УДК 511.36

Д.А. БОДЯГИН, О.С. КУКСО, Н.В. САКОВИЧ

СЛУЧАЙ СХОДИМОСТИ ТЕОРЕМЫ ХИНЧИНОВСКОГО ТИПА ДЛЯ МНОЖЕСТВ ХОРОШО ПРИБЛИЖАЕМЫХ ТОЧЕК НА ПЛОСКИХ КРИВЫХ В НЕОДНОРОДНОМ СЛУЧАЕ

В статье предложен метод, позволяющий исследовать неоднородные диофантовы приближения на плоских кривых с ненулевой кривизной.

В. Шмидт доказал экстремальность кривой, кривизна которой почти везде отлична от нуля. После работы Шмидта относительно данной кривой было получено много новых результатов в работах В.Г. Спринджука, Бейкера, Додсона, Диккинсона,

В.И. Берника, В.В. Бересневича. Однако все эти результаты касались однородного случая. В однородном случае применимы многие методы геометрии чисел, что существенно упрощает задачу. В неоднородном случае ситуация значительно усложняется, так как возникающие при рассмотрении тела перестают быть симметричными. В данной работе за счет привлечения новых методов удалось получить аналог теорем Шмидта. Доказана теорема, являющаяся обобщением извесной теоремы В. Шмидта для плоских кривых в однородном случае.

Пусть задан некоторый вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где x_i – действительные числа, лежащие в некотором интервале I, $1 \le i \le n$. Рассмотрим множество тех $\vec{x}$, для которых неравенство

$$| a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n |< H^{-v},$$

$$a_j \in Z, \quad 0 \le j \le n, \quad v \in R \qquad H = \max\{| a_1 |, ..., | a_n |\} \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений. Обозначим такое множество через $A(\vec{x}, v)$. Из результатов Грошева [3] следует, что при $v > n$ множество $A(\vec{x}, v)$ имеет нулевую меру Лебега.

Задача усложняется, если рассматривать не все точки $\vec{x} \in I^n$, а только точки, лежащие на некотором многообразии

$$C = \{(x, f_2(x), f_3(x), ..., f_n(x)) \mid x \in I, f_i(x) \in C^n(I)\}.$$

Пусть вронскиан $w(1, f_1'(x), ..., f_n'(x)) \neq 0$ отличен от нуля при почти всех $x \in I$. Клейнбоком, Маргулисом доказано в [4], что при $v > n$, мера $A(\vec{x}, v) \bigcap G$ равна нулю.

В данной статье рассматривается неоднородный вариант указанной задачи. Пусть на некотором промежутке I даны две функции $f(x): I \to R$ и $\lambda(x): I \to R$. Рассмотрим неравенство

$$| a_2 f(x) + a_1x_1 + a_0 + \lambda(x) |< H^{-v}, \tag{2}$$

где $(a_0, a_1, a_2) \in Z^3$, $H = \max\{| a_0 |, | a_1 |, | a_2 |\}$ и v – некоторое положительное действительное число. Через $A_\lambda(v)$ обозначим множество таких x, для которых множество решений (2) бесконечно.

Обозначим $F(x) = a_2 f(x) + a_1 x + a_0, \quad a_j \in Z, \quad 0 \le j \le 2.$

Основным результатом данной статьи является

Теорема 1. *Пусть функция $f(x) \in C^2(I)$ такая, что множество корней $f''(x)$ имеет нулевую меру. Пусть также функция $\lambda(x) \in C^2(I)$. Тогда при $v > 2$ неравенство (2) имеет лишь конечное число решений.*

В основе доказательства лежат следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть функция $f(x) \in C^2(I)$ такая, что множество корней функции $f''(x) = 0$ имеет нулевую меру Лебега. Тогда существует $d > 0$, такое, что для любого $x \in I$, из условия $| x |> d$, следует $| f'(x) |> d$ и $| f''(x) |> d$.*

Лемма 2. *Пусть функция $\varphi(x) \in C^n(I)$ такая, что $| \varphi^{(n)}(x) |> \delta$ для всех $x \in I$. Тогда существует такая константа $c(n)$, зависящая только от n, что*

$$m(\{x \in I : |\varphi(x)| < v\}) \le c(n)\left(\frac{v}{\delta}\right)^{1/n},$$

где $\mathrm{m(A)}$ означает меру Лебега множества A.

Доказательство этих лемм имеется в [1].

Лемма 3. *Пусть* $f(x) \in C^2(I)$. *Тогда существует константа* c_1, *зависящая только от вида функции* $f(x)$, *такая, что для всех* $x \in I$,

$$\max\{|F(x)|,|F'(x)|,|F''(x)|\} > c_1 H.$$

Доказательство этой леммы имеется в [2].

Лемма 4. *Пусть* $f(x) \in C^2(I)$. *Обозначим* $\alpha = \max\limits_{0 \le i \le 2}(1, \sup\{f^i(x) \mid x \in I\})$ *и* $c_2 = c_1/(6\alpha)$. *Тогда если* $m(I) \le c_2$ *и на промежутке* I *для некоторого* $0 \le i \le 2$ *найдется точка* x_0, *что* $|F^{(i)}(x_0)| \ge c_1 H$, *то для всех точек* $x \in I$, $|F^{(i)}(x)| \ge c_1 H/2$. *(Здесь* $F^{(0)}(x) = F(x)$*).*

Доказательство этой леммы имеется в [2].

Доказательство теоремы.

Разобьем интервал I на конечное число интервалов, длина каждого из которых не превосходит c_2. Количество таких интервалов зависит только от вида функции f. Следовательно, без ограничения общности можем считать, что $m(I) \le c_2$. Отметим также, что для достаточно больших H из $|F^{(i)}(x)| \ge cH$ будет следовать, что $|F^{(i)}(x) + \lambda^{(i)}(x)| >> H$ (здесь $i = 0$ или $i = 1$).

Используя леммы 1 и 4, считаем, что $|I| \le c_2$ и существует $d > 0$ такое, что для любого $x \in I, |f'(x)| > d$.

Заметим, что $A_\lambda(v)$ можно представить в следующем виде:

$$A_\lambda(v) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{H=n}^{\infty} A(H),$$

где $A(H)$ обозначает множество тех $x \in I$, для которых выполняется неравенство (2) хотя бы при одной тройке $(a_0, a_1, a_2) \in Z^3$ с фиксированным $H = \max\{|a_0|,|a_1|,|a_2|\}$.

Возьмем произвольное ε, $0 < \varepsilon < v - 2$ и зафиксируем его.

Разобьем каждое из множеств $A(H)$ на два подмножества, соответственно $A_1(H)$ и $A_2(H)$.

$$A_1(H) = \{x \in A(H) \mid |F'(x) + \lambda'(x)| > H^{-2-v+\varepsilon}\} \qquad (3)$$

$$A_2(H) = \{x \in A(H) \mid |F'(x) + \lambda'(x)| \le H^{-2-v+\varepsilon}\} \qquad (4)$$

Для каждого из построенных наборов множеств мы можем построить множества $A_{1\lambda}(v)$ и $A_{2\lambda}(v)$ аналогично как мы строили $A_\lambda(v)$. Несложно заметить, что

$$A_{1\lambda}(v) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{H=n}^{\infty} A_1(H),$$

$$A_{2\lambda}(v) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{H=n}^{\infty} A_2(H),$$

$$A_\lambda(v) = A_{1\lambda}(v) \bigcup A_{2\lambda}(v).$$

Таким образом, нам достаточно доказать утверждение теоремы отдельно для каждого из множеств.

Рассмотрим множество $A_{1\lambda}(v)$.

Утверждение 1. *Зафиксируем некоторое* $0 \le \delta \le 1$ *и* H. *Обозначим через* $N(\delta)$ *количество троек* (a_0, a_1, a_2) *целых чисел, для которых существует решение* $x \in I$ *системы неравенств*

$$\begin{cases} |F(x) + \lambda(x)| \le H^{-v}, \\ |F'(x) + \lambda'(x)| \le H^{\delta}. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда $N(\delta) << H^{1+\delta}$.

Доказательство.

Так как $|\lambda'(x)| << 1$ и $|\lambda(x)| << 1$, то все решения неравенства (5) также будут решениями неравенства

$$\begin{cases} |F(x)| \le H^{-v}, \\ |F'(x)| \le H^{\delta}. \end{cases} \tag{6}$$

Преобразуем нашу систему.

$$\begin{cases} |a_0 + a_2(f(x) - xf'(x))| << H^{-v}, \\ |a_1 + a_2 f'(x)| << H^{\delta}. \end{cases} \tag{7}$$

Отметим, что $f'(x)$ строго монотонна и ограничена (по лемме 1). Произведем замену переменных: $-f'(x) = t$, $f(x) - xf'(x) = g(t)$. Пусть $t \in J$, по лемме 2, получаем $|J| << 1$. Функция $g(t)$ ограничена, непрерывно дифференцируема и $|g(t)| << 1$. Система (7) с учетом обозначений преобразуется к виду:

$$\begin{cases} |a_0 + a_2 g(t)| << H^{v} \\ |a_1 - a_2 t| << H^{\delta} \\ t \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{a_0}{a_2} + g(t)\right| << H^{v-1} \\ \left|\dfrac{a_1}{a_2} - a_2 t\right| << H^{\delta-1} \\ t \in J \end{cases}$$

Отметим, что $g\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right) = g(t + \Delta) = g(t) + \Delta g'(\xi) = g(t) + O(H^{\delta-1})$. Следовательно, все решения последней системы будут также решениями неравенства

$$\left| g\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - \frac{a_0}{a_2} \right| \le H^{\delta-1}.$$

Несложно проверить, что число целочисленных решений последнего неравенства при условии $\max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|\} = H$ не превосходит $CH^{1+\delta}$ для некоторой константы C. Следовательно, $N(\delta) << H^{1+\delta}$. Утверждение 1 доказано.

Для произвольного $0 < \delta \le 1$ рассмотрим множество

$$A_{\delta,\lambda}(v) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{H=n}^{\infty} A_{\delta}(H), \tag{8}$$

где $A_{\delta}(H)$ – множество, состоящее из $x \in A(H)$, для которых выполняется условие

$$H^{3-v-\delta+\varepsilon} < |F'(x) + \lambda'(x)| \le H^{1-\delta}. \tag{9}$$

Из утверждения 1 следует, что для фиксированного H существует $O(H^{2-\delta})$ троек, для которых неравенство (2) имеет решение. По лемме 2, для фиксированной тройки (a_0, a_1, a_2) мера решений (2) не превосходит

$$H^{-v-3+\delta+v-\varepsilon} = H^{-3+\delta-\varepsilon}.$$

Тогда мера $A_{\delta}(H)$ оценивается сверху величиной $H^{2-\delta} \cdot H^{-3+\delta-\varepsilon} = H^{-1-\varepsilon}$.

Так как ряд $\sum\limits_{H=1}^{\infty} H^{-1-\varepsilon}$ сходится, то, применяя лемму Бореля-Кантелли, получаем $m(A_{\delta}(H)) = 0$ для всех $\delta \le 1$.

Представим множество $A_{1\lambda}(v)$ в виде объединения

$$A_{1\lambda}(v) = \bigcup_{i=1}^{l} A_{\delta_i,\lambda}(v) \cup A_{1,\lambda}(v),$$

где $\delta_1 = 0$, $\delta_{i+1} = \delta_i + v - 2 - \varepsilon$, l – такое минимальное натуральное число, что $\delta_{l+1} > 1$. Поскольку $v - 2 - \varepsilon > 0$, то $\delta_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Следовательно, найдется такое натуральное число l, зависящее только от ε, для которого $\delta_{l+1} > 1$.

По доказанному, мера каждого из множеств $A_{\delta_i,\lambda}(v)$ и $A_{1,\lambda}(v)$ равна нулю. Отсюда и получаем необходимую оценку.

Рассмотрим множество $A_{2\lambda}(v)$.

Мы имеем неравенство $|F'(x) + \lambda'(x)| \le H^{-2-v+\varepsilon}$. Следовательно. Применяя лемму 3, получаем

$$\forall x \in A_2(H), \quad |F''(x) + \lambda''(x)| >> H, \tag{10}$$

или $|a_2 f''(x) + \lambda''(x)| >> H$.

Мера множества тех x, для которых выполняются неравенства (10) и (4) по лемме 2, не превосходит $H^{-2-v+\varepsilon-1}$. По утверждению 1, число целочисленных троек (a_0, a_1, a_2), которые дают хотя бы одну точку $x \in A_2(H)$, не превосходит H. Таким образом, $m(A_2(H)) << H \cdot H^{-3-v+\varepsilon} = H^{-2-v+\varepsilon}$.

Ряд $\sum\limits_{H=1}^{\infty} H^{-2-v+\varepsilon}$ сходится, следовательно, по лемме Бореля-Кантелли, $m(A_{2\lambda}(v)) = 0$.

Полученные оценки для мер множеств $A_{1\lambda}(v)$ и $A_{2\lambda}(v)$ дают утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Beresnevich, V.*** On a metrical theorem of W. Schmidt / V. Beresnevich, V. Bernik // Acta Arithm. – 1996. – P. 219-233.
2. ***Грошев, А.В.*** // Доклады АН БССР / А.В. Грошев. – 1938. – Т. 19. – С. 151-152.
3. ***Kleinbock, Y.*** Flows on homogeneous and Diophantine approximation on manifolds / Y. Kleinbock, G.A. Margulis // Ann. of Math. – 1998. – 2 (148). – P. 339-360.
4. ***Пяртли, А.*** Диофантовы приближения на подмногообразиях в евклидовом пространстве / А. Пяртли // Функциональный анализ и приложения. – 1969. – № 3(4). – С. 59-62.

Поступила в редакцию 31.05.2006 г.