцип математической индукции

Система аксиом Пеано натурального ряда. Принцип полной математической индукции (доказать, опираясь на аксиому индукции). Пример индукционного доказательства. Принцип наименьшего натурального числа и особенности индукционного доказательства, опирающегося на этот принцип. Модификации принципа математической индукции.

[4, с. 40, 41]; [2, с. 15 – 18]; [1, с. 119 – 122]; [12, с. 20 – 21, 28 – 33]; [10, с. 35 – 39]; [11, с. 30 – 36].

3. Следствие системы линейных уравнений. Равносильные системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных

Система линейных уравнений. Определение решения системы. Определение следствия системы, определение равносильных систем. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Теорема о равносильности систем, получающихся одна из другой элементарными преобразованиями.

Лемма о линейном уравнении, не имеющем решений. Лемма о тождественном уравнении. Решение систем линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). Окончательный вид системы, главные и свободные неизвестные, количество решений.

[4, с.43 – 49]; [12, с. 27 – 31]; [1, с.185 – 188, 206 – 208]; [3, с.7 – 15]; [10, с. 44 – 51]; [11, с. 56 – 68].

4. Критерий совместности системы линейных уравнений

Основная матрица системы линейных уравнений, ее расширенная матрица, их ранги. Теорема Кронекера-Капелли. Геометрическое истолкование систем от двух и трех неизвестных при различных значениях рангов основной и расширенной матриц системы.

[4, с. 93 – 95, 111 – 113]; [12, с. 37 – 39]; [1, с. 191 – 193]; [3, 35 – 38]; [10, с. 66 – 70]; [11, с. 79 – 90].

5. Векторное пространство. Примеры и простейшие свойства векторных пространств. Подпространства векторного пространства

Примеры векторных пространств. Простейшие свойства векторных пространств: умножение на нуль и на нулевой вектор, правило знаков при умножении, обобщенные дистрибутивные законы умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов и относительно сложения скаляров.

Определение подпространства, примеры подпространств. Достаточные условия подпространства. Линейная оболочка системы векторов есть подпространство. Множество всех решений системы линейных однородных уравнений есть подпространство арифметического векторного пространства.

[5, с. 72 – 76, 91, 92, 96 – 100]; [12, с. 55 – 60]; [1, с. 245 – 247; 250 – 254]; [3, с. 128 – 131, 140 – 143]; [10, с. 131 – 135]; [11, с.133 – 143].

6. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис и ранг конечной системы векторов.

Определение линейно зависимой и линейно независимой систем векторов. Связь линейной зависимости системы векторов с линейной зависимостью ее подсистемы. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости. Основная теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающейся через систему с меньшим числом векторов.

Определение базиса системы векторов. Определение эквивалентных систем векторов. Равномощность всех базисов одной и той же системы векторов, ранг системы векторов.

[4, с. 76 – 81]; [5, с. 77, 78]; [12, с. 31 – 37]; [1, с. 247, 176 – 184]; [3, с. 22 – 27].

7. Базис и размерность конечномерного векторного пространства. Изоморфизм векторных пространств

Определение базиса конечномерного векторного пространства. Доказательство равномощности всех базисов, опирающееся на основную теорему о линейной зависимости. Размерность векторного пространства. Определение изоморфизма векторных пространств. Изоморфизм векторного пространства и арифметического пространства над одним и тем же полем при одинаковой размерности. Необходимое и достаточное условие изоморфизма двух векторных пространств над одним и тем же полем.

[5, с. 79 – 86]; [12, с. 55 – 60]; [1, с. 256 – 258, 260]; [10, с. 135 – 139]; [11, с. 133 – 143].

8. Группа. Примеры групп. Простейшие свойства групп. Подгруппы

Нейтральный элемент и симметричные элементы бинарной операции. Определение группы. Примеры групп. Сокращение в группе. Разрешимость уравнений

$$ax=в \text{ и } ya = в$$

в группе. Полугруппа, в которой уравнения $ax = в$ и $ya = в$ имеют хотя бы по одному решению, является группой. Определение подгруппы, примеры подгрупп.

[5, с. 15 – 24]; [6, с. 112 – 122]; [12, с. 18 – 24, 52 – 55]; [1, с. 94 – 98, 100, 101]; [2, с. 344 – 350]; [10, с.36 – 47]; [11, с. 124 – 133].

9. Изоморфизм и гомоморфизм групп

Определение гомоморфизма групп и изоморфизма как частного случая гомоморфизма. Примеры. Теорема об алгебре, являющейся гомоморфным образом группы. Инвариантная подгруппа, фактор – группа, естественный гомоморфизм. Ядро гомоморфизма является инвариантной подгруппой. Теорема об изоморфизме гомоморфного образа группы и фактор – группы по ядру гомоморфизма.

[5, с. 26, 27, 43 – 49]; [12, с. 18 – 24, 52 – 55]; [1, с. 98, 99]; [2, с. 358 – 362]; [10, с. 36 – 47, 110 – 115]; [11], с. 124 – 133].

10. Поле. Простейшие свойства поля. Поле рациональных чисел. Упорядоченное поле. Система действительных чисел

Определение поля. Примеры полей. Простейшие свойства поля. Характеристика поля. Определение поля рациональных чисел. Поле рациональных чисел как минимальное поле нулевой характеристики. Упорядоченное поле. Архимедовская упорядоченность. Полнота поля. Неполнота поля рациональных чисел. Определение поля действительных чисел. Модели поля действительных чисел.

[5, с. 50 – 64]; [12, с. 18 – 24]; [1, с. 146 – 154]; [10, с. 115 – 119]; [11, с. 40, 41].

11. Поле комплексных чисел. Числовое поле. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними. Тригонометрическая форма комплексного числа

Определение поля комплексных чисел. Построение модели поля комплексных чисел как алгебры пар действительных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Числовые поля – подполя поля комплексных чисел. Минимальное числовое поле.

Изображение комплексных чисел на плоскости, модуль и аргумент комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Корни из единицы. Связь корней из произвольного числа с корнями из единицы. Геометрическое истолкование сложения, вычитания, умножения, деления комплексных чисел. Геометрическая картина извлечения корня из единицы.

[5, с. 65 – 71]; [7, с. 105 – 113]; [12, с. 24 – 27]; [1, с. 157 – 171]; [2, с. 282 – 310]; [10, с. 119 – 122]; [11, с. 47 – 56].

12. Кольцо целых чисел. Теорема о делении с остатком

Определение кольца целых чисел. Краткое описание построения модели кольца целых чисел как множества классов пар натуральных чисел. Разъяснение таких свойств кольца целых чисел как расположенность, архимедовская расположенность, дискретность. Отношение делимости в кольце целых чисел, его некоторые свойства. Теорема о делении с остатком. Примеры.

[6, с. 5 – 7]; [12, с. 72 – 76]; [1, с. 139 – 144]; [2, с. 68 – 84]; [10, с. 195 – 198]; [11, с. 179 – 188].

13. НОД и НОК двух чисел

Определение НОД. Применение теоремы о делении с остатком для нахождения пары меньших чисел с тем же НОД. Алгоритм Евклида и вычисление НОД двух чисел. Свойства НОД. Определение НОК. Свойства НОК двух чисел. Примеры. Связь НОД и НОК двух чисел.

[6, с. 8 – 13, 17 – 19]; [12, с. 72 – 76]; [1, с. 372 – 380]; [2, с. 109 – 119]; [10, с. 198 – 201]; [11] с. 179 – 188].

14. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Каноническое разложение составного числа и его единственность

Определение простого числа, составного числа. Теорема о минимальном простом делителе натурального числа. Теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. Решето Эратосфена. Пример доказательства простоты конкретного числа. Свойства делимости на простое число. Доказательство существования разложения на простые множители с помощью теоремы о минимальном простом делителе, доказательство единственности разложения. Каноническое разложение. Необходимое и достаточное условие делимости одного числа на другое. Вычисление НОД и НОК методом разложения на множители.

[6, с. 20 – 25]; [12, с. 72 – 76]; [1, с. 365 – 367, 369 – 371]; [2, с. 124 – 127, 130, 131]; [10, с. 201 – 204]; [11, с. 179 – 188].

15. Основные свойства сравнений. Полная и приведенная системы вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма

Определение сравнения по модулю, свойства сравнений, эквивалентные определению. Классы вычетов по модулю, как классы эквивалентности. Основные свойства сравнений (почленное сложение и умножение сравнений, следствия и др.). Кольцо классов вычетов по модулю.

Определение полной системы вычетов, признак полной системы вычетов. Теорема о преобразовании полной системы вычетов с помощью линейной функции. Приведенная система вычетов, ее признак. Теорема о преобразовании приведенной системы вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма.

[6, с. 124 – 131, 135, 142]; [12, 79 – 82]; [1, с. 399 – 403]; [8, с. 36 – 60]; [10, с. 212, 215 – 218]; [11, с. 179 – 188, 194 – 285].

16. Линейные сравнения с одним неизвестным

Сравнение с неизвестным, его степень и множество решений. Условие разрешимости и число решений сравнений первой степени. Методы решения: с помощью преобразования коэффициентов и сокращения, с помощью теоремы Эйлера, с помощью цепных дробей. Целочисленные решения линейных уравнений с двумя неизвестными.

[6, с. 145 – 148, 152 – 157]; [12, с. 79 – 82]; [1, с. 409, 410]; [8, с. 64 – 68]; [10, с. 218 – 221]; [11, с. 194 – 285].

17. Приложение теории сравнений к выводу признаков делимости

Признак делимости как алгоритм, его зависимость от системы счисления. Признак делимости по Паскалю, частные случаи признака делимости в десятичной системе счисления (на 2, 3, 5, 9, 11). Общий признак делимости, связанный с порядком 10 по модулю, его частные случаи. Например, признак делимости на 37. Проверка арифметических операций с помощью сравнений. Признаки делимости в недесятичных системах на примерах.

[6, с. 185 – 191]; [12, с. 79 – 82]; [1, с. 185 – 192]; [8, с. 147 – 150]; [10, с. 227 – 230]; [11, с. 202 – 214].

18. Обращение обыкновенной дроби в десятичную и определение длины периода десятичной дроби

Десятичная дробь и ее символическая запись. Необходимое и достаточное условие обращения обыкновенной дроби в конечную десятичную. Обращение обыкновенной дроби в чистую периодическую десятичную и вычисление длины периода. Обращение обыкновенной дроби в смешанную десятичную, вычисление длины предпериода. Обращение десятичной периодической дроби в обыкновенную. Обращение обыкновенной дроби в систематическую в произвольной позиционной системе счисления на примерах.

[6, с. 174 – 184]; [12, с. 79 – 82]; [1, с. 421 – 428]; [8, с. 147 – 158]; [9, с. 206 – 209]; [10, с. 227 – 230]; [11, с. 202 – 214].

19. Кольцо. Примеры колец. Простейшие свойства кольца. Подкольцо. Примеры

Определение кольца как алгебры с двумя бинарными операциями, примеры. Простейшие свойства кольца: умножение на нуль, дистрибутивность умножения относительно вычитания, правило знаков при умножении. Примеры. Определение подкольца. Критерий подкольца. Идеал как частный случай подкольца. Факторкольцо по идеалу.

[6, с. 64 – 72, 86]; [12, с. 86 – 89]; [1, с. 104 – 106, 109 – 111]; [10, с. 110 – 115]; [11, с. 214 – 220].

20. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец.

Определение гомоморфизма колец. Изоморфизм как частный случай гомоморфизма. Примеры. Теорема о гомоморфном образе кольца. Ядро гомоморфизма как идеал кольца. Фактор-кольцо. Теорема об изоморфизме гомоморфного образа кольца и факторкольца по ядру гомоморфизма.

[6, с. 97 – 100, 103 – 104]; [12, с. 86 – 89]; [1, с. 108 – 110]; [10, с. 110 – 115]; [11, с. 214 – 220].

21. Полиномы над полем. Наибольший общий делитель двух полиномов и алгоритм Евклида

Возможны два метода изложения этого вопроса: 1) Изложение, использующее однозначность разложения на простые элементы в евклидовых кольцах. 2) Изложение, не использующее понятие евклидова кольца.

Изл.1. Определение полинома от одного неизвестного. Определение сложения и умножения полиномов. Кольцо полиномов над полем есть область целостности. Теорема о делении с остатком. Кольцо полиномов над полем – евклидово кольцо. Переформулировка свойства евклидовых колец на язык полиномов. НОД двух полиномов. Алгоритм Евклида и вычисление НОД.

Изл. 2. Отличие от изложения 1 после теоремы о делении с остатком. Определение делимости и ее простейшие свойства (делители единицы, ассоциированность, транзитивность делимости, делимость линейной комбинации). Определение НОД и его вычисление с помощью алгоритма Евклида (как последний, не равный нулю остаток). Выражение НОД через многочлены и свойства делимости на неприводимый многочлен. Кольцо многочленов над полем есть область однозначного разложения.

[7, с. 33 – 44, 48]; [12, с. 89 – 93]; [1, с. 469 – 473]; [10, с. 234 – 241]; [11, с. 220 – 235].

22. Разложение полинома в произведение неприводимых множителей и его единственность

Индуктивное определение полинома от нескольких переменных. Кольцо полиномов над областью целостности есть область целостности. Лемма Гаусса о примитивных полиномах от одной неизвестной. Факториальность кольца полиномов от одной неизвестной над факториальным кольцом. Факториальность кольца полиномов от нескольких переменных над полем (индукция по числу переменных).

[7, с. 64 – 68, 72, 78, 81]; [12, с. 89 – 93]; [1, с. 485 – 488, 492]; [10, с. 252 – 257]; [11, с. 220 – 235].

23. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел

Определение алгебраически замкнутого поля, пример алгебраически незамкнутого поля. Истолкование модуля многочлена над полем комплексных чисел как неотрицательной функции двух действительных переменных, геометрическая картина. Лемма о существовании круга с центром в начале координат, вне которого модуль многочлена превосходит модуль свободного члена. Лемма о существовании точки комплексной плоскости, где модуль многочлена достигает минимума. Лемма Даламбера. Доказательство существования корня. Разложение многочлена на линейные множители над полем комплексных чисел.

[7, с. 176 – 191]; [12, с. 95 – 97]; [1, с. 505 – 512]; [3, с. 291 – 296]; [10, с. 262 – 266]; [11, с.245 – 253].

24. Сопряженность мнимых корней полинома с действительными коэффициентами. Неприводимые над полем действительных чисел полиномы

Сопряженность значений рационального выражения при Сопряженных соответствующих значениях входящих букв. Сопряженность мнимых корней полинома с действительными коэффициентами. Два вида неприводимых над полем действительных чисел многочленов.

[7, с. 122 – 124]; [12, с. 95 – 97]; [1, с. 513, 514]; [3, с. 347 – 349]; [10, с. 262 – 265]; [11, с. 245 – 253].

25. Строение простого алгебраического расширения поля. Освобождение от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби

Определение алгебраического числа, трансцендентные числа. Минимальный многочлен алгебраического числа. Простое расширение поля как минимальное поле, содержащее расширяемое поле и расширяющее число, строение элементов расширения. Кольцо К[α] целых рациональных выражений. Теорема о том, что кольцо есть поле в случае расширения с помощью алгебраического числа. Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби. Пример.

[7, с. 143, 146 – 150]; [12, с. 98 – 100]; [1, с. 528 – 532]; [10, с. 288 – 292]; [11, с. 261 – 272].

Литература:

1. *Л.Я. Куликов.* Алгебра и теория чисел. – М., 1979.
2. *Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев.* Алгебра и теория чисел, ч.1. – М., 1974.
3. *Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев.* Алгебра и теория чисел, ч.2. – М., 1978.
4. *Ф.Л. Варпаховский, А.С. Солодовников.* Алгебра. – М., 1974.
5. *Ф.Л. Варпаховский, А.С. Солодовников, И.В. Стеллецкий.* Алгебра. – М., 1978.
6. Алгебра и теория чисел, ч.3 / Под ред. *Н.Я. Виленкина.* – М., 1974.
7. *Э.Б. Винберг.* Алгебра многочленов. – М., 1980.
8. Ш.Х. Михелович. Теория чисел. – М., 1967.
9. *А.Л. Бухштаб.* Теория чисел. – М., 1966.
10. *М.П. Лельчук, И.И. Полевченко, А.М. Радьков, Б.Д. Чеботаревский.* Практические занятия по алгебре и теории чисел. – Мн., 1986.
11. *А.М. Радьков, Б.Д. Чеботаревский.* Алгебра и теория чисел. – Мн., 1992.
12. *А.М. Радзькоў, Б.Дз. Чабатарэўскі.* Алгебра і тэорыя лікаў: Асноўныя паняцці. – Мн.: НМЦэнтр, 1996. – 104 с.

ГЕОМЕТРИЯ

1. Скалярное произведение векторов в трехмерном евклидовом пространстве E_3. Приложение к решению задач

Пусть E_3 – трехмерное евклидово пространство.

1. Дать определение скалярного произведения векторов, длины вектора, угла, между векторами в пространстве.
2. Сформулировать свойства скалярного произведения (коммутативность, дистрибутивность скалярного умножения относительно сложения векторов и т.д.). Доказать одно из них.
3. Указать выражение скалярного произведения векторов, длины вектора, косинуса угла между векторами через координаты сомножителей в ортонормированном базисе.
4. Дать приложение скалярного произведения к решению задач.

[1, с. 25 – 28]; [3, с. 29 – 31]; [7, с. 118 – 121].

2. Векторное произведение векторов в трехмерном евклидовом пространстве E_3. Приложение к решению задач

Пусть E_3 – трехмерное ориентированное евклидово пространство.

1. Дать определение векторного произведения векторов.
2. Сформулировать и доказать свойства векторного произведения.
3. Указать выражение векторного произведения через координаты сомножителей в ортонормированном базисе.
4. Дать приложение векторного произведения к решению задач.

[1, с. 166 – 170]; [3, с. 70 – 72].

3. Смешанное произведение векторов в трехмерном евклидовом пространстве E_3. Приложение к решению задач

Пусть E_3 – трехмерное ориентированное евклидово пространство.

1. Дать определение смешанного произведения векторов.
2. Сформулировать и доказать свойства смешанного произведения.
3. Указать выражение смешанного произведения через координаты сомножителей в ортонормированиом базисе.
4. Дать приложение смешанного произведения к решению задач.

[1, с. 163 – 166]; [3, с. 72 – 73].

4. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве E_3

Пусть в некоторой системе координат пространства E_3 прямая l задана начальной точкой M_0 (x_0, y_0, z_0) и направляющим вектором **a** (a_1, a_2, a_3), а плоскость имеет уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$.

Сформулировать условия, при которых прямая и плоскость

1) пересекаются;

2) параллельны;
3) прямая лежит в плоскости.

Выделить особо случай, когда прямая перпендикулярна плоскости.
[1, с. 190 – 191]; [7, с. 86 – 89].

5. Движения плоскости. Частные виды движений

1. Дать определение движения.
2. Получить формулы движения:
   $X = C\,X + X_0$, где $C \in O(2)$.
3. Указать частные случаи движений: а) параллельный перенос;
   б) поворот на угол $\alpha (\alpha = 0, \alpha = \pi)$;
   в) центральная симметрия;
   г) осевая симметрия;
   д) скользящая симметрия.
4. Указать примеры формул частных случаев движений.
   [1, с. 116, 127 – 132, 151 – 154]; [4, с. 175 – 186, 190 – 192]; [6, с. 67 – 69].

6. Группа движений плоскости. Движения 1-го и 2-го рода

1. Дать определение движения (изометрии) плоскости.
2. Указать формулы движений.
3. Доказать, что множество движений образует группу.
4. Дать определение движений 1-го и 2-го рода.
5. Указать подгруппы группы движений, инварианты относительно этих подгрупп.
6. Указать наличие неподвижных точек и неподвижных прямых как принцип классификации движений.
   [1, с. 120 – 123]; [4, с. 178 – 180].

7. Группа преобразований подобия плоскости и ее подгруппы

1. Дать определение преобразования подобия.
2. Указать формулы преобразования подобия:
   $X' = k\,(C\,X + X_0)$, где $C \in O(2, R)$, $k > 0$.
3. Доказать, что множество подобий образует группу.
4. Указать основные инварианты группы преобразований подобия.
5. Определить подгруппы группы преобразований подобия:
   а) гомотетия;
   б) центрально – подобное вращение $(\alpha \neq 0, \alpha \neq \pi)$;
   в) центрально – подобная симметрия;
   г) группа движений.
6. Указать приложение преобразований подобия к решению задач
   [1, с. 139 – 142, 153 – 154]; [4, с. 190 – 192]; [6, с. 67 – 69].

8. Группа аффинных преобразований плоскости и ее подгруппы

1. Дать определение аффинного преобразования плоскости.
2. Вывести формулы аффинного преобразования плоскости:

$$X' = C\,X + X_0,\ \det C \neq 0.$$

3. Доказать, что множество аффинных преобразований плоскости образует группу, указать инварианты относительно этой группы.
4. Выделить в группе аффинных преобразований подгруппу:
   а) движений;
   б) гомотетий;
   в) подобий;
   г) параллельных переносов и др.
5. Указать приложение аффинных преобразований к решению задач.

[1, с. 142 – 144, 146 – 155]; [4, с. 138 – 145]; [6, с. 65 – 67].

9. Проективная плоскость и ее модели. Принцип двойственности

1. Дать определение проективной плоскости.
2. Привести примеры моделей проективных плоскостей:
   а) связка прямых пространства A^3;
   б) расширенная евклидова (аффинная) плоскость E^2 (A^2);
   в) сфера со "склеенными" диаметрально противоположными точками;
   г) фактор-множество $V^3/_{\|}$, состоящее из классов эквивалентности по отношению "быть коллинеарными", определенного на множестве векторов из трехмерного векторного пространства V^3 .
3. Сформулировать принцип двойственности. Привести примеры утверждений, двойственных данным.

[2, с. 16 – 18]; [3, с. 217 – 219].

10. Группа проективных преобразований и ее подгруппы

Пусть P^2 – проективная плоскость.

1. Дать определение проективного преобразования P^2.
2. Получить формулы проективных преобразований

$$\rho X' = CX,\ \det C \neq 0,\ \rho \neq 0$$

3. Показать, что множество проективных преобразований образует группу, указать ее подгруппы.
4. Указать инварианты группы (сохранение коллинеарности точек, сложного отношения четырех коллинеарных точек).
5. Привести пример применения проективного преобразования к решению задач.

[2, с. 34 – 39]; [3, с. 204 – 206]; [5, с. 80 – 82].

11. Теорема Дезарга и ее приложение к решению задач

1. Дать определение трехвершинника.
2. Сформулировать теорему Дезарга, провести доказательство в случае когда трехвершинники лежат в разных плоскостях или в одной плоскости.
3. Сформулировать обратную теорему и доказать ее, опираясь на принцип двойственности.
4. Привести пример приложения теоремы Дезарга к решению задач.

[2, с. 26 – 28].

12. Изображение плоских фигур (в параллельной проекции)

1. .Дать определение изображения фигуры.
2. Указать свойства, сохраняющиеся при параллельном проектировании (прямая проектируется в прямую; сохраняется отношение принадлежности; сохраняется простое отношение трех точек прямой; параллельные прямые проектируются в параллельные прямые).
3. Показать, что любой треугольник может служить изображением данного треугольника.
4. Показать, что, зная изображение трех точек общего положения в плоскости оригинала, можно построить изображение любой точки плоскости оригинала.
5. Показать, как изображается трапеция, параллелограмм, n- угольник, окружность.

[2, с. 86 – 101]; [4, с. 191 – 194].

13. Изображение пирамиды и призмы (теорема Польке-Шварца для треугольной пирамиды)

1. Сформулировать и доказать теорему Польке-Шварца.
2. Построить изображение n-угольной пирамиды, пользуясь теоремой Польке-Шварца и правилами изображений плоских многоугольников.
3. Построить изображение n-угольной призмы, рассмотреть частный случай: изображение произвольного параллелепипеда.

[2, с. 101 – 106].

14. Изображение цилиндра, конуса, шара

1. Построить изображение цилиндра, если плоскость изображения параллельна его оси, а направление проектирования не параллельно плоскостям оснований цилиндра.
2. Построить изображение конуса, если плоскость изображения параллельна его оси, а направление проектирования не параллельно плоскости основания.

3. Построить изображение шара, его экватора и полюсов.

[2, с. 107 – 111].

15. Позиционные задачи на изображении

1. Дать определение позиционной задачи.
2. Дать определение заданной точки.
3. Дать определение полного изображения.
4. Привести пример позиционной задачи (построить сечение призмы (пирамиды) плоскостью, проходящей через три заданные точки).

[2, с. 119 – 121]; [5, с. 203 – 208].

16. Метрические задачи на изображении

1. Дать определение метрической задачи.
2. Дать определение метрически определенного изображения (евклидово определенного изображения).
3. Показать, что полное изображение является необходимым условием его метрической определенности.
4. Показать, что метрически определенное изображение определяет оригинал с точностью до движения, а евклидово определенное изображение определяет оригинал с точностью до подобия.
5. Указать, что для метрически определенного изображения плоской фигуры должны быть известны три независимых параметра оригинала, один из которых линеен.
6. Показать на рисунке область, где может находиться изображение
   а) центра описанной около треугольника окружности;
   б) центра вписанной в треугольник окружности;
   в) ортоцентра.
7. Указать, что для метрически определенного изображения пространственной фигуры должны быть известны шесть независимых параметров оригинала.
8. Привести пример метрической задачи.

[2, с. 125 – 131]; [4, с. 200 – 203].

17. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства и ее непротиворечивость. Связь аксиом Вейля с аксиомами школьного курса геометрии

1. Дать определение аффинного пространства как множества $A \neq \varnothing$ с направляющим линеалом V^3, для которого выполняются две аксиомы Вейля.
2. Дать определение евклидова пространства E^3.

3. Рассмотреть арифметическое пространство R^3 в качестве модели пространства E^3 и тем самым установить непротиворечивость аксиоматики Вейля.
4. Сформулировать аксиомы школьного курса геометрии.
5. Определить основные неопределяемые понятия школьного курса геометрии в схеме Вейля и наоборот.
6. Установить эквивалентность указанных аксиоматик, показав, что они допускают одну и ту же модель: R^3 .

[2, с. 288 – 292, 300 – 303]; [3, с. 173, 230 – 233].

18. Плоскость Лобачевского. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского

1. Сформулировать аксиоматику плоскости Лобачевского.
2. Сформулировать и доказать некоторые из теорем геометрии Лобачевского.
3. Определить расходимость и параллельность прямых на плоскости Лобачевского.
4. Доказать существование единственного общего перпендикуляра двух расходящихся прямых, свойства (симметричность, транзитивность) параллельных прямых в одном и том же направлении (изложение можно провести на модели Кэли-Клейна).

[2, с. 256 – 259, 266 – 270].

19. Модель геометрии Лобачевского. Непротиворечивость системы аксиом геометрии Лобачевского

1. Сформулировать аксиоматику плоскости Лобачевского.
2. Доказать непротиворечивость аксиоматики Лобачевского, построив модель (например, модель Кэли-Клейна на расширенной евклидовой плоскости как модели проективной плоскости).
3. Сформулировать и доказать одну из теорем геометрии Лобачевского (изложение провести на модели Кэли-Клейна).

[2, с. 325 – 330].

20. Линии в евклидовом пространстве. Гладкие линии. Длина дуги линии

1. Дать определение кривой в евклидовом пространстве. Указать различные способы задания кривой. Привести примеры.
2. Дать определение регулярной кривой, гладкой кривой класса C^k.
3. Дать определение длины дуги кривой.
4. Указать формулы для вычисления длины дуги кривой, заданной различными способами.

5. Дать определение естественной параметризации кривой. Доказать, что длину дуги s можно принять в качестве параметра кривой.
6. Записать уравнение некоторой кривой (например, винтовой линии) в естественной параметризации.

[2, с. 181 – 187]; [3, с. 100 – 110, 121 – 122]; [8, с. 27 – 33].

21. Гладкие поверхности в евклидовом пространстве. Касательная плоскость, нормаль к поверхности

1. Дать определение поверхности в евклидовом пространстве.
2. Указать различные способы задания поверхности. Привести пример задания одной и той же поверхности различными способами:
   а) с помощью вектор – функции;
   б) параметрически;
   в) в явном виде, неявном виде.
3. Дать определение регулярной поверхности, гладкой поверхности класса C^k. Привести примеры.
4. Дать определение касательной плоскости, нормали к поверхности, вывести их уравнения.

[2, с. 199 – 203]; [8, с. 60 – 64].

22. Первая квадратичная форма поверхности и ее приложения

1. Дать определение гладкой поверхности.
2. Дать определение первой квадратичной формы поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$:
$$ds^2 = \mathbf{r}^2_u\, du^2 + 2\mathbf{r}_u\, \mathbf{r}_v du\, dv + \mathbf{r}^2_v\, dv^2 .$$
3. Получить формулу для вычисления длины дуги гладкой кривой.
4. Получить формулу для вычисления угла между кривыми лежащими на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$.
5. Привести пример.

[2, с. 211 – 214]; [8, с. 79 – 82].

Для специальностей МиИ и МиФ

23. Определение топологического пространства. Примеры. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы

1. Дать определение топологической структуры на множестве $X \neq \varnothing$.
2. Привести примеры топологических пространств. Показать, что на одном и том же множестве можно определить различные топологические структуры.
3. Дать определение непрерывного отображения из топологического пространства (X_1, τ_1) в пространство (X_2, τ_2).
4. Дать определение гомеоморфизма.

5. Привести примеры непрерывных отображений и гомеоморфизмов.

[3, с. 276 – 278, 293 – 295]; [8, с. 10 – 11].

24. Топологические многообразия. Примеры. Ориентируемость

1. Дать определение карты и атласа на топологическом пространстве.
2. Дать определение k-мерного топологического многообразия. Привести примеры.
3. Дать определение многообразия с краем. Привести примеры.
4. Дать определение клетки, ориентированной клетки.
5. Дать определение и привести примеры ориентируемых и неориентируемых двумерных многообразий.

[2, с. 150 – 156].

25. Эйлерова характеристика двумерного многообразия

Теорема Эйлера для многогранников

1. Дать определение компактного многообразия.
2. Дать определение клетки.
3. Указать, что всякое двумерное многообразие можно разложить на конечное число клеток.
4. Ввести понятие эйлеровой характеристики двумерного многообразия и показать, что она является топологическим инвариантом.
5. Дать определение выпуклого многогранника.
6. Доказать теорему Эйлера для выпуклых многогранников.
7. Привести примеры правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

[2, с. 156 – 158, 163 – 165].

Для специальности ФиМ

23.Эллипс

1. Дать определение эллипса. Вывести каноническое уравнение эллипса.
2. Исследовать форму эллипса.
3. Указать геометрические свойства эллипса; определить понятие эксцентриситета, директрисы. Указать фокально-директориальное свойство; уравнение в полярных координатах.

[1, с. 74].

24. Гипербола

1. Дать определение гиперболы. Вывести каноническое уравнение гиперболы.
2. Исследовать форму гиперболы

3. Указать геометрические свойства фигуры; определить понятие эксцентриситета, директрисы. Указать фокально-директориальное свойство; уравнение в полярных координатах

[1, с. 78].

25.Парабола

1. Дать определение параболы. Вывести каноническое уравнение параболы.
2. Исследовать форму параболы.
3. Указать геометрические свойства фигуры; определить понятие эксцентриситета, директрисы. Указать фокально-директориальное свойство; уравнение в полярных координатах

[1, с. 82].

Литература:

1. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия, ч.1. – М.: "Просвещение". – 1986.
2. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия, ч.2. – М.: "Просвещение". – 1986.
3. *Погорелов А.В.* Геометрия. – М.: "Наука", 1983.
4. *Атанасян Л.С.* и др. Геометрия, ч.1. – М.: "Просвещение". – 1973.
5. *Атанасян Л.С.* и др. Геометрия, ч.2. – М.: "Просвещение". – 1973.
6. Сборник задач по геометрии, ч.2 / Под ред. *Атанасяна Л.С.* – М.: "Просвещение". – 1975.
7. *М.М. Постников.* Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия. – М.: "Наука". – 1979.
8. *Белько И.В.* и др. Дифференциальная геометрия. – Мн.: Изд-во БГУ. – 1982.

Редактор Т.А. Филимонова
Технический редактор А.Н. Гладун
Компьютерная верстка А.Л. Позняков
Корректор Г.П. Борисенко

Сдано в набор 28.04.99. Подписано в печать 12.05.99. Формат $60x90^{1}/_{16}$
Бумага печ. № 1. Гарнитура Times New Roman. Усл.-печ. л. 1,1.
Уч.-изд.л. 1,2 Тираж 100 экз. Заказ№ 46 .

Напечатано на ризографе лаборатории оперативной полиграфии
МГУ им А.А.Кулешова 212022, г.Могилев, ул. Космонавтов, 1
Лицензия ЛП №281 от 23.07.98.