УДК 511.42

Д.В. КОЛЕДА, Н.В. САКОВИЧ

ЧИСЛО МНОГОЧЛЕНОВ НАД КОЛЬЦОМ ГАУССОВЫХ ЦЕЛЫХ, ИМЕЮЩИХ ПАРУ БЛИЗКИХ КОРНЕЙ

Для полиномов от комплексной переменной над кольцом целых гауссовых чисел показано, что малые значения модуля производной встречаются достаточно редко.

Пусть $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[i][x]$ многочлен степени n, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ – корни p. Далее $p(x)$ будем записывать в виде $p(x) = a_n(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n)$. Число

$$D(p) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \tag{1}$$

называется дискриминантом многочлена $p(x)$. Известно, что дискриминант – целочисленный многочлен от $n+1$ переменных коэффициентов многочлена $p(x)$. Всюду $\# M$ обозначает число элементов во множестве M, а $mes_k M$ – k-мерную меру Лебега множества $M \subset \mathbb{R}^d$ ($k \le d$). Будем использовать символ Виноградова $\ll$. Выражение $f \ll g$ равносильно тому, что $f \le c_1 g$ для некоторой постоянной c_1, которая зависит только от степени n. Выражение $f \asymp g$ означает, что $g \ll f \ll g$.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Для норм будем использовать следующие обозначения

$$\|x\|_m = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad m \ge 1.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le d} |x_i|.$$

Евклидову норму $\|\cdot\|_2$ для краткости будем обозначать просто $\|\cdot\|$.

Поле $\mathbb{C}$ будем рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{R}$ размерности $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$.

Высоту многочлена $p \in \mathbb{C}[x]$ определим как $H(p) = \max_{0 \le i \le n} \|a_i\|$, где $\|\cdot\|$ – некоторая норма комплексного числа, рассматриваемого как вектор из $\mathbb{R}^2$. Удобно выбрать норму $\|\cdot\|_\infty$, т.е. для $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\|z\| = \max\{|x|, |y|\}$.

Многочлены $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ будем отождествлять с векторами коэффициентов $p = (a_n, \ldots, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ (здесь учитывается, что каждый коэффициент многочлена – вектор из $\mathbb{R}^2$). В этих обозначениях $H(p) = \|p\|_\infty$.

Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, $Q > 1$ и $\delta \in (0,1)$. Определим следующие множества:

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{p(x) \in \mathbb{Z}[i][x] : \deg p \le n, H(p) \le Q\}, \tag{2}$$

$$\mathcal{F}_n(Q, \delta) = \{p(x) \in \mathcal{P}_n(Q) : \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \ \ |\alpha_1 - \alpha_2| \le \delta\}. \tag{3}$$

Цель данной работы – оценить $\#\mathcal{F}_n(Q, \delta)$.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\#\mathcal{F}_n(Q, \delta) \ll Q^{2n+2}\delta + Q^{2n+1}. \tag{4}$$

Для доказательства теоремы 1 потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Оценим расстояние от точки $p \in \mathbb{R}^{2n+2}$ до ближайшей точки поверхности $D(p) = 0$.

Теорема 2. *Пусть у многочлена $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ корни α_1, α_2 таковы, что $|\alpha_1 - \alpha_2| \le \delta < 1$. Тогда существует многочлен $q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{C}[x]$, такой, что $D(q) = 0$ и*

$$\|p - q\| \ll H(p)\delta, \tag{5}$$

где $q = (b_n, \ldots, b_1, b_0)$. При этом $b_n = a_n$, $b_{n-1} = a_{n-1}$.

Доказательство. Пусть $\rho := (\alpha_1 - \alpha_2)/2$. $\rho \in \mathbb{C}$, $|\rho| < \delta/2$. Построим многочлен $q(x) = b_n(x - \beta_1)\ldots(x - \beta_n)$. Выберем $b_n = a_n$, а корни определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 - \rho, \\ \beta_2 &= \alpha_2 + \rho, \\ \beta_i &= \alpha_i, \ i = 3, \ldots, n \end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, $\beta_1 = \beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$.

Нетрудно видеть, что при таком выборе корней многочлена $q(x)$ у него будут действительные коэффициенты, и $b_{n-1} = a_{n-1}$. Введем обозначения для симметрических функций

$$\sigma_k(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_k}, \quad k=0,\dots,n. \tag{7}$$

Полагаем, $\sigma_0(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1$, $\sigma_k(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$ при $k<0$ и при $k>n$.

Обозначим $\mathcal{N}=\{1,\dots,n\}$ – множество натуральных чисел от 1 до n. Пусть $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$. $\alpha_{\mathcal{M}}=(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_k})$ – упорядоченный набор (вектор), где $i_m\in\mathcal{M}$, $m=1,\dots,k$, – различные элементы множества $\mathcal{M}$, $k=\#\mathcal{M}$.

$$\sigma_k(\alpha_{\mathcal{M}}) = \sum_{\substack{\mathcal{I}\subseteq\mathcal{M}\\ \#\mathcal{I}=k}}\prod_{i\in\mathcal{I}}\alpha_i.$$

$$\frac{\partial\sigma_k(\alpha_{\mathcal{M}})}{\partial\alpha_i} = \begin{cases}\sigma_{k-1}(\alpha_{\mathcal{M}\setminus\{i\}}), & i\in\mathcal{M},\\ 0, & i\notin\mathcal{M}.\end{cases} \tag{8}$$

С учетом введенных обозначений

$$a_k = a_n\sigma_{n-k}(\alpha_{\mathcal{N}}), \quad k=0,\dots,n. \tag{9}$$

Чтобы оценить насколько отличаются коэффициенты рассмотрим разность

$$\sigma_k(\alpha_{\mathcal{N}}+\Delta\alpha_{\mathcal{N}})-\sigma_k(\alpha_{\mathcal{N}}) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{\mathcal{I}\subseteq\mathcal{N}\\ \#\mathcal{I}=m}}\sigma_{k-m}(\alpha_{\mathcal{N}\setminus\mathcal{I}})\prod_{i\in\mathcal{I}}\Delta\alpha_i, \tag{10}$$

где $\Delta\alpha_i=\alpha_i-\alpha_{i-1}, i=1,\dots,N$. Оценим правую часть (10) сверху. Для этого понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *(Фельдман [1]) Для любого набора корней $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_t}$, $t\le n$, $i_k\ne i_l$ при $k\ne l$ справедливо неравенство*

$$|\alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_t}|\leqslant(n+1)2^n\cdot\frac{H(p)}{|a_n(p)|}, \tag{11}$$

где $a_n(p)=a_n$ – старший коэффициент многочлена $p(x)$, $H(p)$ – высота многочлена $p(x)$.

Из леммы Фельдмана следует

$$|\sigma_k(\alpha_{\mathcal{M}})|\ll\frac{H(p)}{|a_n(p)|}\ \forall\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N},\quad k=0,\dots,n.$$

Полагая все $|\Delta\alpha_i|<1$, получаем

$$|\sigma_k(\alpha_{\mathcal{N}}+\Delta\alpha_{\mathcal{N}})-\sigma_k(\alpha_{\mathcal{N}})|\ll\frac{H}{|a_n|}\cdot\sum_{i\in\mathcal{N}}|\Delta\alpha_i|. \tag{12}$$

Из (6) следует $|\Delta\alpha_i| < \delta$, что влечет

$$|a_k - b_k| \ll H(p)\delta, \quad k = 0,\dots,n.$$

Это доказывает теорему.

Пусть

$$W_n = W_n(\delta) := \{p \in \mathbb{C}[x] : \deg p \le n, H(p) \le 1, \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \ \ |\alpha_1 - \alpha_2| \le \delta\},$$

$$G_n(r) := \{p \in \mathbb{C}[x] : \deg p \le n, H(p) \le 1, \exists\, q \in \mathbb{C}[x], D(q) = 0, \|p - q\| \le r\}.$$

Следствие 1. *Существует постоянная $c(n)$, такая, что*

$$W_n(\delta) \subseteq G_n(c(n)\delta). \tag{13}$$

Рассмотрим решетку в $\mathbb{R}^d$

$$L_d(Q) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : x_i = \frac{a_i}{Q}, a_i \in \mathbb{Z}, i = 1,\dots,d\right\}.$$

Обозначим открытый d-мерный куб с центром в точке $x = (x_1,\dots,x_d)$ и длиной стороны Q^{-1}

$$\pi(x,Q) := \left\{y \in \mathbb{R}^d : y_i = x_i + \frac{t_i}{Q}, t_i \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), i = 1,\dots,d\right\}.$$

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}$ – шар радиуса r с центром в x.

Обозначим покрытие области $\mathcal{D}$ шарами радиуса r

$$\mathcal{D}_B(r) = \bigcup_{x \in \mathcal{D}} B(x,r).$$

Введем обозначения

$$\Lambda(Q) = L_d(Q) \cap \mathcal{D},$$

$$\mathcal{D}^*(Q) = \bigcup_{x \in \Lambda(Q)} \pi(x,Q).$$

Очевидно, $\mathcal{D}^*(Q) \subseteq \mathcal{D}_B(\sqrt{d}/Q)$, что влечет $mes_d \mathcal{D}^*(Q) \le mes_d \mathcal{D}_B(\sqrt{d}/Q)$. Принимая во внимание соотношение $mes_d \mathcal{D}^*(Q) = Q^{-d} \cdot \#\Lambda(Q)$, получаем:

Теорема 3. *Число точек решетки $L_d(Q)$ в области $\mathcal{D}$ удовлетворяет неравенству*

$$\#\Lambda(Q) \le Q^d \cdot mes_d \mathcal{D}_B(\sqrt{d}/Q), \tag{14}$$

где $\mathcal{D}_B(r)$ – покрытие множества $\mathcal{D}$ радиуса r.

Полагаем $d = 2n+2$ и $\mathcal{D} = W_n(\delta)$. Легко заметить, что $\#\Lambda(Q) = \#\mathcal{F}_n(Q,\delta)$. Из следствия теоремы 2 и теоремы 3 получаем

$$\#\mathcal{F}_n(Q,\delta) \le Q^{2n+2} \cdot mes_{2n+2} G_n(c(n)\delta + \sqrt{2n+2}/Q).$$

При достаточно малом δ и большом Q получаем

$$mes_{2n+2} G_n(c(n)\delta + \sqrt{2n+2}/Q) = S \cdot (c(n)\delta + \sqrt{2n+2}/Q) + o(\delta + Q^{-1}) \ll \delta + Q^{-1},$$

где $S = mes_{2n+1}\{p \in \mathbb{R}^{2n+2} : \|p\|_\infty \le 1, D(p) = 0\}$. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Фельдман Н.И.*** Приближение некоторых трансцендентных чисел / Н И. Фельдман // Известия Акад. Наук СССР. Сер. матем. – 19(1951). – С. 53–74.

Поступила в редакцию 19.07.2012 г.