УДК 511.42

О КОЛИЧЕСТВЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК С ОГРАНИЧЕННЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

О. В. Рыкова
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Белорусский государственный аграрный технический университет, г. Минск, РБ
Н. В. Сакович
кандидат физико-математических наук, доцент
МГУ имени А.А. Кулешова, г. Могилев, РБ
Н. В. Шамукова
кандидат физико-математических наук, доцент
Командно-инженерный институт МЧС, г. Минск, РБ

В теории диофантовых приближений свойства трансцендентных и иррациональных чисел изучаются с помощью их приближений алгебраическими и рациональными числами [1, 2]. Сами алгебраические и рациональные числа устроены проще и многие их свойства или почти очевидны, или легко доказываются. Однако нет правил без исключения. Например, хорошо известна задача о распределении рациональных чисел Фарея [3], которая эквивалентна проблеме Римана. В работе доказано два утверждения о распределении алгебраических и рациональных чисел.

Ключевые слова: корень многочлена, высота многочлена, результант многочленов, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

Для алгебраического числа α через $\deg\alpha = n$ и $H(\alpha)$ будем обозначать степень и высоту его минимального многочлена. Далее μB – мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$, величины $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ зависят только от n и не зависят от высоты многочлена. В.И. Берником, Н.В. Будариной, Х. О'Донеллом в работе [4] доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $Q > Q_0$ достаточно большое натуральное число, $I \subset \mathbb{R}$ – интервал длины $|I| = c_1 Q^{-1}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

a) Существуют интервалы I, $|I| = Q^{-1}/2$, внутри которых нет алгебраических чисел α с условиями $\deg\alpha \le 3$ и $H(\alpha) \le Q$.

b) При достаточно большой величине c_2 внутри любого интервала I, $|I| = c_2 Q^{-1}$, лежит не менее $c_3 |I| Q^4$ действительных алгебраических чисел α, $\deg\alpha = 3$ и $H(\alpha) \le Q$.

Для интервала $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ с центром в точке $d=\dfrac{a+b}{2}$ построим интервал $I_1=[d-4|I|,d+4|I|]$. Пусть $0\le\gamma\le1$. Будем называть I интервалом типа (Q,γ), если внутри интервала I_1 нет рациональных чисел $\dfrac{s}{t}$ с ограниченными знаменателями $1\le t\le Q^{\gamma}$.

Теорема 2. *При* $\gamma_1\ge1+\gamma n$ *и* $c_3<c_0$ *внутри интервала* I, $|I|\le c_3Q^{-\gamma_1}$, *ни при каком* $n\ge1$ *нет действительных алгебраических чисел* α, $\deg\alpha=n$ *и* $H(\alpha)\le Q$.

Основой для доказательства теоремы 2 является следующая лемма:

Лемма 1. [5] *При любом наборе корней* $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_s}$, $1\le s\le n$, *многочлена* $P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ *справедливо неравенство* $\prod_{j=1}^{s}|\alpha_{i_j}|<c_4H(P)|a_n|^{-1}$, *где* $H(P)=\max_{0\le i\le n}|a_i|$.

Доказательство: Возьмем интервал $I_2=(p/q,\,p/q+c_3Q^{-\gamma_1})$, где $q<Q^{\gamma}$, и покажем, что при подходящем c_3 этот интервал искомый. Обозначим $P_1(x)=qx-p$, и пусть α – корень минимального многочлена $P_2(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ с корнями $\alpha_1=\alpha,\alpha_2,\dots,\alpha_n$. Если $\alpha\in I_2$, то

$$|\alpha-p/q|\le c_3Q^{-\gamma_1}. \tag{1}$$

Рассмотрим результант $R(P_1,P_2)$ полиномов P_1 и P_2. Так как полиномы P_1 и P_2 не имеют общих корней, то $|R(P_1,P_2)|\ge1$. С другой стороны, из леммы 1 и неравенства (1) имеем:

$$\begin{aligned}1\le|R(P_1,P_2)| &= q^n|a_n||\alpha_1-p/q|\prod_{j=2}^{n}|\alpha_j-p/q|\\ &< c_5Q^{\gamma n}H(\alpha_1)|\alpha_1-p/q|<c_3c_5Q^{\gamma\cdot n+1-1-\gamma\cdot n}<c_3c_5\end{aligned}$$

и при $c_3<c_5^{-1}$ получаем противоречие, которое доказывает теорему 2.

Что будет происходить, если длину интервала I_2 увеличить и взять равной $c_6Q^{-\gamma_1}$ при достаточно большой величине c_6? Ответ на этот вопрос получен в [4] при $\gamma=0$. Рассмотрим случай, когда $\gamma\ne0$ и $n=1$.

Теорема 3. *Если* $c_6>c_0$ *и интервал* I_2 *имеет тип* (Q,γ_1), *то количество рациональных чисел p/q,* $Q^{\gamma}\le q\le Q$, *не меньше* $c_7|I_2|Q^2$, *что не меньше* $c_8Q^{2-\gamma_1}$.

Доказательство: Пусть интервал I_2 имеет длину $|I_2|=c_6Q^{-1-\gamma}$, $0\le\gamma\le1$, $c_6>c_0$. Обозначим через $B_1=B(\delta_0)$ множество точек интервала, для которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |qx-p|<Q^{-1}, \\ 1\le q\le \delta_0 Q. \end{cases} \tag{2}$$

Система неравенств (2) не может выполняться, если $q<Q^{\gamma}$. Из первого неравенства (2) следует, что $|x-p/q|<q^{-1}Q^{-1}$. Поэтому

$$|d-p/q|\le|d-x|+|x-p/q|<c_6 Q^{-1-\gamma}/2+q^{-1}Q^{-1}\le(1+c_6/2)q^{-1}Q^{-1},$$

что противоречит выбору интервала I_2. Перепишем неравенство (2) в виде

$$|qx-p|<Q^{-1},\quad Q^{\gamma}\le q\le \delta_0 Q. \tag{3}$$

Обозначим через $J(p,q)$ множество $x\in I_2$, для которых верна система неравенств (3). Ясно, что $\mu J(p,q)\le 2q^{-1}Q^{-1}$ при фиксированных p и q.

Рассмотрим интервал $I_3=[d-2q^{-1}Q^{-1}, d+2q^{-1}Q^{-1}]$. Надо просуммировать $\mu J(p,q)$ по всем дробям p/q, принадлежащим интервалу I_3. Найдем условие, при котором два интервала

$$J(c_9,p_i,q_i)=\{|x-p_i/q_i|<c_9 q_i^{-1}Q^{-1}\},\ i=1,2,\ c_9>1,$$

не пересекаются. Если x_0 точка их пересечения, то

$$|p_1/q_1-p_2/q_2|\le|x_0-p_1/q_1|+|x_0-p_2/q_2|<c_9 Q^{-1}(q_1^{-1}+q_2^{-1}). \tag{4}$$

С другой стороны

$$|p_1/q_1-p_2/q_2|=\frac{|p_1q_2-p_2q_1|}{q_1q_2}\ge\frac{1}{q_1q_2}. \tag{5}$$

Из (3)–(5) имеем неравенство

$$1\le c_9 Q^{-1}(q_1+q_2)<2c_9\delta_0,$$

которое противоречиво при $c_9\le\delta_0^{-1}/2$. Поэтому, если $c_9=\delta_0^{-1}/3$ и $c_6\ge 4$, то

$$\sum_{p/q\in I_3}\mu J(\delta_0^{-1}/3,p,q)\le|I_3|\le 4c_6^{-1}|I_2|\le|I_2|.$$

Так как $\mu J(p,q)<3\delta_0\mu J(\delta_0^{-1}/3,p,q)$, то

$$\sum_{p/q\in I_3}\mu J(p,q)\le 3\delta_0|I_2|. \tag{6}$$

При подходящем δ_0 справедливо неравенство

$$\mu B_1<|I_2|/4. \tag{7}$$

Возьмем $\delta_0=2^{-3}$. Тогда на множестве $B_2=I_2\setminus B_1$, $\mu B_2\ge 3|I_2|/4$, выполняется система неравенств

$$|qx-p|<Q^{-1},\quad \delta_0 Q<q\le Q. \tag{3}$$

Для $x_1\in B_2$ из (8) следует

$$|x_1 - p_1/q_1| < q_1^{-1}Q^{-1} < \delta_0^{-1}Q^{-2}. \quad (4)$$

Это означает, что при достаточно большой величине c_6 справедливо $p_1/q_1 \in I_2$. Обозначим через D_1 множество решений неравенства (9). Ясно, что $\mu D_1 < 2\delta_0^{-1}Q^{-2}$. Возьмем точку $x_2 \in B_2 \setminus D_1$. Для нее также найдется рациональное число $p_2/q_2 \neq p_1/q_1$ в интервале $D_2 = \{y \in I_2 : |x_2 - y| < \delta_0^{-1}Q^{-2}\}$. Затем возьмем точку $x_3 \in (B_2 \setminus D_1) \setminus D_2$ и т. д. Такое построение рациональных чисел $p_i/q_i \in I_2$, $1 \le i \le t$, можно продолжать до тех пор пока интервалами D_i не покроем все множество B_2. Поэтому

$$2t\delta_0^{-1}Q^{-2} \ge \mu B_2 > 3|I_2|/4,$$

откуда $t > 2^{-3}3\delta_0 Q^2 |I_2|$, что и доказывает теорему 3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Касселс, Дж. В. С.*** Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – М. : Изд-во иностр.лит., 1961. – 213 с.
2. ***Bugeaud, Y.*** Approximation by algebraic numbers. Cambridge. / Y. Bugeaud. – Cambridge Tracts in Mathematics, 160. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. – 274 pp.
3. ***Шмидт, В. М.*** Диофантовы приближения. – М. : Мир, 1983. – 224 с.
4. ***Bernik, V. I., Budarina N. V., O'Donnell H.*** // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – Vol. 280, Suppl. 2. – P. 31–43.
5. ***Фельдман, Н. И.*** Приближение некоторых трансцендентных чисел // Известия Акад. наук СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15, № 1. – С. 53–74.

Поступила в редакцию 14.07.2015 г.

Контакты: +375 17 263 81 22 (Рыкова Ольга Васильевна)

Rykova O.V., Sakovich N.V., Shamukova N.V. ON THE NUMBER OF RATIONAL POINTS WITH BOUNDED DENOMINATORS IN SHORT INTERVALS OF DIFFERENT TYPES.

The points in short intervals of the real axis have different arithmetic properties depending on the presence of rational numbers with small denominatirs in intervals. The classification of short intervals is presented in the article. The theorems on the distribution of rational and algebraic numbers in such intervals are provided.

Key word: root of polynomial, height of polynomial, resultant of polynomial, algebraic number, the system of Diophantine inequalities, order of approximation, set cover.