УДК 511.36

Н.В. ШАМУКОВА, Н.В. САКОВИЧ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

В работе получены двухсторонние оценки для расстояний между сопряженными алгебраическими числами второй и третьей степени. Эти оценки выводятся из некоторых точных теорем метрической теории диофантовых приближений [1-5].

В теории диофантовых приближений важны результаты о распределении рациональных чисел. В данной работе изучается распределение алгебраических чисел второй и третьей степени. Доказаны нижние и верхние оценки для расстояний между квадратичными иррациональностями, алгебраическими и целыми алгебраическими числами третьей степени. Основу доказательства составляют метрические теоремы о разрешимости систем диофантовых неравенств в целочисленных полиномах для множеств точек из произвольного интервала положительной плотности.

Пусть $P_2(x)=\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0$ квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, имеющий иррациональные корни. Это означает, что его дискриминант не является квадратом целого числа, в противном случае корни будут рациональными числами.

Обозначим $H=H(P)=\max\limits_{0\le j\le 2}|a_j|$ и пусть $x\in I\subset\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. При любом целом $Q>1$ существует многочлен $P_2(x)$, $H(P)\le Q$, что для $\forall x\in I$ выполняется неравенство

$$\left|P_2(x)\right|<Q^{-2}. \quad (1)$$

Обозначим через α_1 и α_2 корни $P_2(x)$. Пусть в (1) для заданного x корень α_1 – ближайший к x.

В работе будут доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Существует постоянная c_1 такая, что для любых корней α_1 и α_2 полинома $P_2(x)$ выполняется неравенство

$$|\alpha_1-\alpha_2|>c_1 H(\alpha_1)^{-1}. \quad (2)$$

При некоторой эффективно вычисляемой величине $c_2(n)$ можно построить бесконечно много полиномов $P_2(x)$, для которых

$$|\alpha_1-\alpha_2|>c_2 H(\alpha_1)^{-1}. \quad (3)$$

Теорема 2. При некоторых эффективно вычисляемых величинах c_3 и c_4 теорема 1 справедлива для многочленов третьей степени, если неравенство (2) заменить на неравенство

$$|\alpha_1-\alpha_2|>c_3 H(\alpha_1)^{-2},$$

а неравенство (3) на неравенство

$$|\alpha_1-\alpha_2|>c_4 H(\alpha_1)^{-4/3}.$$

Теорема 3. Неравенства типа (2) и (3) справедливы для целых алгебраических чисел. При этом неравенства принимают вид

$$|\alpha_1-\alpha_2|>c_5 H(\alpha)^{-2}$$

$$|\alpha_1-\alpha_2|<c_6 H(\alpha)^{-1}.$$

Основу доказательства всех трех теорем составляет следующая теорема, которую мы докажем для многочленов третьей степени

Теорема 4. Обозначим через $M_3(Q)$ множество точек $x \in I$, для которых справедлива система неравенств

$$|P(x)| < c_7 Q^{-3}, \quad |P'(x)| < c_8 Q, \tag{4}$$

Тогда при $c_7 c_8 < 2^{-12}$ выполняется неравенство

$$\mu M_3(Q) < 0{,}5(b-a), \tag{5}$$

Вначале перейдем от произвольных целочисленных многочленов в (4) к неприводимым многочленам с условием

$$|a_3| > c_9 H. \tag{6}$$

Это делается аналогично как в [3].

Обозначим через $\mathfrak{R}_3(Q)$ множество неприводимых многочленов $P(t)$ с условием (6) и $H(P) \le Q$, а через $\bar{\mathfrak{R}}_3(H)$ множество неприводимых многочленов высоты H с условием (6). Относительно α_1 произведем упорядочение остальных корней

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \le |\alpha_1 - \alpha_3|. \tag{7}$$

Введем множество

$$S(\alpha_1) = \left\{ x \in I : |x - \alpha_1| = \min_{1 \le j \le 3} |x - \alpha_j| \right\}.$$

Далее будем рассматривать систему неравенств (4) при $x \in S(\alpha_1)$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ введем $\varepsilon_1 = \varepsilon N^{-1}$, где $N = N(n) > 0$ достаточно большое число и пусть $T = \left[\varepsilon_1^{-1}\right]$. Определим числа p_j, j=2,3 из условия

$$|\alpha_1 - \alpha_j| = H^{-\rho_j}. \tag{8}$$

В силу (7) $\rho_3 \le \rho_2$.

Лемма 1. Пусть справедливо неравенство (6). Тогда для любого j, $1 \le j \le 3$ выполняется неравенство $|a_j| < c_{10}$.

Лемма 2. Пусть $P(x) \in \bar{\mathfrak{R}}_3(H)$ и $x \in S(\alpha_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} &|x - \alpha_1| \le 3|P(x)||P'(x)|^{-1}, \\ &|x - \alpha_1| \le 4|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ &|x - \alpha_1| \le 3 \min_{2 \le j \le 3} \left(2^{n-j} |P(x)||P'(x)|^{-1} \prod_{k=2}^{j} |\alpha_1 - \alpha_k| \right)^{1/j}. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как корни α_j ограничены, то из (7) и (9) получаем $p_j > -\frac{\varepsilon}{2}$. Определим целые числа l_j, $2 \le j \le 3$ из неравенств

$$\frac{l_j - 1}{T} \le \rho_j < \frac{l_j}{T}\ ,\ l_3 \le l_2$$

и положим $\rho_1 = (l_2 + l_3)T^{-1}$.

Нетрудно доказать [3], что число векторов $\bar{l} = (l_2, \dots, l_n)$ для многочленов $P(t) \in \bigcup\limits_{H=1}^{\infty} \tilde{\Re}_3(H)$ конечно. Зафиксируем один из таких векторов и подкласс $\tilde{\Re}_3(H)$ с фиксированным вектором $\bar{l}$ обозначим через $\Re_3(H,\bar{l})$.

Лемма 3 [4]. Пусть $P(t) \in \tilde{\Re}_3(H,l)$. *Тогда при любом* k, $1 \le k \le n$ *выполняется неравенство* $\left|P^{(l)}(\alpha_1)\right| < c(n)\, H^{1-\rho_k+(n-1)\varepsilon_1}$.

Лемма 4 [5]. Пусть P_1 *и* P_2 *два целочисленных многочлена степени не большей* n *и* $\max(H(P_1), H(P_2)) \le K$, *для которых неравенство*

$$\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < K^{-\tau}$$

выполняется при всех $x \in I$, $\mu I = K^{-\eta}$, $\eta > 0$. *Тогда при любом* $\delta > 0$ *и* $K > K_0(\delta)$ *справедливо неравенство*

$$\tau + 1 + 2\max(\tau + 1 - \eta,\ 0) < 2n + \delta.$$

Доказательство теоремы 4.

Рассмотрим частный случай системы неравенств (4)

$$|P(x)| < c_7 Q^{-3}\ ,\ c_6 Q^{\nu} < |P'(x)| < c_8 Q\ ,\ \nu > \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Множество решений (10) обозначим $M_{3,1}(\bar{c},\ Q)$. Используя *лемму 2*, можно доказать, что множество решений неравенства (1) содержится в интервале

$$\sigma(P) : \left\{x \in I : |x - \alpha_1| < 6c_7\ \ Q^{-3}\left|P'(\alpha_1)\right|^{-1}\right\}. \tag{11}$$

При некотором c_{11} введем интервал

$$\sigma_1(P) : \left\{x \in I : |x - \alpha_1| < c_{11}\left|P'(\alpha_1)\right|^{-1}\right\}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что

$$\mu\sigma_1(P) < 6c_7 c_{11} Q^{-3}. \tag{13}$$

Для $x \in \sigma_1(P)$ разложим многочлен $P(x)$ в ряд Тейлора в окрестности корня α_1

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2 + \frac{1}{6}P'''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^3. \tag{14}$$

Так как $P(\alpha_1)=0$, а по (10),(12) и (14) при большом Q

$$\left|P'(\alpha_1)(x-\alpha_1)\right|<c_{11}$$

$$\left|P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^j\right|<cQQ^{-2v}<\frac{c_{11}}{3},$$

то для всех $x\in\sigma_1(P)$ справедливо неравенство

$$\left|P(x)\right|<2\ \ c_{11}. \tag{15}$$

Зафиксируем вектор $\bar{b}$. Множество многочленов $P(t)\in\tilde{\Re}_3(H,\bar{l})$ с одним и тем же вектором $\bar{b}$ обозначим через $\Re(\bar{b})$. Покажем, что при $c_{11}=0,25$ интервалы $\sigma_1(P_1)$ и $\sigma_2(P_2)$, $P_1,P_2\in\tilde{\Re}_3(H,\bar{l})\cap\Re(\bar{b})$ не пересекаются. Предположим противное. Пусть $\sigma_2=(P_1,P_2)=\sigma_1(P_1)\cap\sigma_1(P_2)\neq 0$. Тогда при $x\in\sigma_2(P_1,P_2)$ из (15) получаем

$$\left|P_2(x)-P_1(x)\right|<4c_{11}=1. \tag{16}$$

У многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ совпадают все коэффициенты, кроме свободного члена. Поэтому их разность есть некоторое целое число, отличное от нуля. Неравенство (16) привело к противоречию.

Предположим сейчас, что множество значений многочлена $P'(x)-a_1=3a_2x^2+2a_2x$ для $x\in I$ и некотором $a_{l_0}=a_1$ принадлежит интервалу $[-c_8Q,c_8Q]$. Тогда если $a_1<a_{l_0}-2c_8Q$ и $a_1>a_{l_0}+2c_8Q$, то получим $\left|P'(x)\right|>c_8Q$. Таким образом, при фиксированном векторе $\bar{b}_1=(b_3,b_2)$ коэффициент a_1 многочлена $P(x)$ может принимать не более $4c_8Q$ значений. Число различных векторов $\bar{b}_1$ не превосходит $(2Q+1)^2$, что при $Q>Q_0$ не превосходит 2^3Q^2. Число же векторов b с учетом диапазона множества значений не превосходит $2^5c_8Q^3$. Мы показали, что при $c_{11}=0,25$ интервалы $\sigma_1(P)$ не пересекаются, поэтому

$$\sum_{P=\Re(\delta)}\mu\sigma_1(P)<|I|. \tag{17}$$

Из (17) и (13) получаем

$$\sum_{P=\Re(\delta)}\mu\sigma(P)<6\cdot 2^3c_7Q^{-3}|I|. \tag{18}$$

Просуммируем оценку (18) по всем $\bar{b}\in\Re(\bar{b})$ с учетом числа значений a_1

$$\sum_{b=\Re(\delta),}\ \sum_{P=\Re(\delta),}\mu\sigma(P)<6\cdot 2^8c_8|I|. \tag{19}$$

При $c_7c_8 < 2^{-12}$ получаем, что

$$\mu M_{3,1}(\bar{c},Q) < \frac{1}{4}|I|. \tag{20}$$

Если множество значений многочлена $P'(x)-a_{1_0}$ не попадает в интервал $[-c_8Q, c_8Q]$,то представим интервал $I = \bigcup_{j\ge1} I_j$ таким образом, чтобы множество значений $P'(x)-a_{1_0}$ содержалось в некотором интервале длины $2c_8Q$. Для каждого из интервалов I_j суммирование по j приведет к (20).

Дальнейшее доказательство зависит от структуры вектора $\bar{l}$ и величины $l_2T^{-1}+p_1$.

Утверждение 1. Обозначим через $M_{3,2}(\bar{c}, Q)$ множество $x \in I$, для которых выполняется система неравенств (4) *и*

$$l_2T^{-1}+p_1 > 4-\varepsilon. \tag{21}$$

Тогда

$$\mu M_{3,2}(\bar{c},Q) < \frac{1}{16}|I|. \tag{22}$$

Доказательство. Из второго неравенства (9) при $j=2$ получаем

$$|x-\alpha_1| \ll Q^{-2+\frac{p_2}{2}+2\varepsilon_1}. \tag{23}$$

Поделим интервал I на равные интервалы I_j, $|I_j| = Q^{-\mu_1}$, $\mu_1 = \dfrac{3-p_2-\varepsilon}{2}$. Число таких интервалов не превосходит $|I|Q^{\mu_1}$. Рассмотрим вначале те интервалы I_j, в которых система неравенств (4) либо имеет решение, либо существует только один полином $P(x) \in P_3(Q,\bar{l})$, для которого при $x \in I_j$ неравенство (4) имеет решение. Тогда число всех полиномов не превосходит $|I|Q^{\mu_1}$. Просуммируем оценку (23) по всем интервалам I_j. Получим оценку

$$cQ^{-2+\frac{p}{2}+2\varepsilon-\frac{3-p_2}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}|I| < \frac{1}{16}|I|.$$

при достаточно большом Q. Покажем, что при $x \in I_j$ неравенство (5) не может быть разрешимо при двух полиномах. Предположим противное и $P_1(x)$, $P_2(x)$ такие полиномы. Они неприводимы. Разложим их на интервале I_j в ряд Тейлора и оценим все слагаемые сверху. Получаем

$$|P_1(x)| \ll Q^{-3+1-\frac{\varepsilon}{4}} = Q^{-2-\frac{\varepsilon}{4}}. \tag{24}$$

Ясно, что такую же оценку (24) получим и для $P_2(x)$. Воспользуемся *леммой 4.* Здесь $\tau+1 = 3+\dfrac{\varepsilon}{4}$, $\eta = \mu_1$, $2(\tau+1-\eta) = 6+\dfrac{\varepsilon}{2}+p_2+\varepsilon = p_2+\dfrac{3}{2}\varepsilon$.

Применив лемму, получим

$$6+2\varepsilon+p_2<6+\delta,$$

что при $\delta<2\varepsilon$ противоречиво, поскольку $p_2\geq 0$.

Утверждение 2. Обозначим через $M_{3\,3}\left(\overline{c},Q\right)$ *множество* $x\in I$, *для которых выполняется система неравенств* (4) *и*

$$3{,}1<l_2T^{-1}+p_1\leq 4-\varepsilon.$$

Тогда

$$M_{3,3}\left(\overline{c},Q\right)<\frac{1}{16}|I|. \quad (25)$$

Доказательство утверждения проводится аналогично доказательству *утверждения 1* с заменой третьей оценки в (9) на вторую оценку.

Другие три диапазона изменения величины $l_2T^{-1}+p_1$ рассмотрены в [5], где показано, что мера тех $x\in I$, для которых выполняется неравенство (4) не превосходит $\frac{1}{8}|I|$. Суммируя эту оценку с (20), (22) и (25), получаем утверждение теоремы 4.

Покажем теперь, как из *теоремы 4* могут быть получены *теоремы 1-3.* Остановимся на *теореме 2.* Дискриминант многочлена третьей степени равен

$$D(P)=a_3^4\left(\alpha_1-\alpha_2\right)^2\left(\alpha_1-\alpha_3\right)^2\left(\alpha_2-\alpha_3\right)^2.$$

Для неприводимых многочленов $D(P_3)\neq 0$, а поскольку это целое число, то $\left|D(P_3)\right|\geq 1$. Из *леммы 1* следует, что $\left|\left(\alpha_1-\alpha_3\right)\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\right|<c_{12}$. Поэтому

$$1\leq\sqrt{\left|D(P_3)\right|}\leq H^2\left|\alpha_1-\alpha_2\right|c_{12},$$

Отсюда следует первое утверждение *теоремы 2.* Для доказательства второго неравенства в *теореме 2* в каждой точке $x\in B_2=I\setminus B_1$, $\mu B_2>\frac{1}{2}|I|$, построим многочлен $P_1(x)$, такой что $\left|P_1(x_1)\right|<Q^{-v_1}$, $\left|P'(x)\right|>2^{-12}Q^{-v_2}$, $v_1+v_2=2$.

По второму неравенству *леммы 2* получаем $\left|x_1-\alpha_1\right|<2^{14}Q^{-v_1+v_2}$. Из разложения $P'(x)$ по формуле Лагранжа в окрестности α_1 получим, что $P'(x)$ и $P'(\alpha_1)$ при условии $v_2\leq\frac{1}{3}$ имеют одинаковый порядок, поэтому из равенства $\left|P'(x)\right|=\left|a_3\right|\left|\alpha_1-\alpha_2\right|\left|\alpha_1-\alpha_3\right|$ получаем $\left|P'(\alpha_1)\right|<c_{13}H^{-\frac{1}{3}}$ и, после деления на $\left|a_3\right|>c_{10}H$ второе неравенство в *теореме 2. Теоремы 1 и 3* доказываются аналогично.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гельфонд, А.О.*** Трансцендентные и алгебраические числа / А.О. Гельфонд – М. : Гостехиздат, 1952. – 224 с.
2. ***Галочкин, А.И.*** Введение в теорию чисел / Ю.В. Нестеренко, А.Б Шидловский. – М. : Изд-во Московского университета, 1984.
3. ***Спринджук, В.Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 184 с.
4. ***Берник, В.И.*** Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. – 1980. – Т. 44. – № 1. – С. 24-45.
5. ***Берник, В.И.*** О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – № 1. – С. 17-28.

Поступила в редакцию 06.07.2010 г.