УДК 511.36

О.С. КУКСО, Н.В. САКОВИЧ, Н.В. ШАМУКОВА

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРИМИНАНТОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Понятие дискриминанта многочлена наряду со степенью и высотой принадлежит к одной из самых важных характеристик многочлена. Дискриминант многочлена произвольной степени наследует главное свойство многочлена второй степени: наличие кратных корней при дискриминанте, равном нулю. Для многочлена степени n можно сразу записать явный вид дискриминанта, найти же точное значение можно только через (2n-1)! операций. Уже при n≥100 эта задача для многочленов с большими коэффициентами недоступна для самых современных компьютеров.

В работе изучается распределение значений дискриминантов многочленов специального вида с целыми коэффициентами. Используя методы теории диофантовых приближений, удалось доказать существование многочленов с относительно малыми дискриминантами. Этот результат практически не улучшаем, то есть внутри интервала, несколько меньшей длины, значений дискриминантов нет.

Дискриминант многочлена считается одной из основных его характеристик как в алгебре, так и в теории чисел. Например, для многочленов второй степени $P(x) = ax^2 + bx + c$ значение дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ позволяет находить корни или определять: имеются ли они.

Определить дискриминант $D(P)$ многочлена

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

с высотой $H = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$ и корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можно двумя способами.

Дискриминант $D(P)$ можно задать как определитель

$$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2} \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & \ldots \\ & & & \ldots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & a_n & \ldots & a_1 & a_0 \\ n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \ldots & a_1 & 0 & \ldots \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & \ldots & 2a_2 & a_1 & \ldots \\ & & & \ldots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & na_n & \ldots & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

или как произведение разностей корней

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \qquad (2)$$

Далее мы будем рассматривать только целочисленные многочлены, поэтому по (1), если $D(P) \neq 0$, то

$$\left|D(P)\right| \geq 1. \qquad (3)$$

Из (2) очевидно следует, что $D(P)=0$ тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ имеет кратные корни.

Зафиксируем $n \in \mathbf{N}$. Пусть Q достаточно большое число, $Q > Q_0(n)$. Обозначим через $\mathbf{P}_n(Q)$ класс многочленов $P(x)$ таких, что $\deg P \leq n$ и $H(P) \leq Q$. Пусть $c(n)$, $c_j(n)$ обозначают константы, зависящие только от значения n. Мы будем использовать символ Виноградова $A << B$, если $A \leq c_1 B$. Из (1) получаем, что $\left|D(P)\right| < c(n)Q^{2n-2}$ и если $D(P) \neq 0$, то по (3) имеем

$$1 \leq \left|D(P)\right| \leq c(n)Q^{2n-2}. \qquad (4)$$

Из-за ограничений на степень и высоту многочленов получаем, что

$$\left|\mathbf{P}_n(Q)\right| < 2^{2n+2}Q^{n+1}. \qquad (5)$$

Из неравенств (4) и (5) следует существование интервала $[1, c(n)Q^{2n-2}]$ (длина которого растет вместе со значением Q), для которого не найдется ни одного многочлена со значением дискриминанта из этого интервала.

Заметим, что распределение дискриминантов целочисленных многочленов представляет интерес для диофантовых приближений [1, 2] и диофантовых уравнений [3].

Рассмотрим построение многочленов с малыми значениями дискриминантов в плохо аппроксимируемых точках. Докажем то, что для любого значения существует многочлен $P(x)$ из класса $\mathbf{P}_n(Q)$ такой, что $\left|D(P)\right| \in [1, c_1(n)]$, где $c_1(n)$ будет вычислена ниже.

Для построения подходящего многочлена выберем $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Пусть Q_1 достаточно большое число и

$$Q = c_2(n)Q_1. \qquad (6)$$

Значение $c_2(n)$ будет найдено позже. Положим $T = [Q_1^{1/n}]$. Из теории цепных дробей известно, что для любого T найдется пара взаимно простых чисел натурального $q_1 \in I_1 = [T, 2T]$ и целого p_1 таких, что выполняется

$$\left|q_1 x_0 - p_1\right| < (2T)^{-1}. \qquad (7)$$

Заменим T на $2T$. Тогда снова найдется пара взаимно простых чисел натурального $q_2 \in I_2 = [2T, 4T]$ и целого p_2 таких, что снова выполняется

$$\left|q_2 x_0 - p_2\right| < (4T)^{-1}. \qquad (8)$$

Повторяя процедуру еще $n-2$ раза, на последнем n-ом шаге найдем пару взаимопростых чисел $q_n \in I_n = [2^{n-1}T, 2^n T]$ и целого p_n таких, что снова выполняется

$$\left|q_n x_0 - p_2 n\right| < (2^n T)^{-1}. \qquad (9)$$

Теперь построим многочлен следующего вида:

$$P(x) = \prod_{j=1}^{\infty}(q_j x - p_j). \qquad (10)$$

Его высота $H(P)$ лежит в интервале $\left(2^{\frac{n(n-1)}{2}}T^n, 2^{\frac{n(n+1)}{2}}T^n\right)$. Положим $c_2(n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Тогда по (6) имеем

$$H(P) \le 2^{\frac{n(n+1)}{2}} Q_1. \tag{11}$$

Из неравенств

$$|q_i x_0 - p_i| < \left(2^i T\right)^{-1},$$
$$|q_j x_0 - p_j| < \left(2^j T\right)^{-1}, \quad i < j,$$

получаем, что

$$0 \ne \left|\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_j}{q_j}\right| \le \left|x_0 - \frac{p_i}{q_i}\right| + \left|x_0 - \frac{p_j}{q_j}\right| < \left(2^i\right)^{-1} q_i^{-1} +$$

$$+\left(2^j T\right)^{-1} q_j^{-1} < 2^{-2i+1}T^{-2} + 2^{-2j+1}T^{-2} < 2^{-2i+2}T^{-2},$$

отсюда

$$\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_j}{q_j}\right)^2 < 2^{-4\sum_{i=1}^{n-1}(i-1)(n-i)} T^{-4\sum_{k=1}^{n-1}k} = 2^{-\frac{2(n-1)(n-1)n}{3}} T^{-2n(n-1)}. \tag{12}$$

Тогда дискриминант многочлена $P(x)$ можно оценить

$$D(P) = \left(\prod_{j=1}^{n} q_j\right)^{2n-2} \prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_j}{q_j}\right)^2 \le 2^{\frac{n(n-1)(n+7)}{3}}.$$

Таким образом, мы доказали

Теорема 1. *Для любого значения* Q *существует многочлен* $P(x) \in \mathbf{P}_n(Q)$, *модуль значения дискриминанта лежит в интервале* $I = \left[1, 2^{\frac{n(n-1)(n+7)}{3}}\right]$.

В некотором смысле теорема 1 не улучшаема.

Теорема 2. *Для фиксированного* Q *пусть* $\frac{1}{2}Q^{1/n} < q_i < 2Q^{1/n}$. *Тогда не существует многочленов* $P(x)$ *вида* $\prod_{i=1}^{n}(q_i x - p_i)$, $\frac{q_i}{p_i} \ne \frac{q_j}{p_j}$, *значением модуля дискриминанта которого для* $n > n_0$ *лежит в интервале* $[1, e^{0.5n^2 \ln n}]$.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 = \min\limits_{1\le i\le n} \frac{p_i}{q_i}$. Упорядочим все корни многочлена $P(x)$ по величине. Таким образом

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n .$$

Положим $\gamma = \min\limits_{1\le j<n}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$. Из условия теоремы для некоторых j, $1 \le j < n$, имеем

$$\gamma = \alpha_{j+1} - \alpha_j = \frac{p_{j+1}}{q_{j+1}} - \frac{p_j}{q_j} = \frac{q_j p_{j+1} - q_{j+1} p_j}{q_j q_{j+1}} > 2^{-2} Q^{-2/n}.$$

Оценим модуль полученного дискриминанта $D(P)$. В равенстве

$$|D(P)| = \left(\prod_{j=1}^{n} q_i\right)^{2n-2} \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \qquad (14)$$

первый множитель можно оценить как $\left(\prod\limits_{j=1}^{n} q_j\right)^{2n-2} > 2^{-2n-2} Q^{2n-2}$. Для оценки оставшегося заметим, что

$$\alpha_2 - \alpha_1 \ge \gamma,$$
$$\alpha_3 - \alpha_1 = (\alpha_3 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1) \ge 2\gamma,$$
$$\alpha_j - \alpha_1 = (\alpha_j - \alpha_{j-1}) + (\alpha_2 - \alpha_1) \ge (j-1)\gamma \quad 4 \le j < n.$$

Поэтому

$$\prod_{j=2}^{n} (\alpha_1 - \alpha_j)^2 > ((n-1)!)^2 \gamma^{n-1} > ((n-1)!)^2 2^{-4(n-1)} Q^{-\frac{4(n-1)}{n}}. \qquad (15)$$

Аналогично (15) для любого k, $2 \le k \le n-1$, получаем

$$\prod_{j=k+1}^{n} (\alpha_k - \alpha_j)^2 > \left(\prod_{i=1}^{n-k} i!\right)^2 2^{-4(n-k)} Q^{-\frac{4(n-k)}{n}}. \qquad (16)$$

Из (15) и (16) для второго множителя в (14) получаем

$$\prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 > \left(\prod_{i=1}^{n-1} i!\right)^2 2^{-4\sum_{i=1}^{n-1} i} Q^{-\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i} = T_{n-1} 2^{-2(n-1)n} Q^{-2(n-1)}, \qquad (17)$$

где $T_{n-1} = \left(\prod\limits_{i=1}^{n-1} i!\right)^2$.

$$\ln T_{n-1} = 2\sum_{i=2}^{n-1} \ln i! = 2\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{i} \ln k. \qquad (18)$$

Заменив в (18) суммы $\sum_{k=2}^{i} \ln k$ и $\sum_{i=1}^{n-1} (i \ln i - i)$ интегралами получим нижнюю оценку $\ln T_{n-1} > 0.5n^2 \ln n$ для некоторого $n > n_0$ и

$$T_{n-1} > e^{0.8n^2 \ln n}. \qquad (19)$$

Наконец из (14), (16) и (19) для $n > n_0$ следует, что

$$|D(P)| > 2^{-2n-2} Q^{2n-2} 2^{-2(n-1)n} Q^{-2(n-1)} e^{0.8n^2 \ln n} = 2^{-2(n-1)(n+1)} e^{0.8n^2 \ln n} > e^{0.5n^2 \ln n},$$

что доказывает теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Gyory, K.*** Plynomials and binary forms with given discriminant / K. Gyory // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – 69/4. – P. 473-499.
2. ***Спринджук, В.Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – М.: Наука и Техника, 1967.
3. ***Bernik, V.I.*** Metric Diophantine approximation on manifolds / V.I. Bernik, M.M. Dodson // Cambridge Univ. Press: Cambridge Tracts in Math., 1999. – Vol. 137.

Поступила в редакцию 10.01.2008 г.