СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИН ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦИКЛА

УДК 517+530.1

ПРЯМОЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ (2+1)-МЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАХАРОВА-КУЗНЕЦОВА СО СТЕПЕННЫМИ ЗАКОНАМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Авторы: ***Жестков Сергей Васильевич,*** *заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений, УО «МГУ им. А.А. Кулешова»*

Новашинская Виктория Сергеевна, *аспирант Института технологии металлов НАНБ*

Контактная информация: тел.: (+375 222) 28-30-60, (+375 29) 327-81-40, эл. почта: zhestkov_S@rambler.ru

Описание: *В работе развит прямой метод построения топологических солитонов для уравнений Захарова-Кузнецова (ЗК) со степенными законами нелинейности.*

Description: *The direct method of investigation of topological solitons of (2+1)-dimensional Zacharov-Kuznetsov equations with power laws of nonlinearity is developed.*

Область применения разработки: Нелинейная физика плазмы, нелинейная гидродинамика.

Основные преимущества разработки: Получены законы распространения топологических солитонов в нелинейных средах, которые связывают параметры солитонов с параметрами среды. Аналогов в современной литературе нет.

Известно [1-7], что топологические солитоны отличаются от других солитонов поведением на бесконечности и своей структурой, которая характеризуется одной или двумя величинами, известными как топологические заряды.

Простейшим примером топологического солитона является решение краевой задачи [4]

$$f''(\xi) = Af(\xi) - Bf^3(\xi), \quad \xi = kx + ly - vt, \tag{1}$$

$$f(-\infty) = -1, \quad f(+\infty) = 1, \quad f'(-\infty) = f'(+\infty) = 0. \tag{2}$$

где A, B, k, l, v – действительные числа, которое можно построить прямым интегрированием (1), (2). Это решение имеет вид

$$f(\eta) = \lambda th\eta, \quad \eta \equiv \xi - \xi_0, \tag{3}$$

где λ – искомый параметр, а законы его распространения задаются следующими соотношениями:

$$A = -2, \quad \lambda^2 = -\frac{2}{B}. \tag{4}$$

Для описания более сложного поведения топологического солитона на бесконечности естественно использовать анзац вида

$$f(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1 th(\xi - \xi_0), \tag{5}$$

где λ_0, λ_1 – искомые действительные параметры волны (5).

I. Рассмотрим уравнение ЗК со степенным законом нелинейности и дисперсионными членами второго и третьего порядков

$$u_t + a_1 u^{2m} u_x + a_2 u^{2m} u_y + a_3 u_{xxx} + a_4 u_{xyy} + a_5 u_{xx} + a_6 u_{xy} = 0, \quad m > 0, \tag{6}$$

с произвольными действительными коэффициентами $\overline{a_1, a_6}$. Топологический солитон уравнения (6) строится в виде плоской волны $f(\xi)$, которая удовлетворяет волновому уравнению

$$f''(\xi) + Af'(\xi) = Bf(\xi) - Cf^{2m+1}(\xi), \tag{7}$$

$$A = \frac{a_5 k^2 + a_6 kl}{a_4 kl^2 - a_3 vk^2}, \quad B = \frac{v}{a_4 kl^2 - a_3 vk^2}, \quad C = \frac{a_1 k + a_2 l}{(2m+1)\left(a_4 kl^2 - a_3 vk^2\right)},$$

$$a_4 kl^2 - a_3 vk^2 \neq 0.$$

Используя результаты аналитического моделирования из [4], решение уравнения (7), в отличие от [1], строится в виде

$$f(\xi) = \left[\lambda_0 + \lambda_1 th(\xi - \xi_0)\right]^{\mu}, \quad \mu = \frac{1}{m}, \tag{8}$$

где $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0 \geq |\lambda_1|$. Подставляя (8) в (7), получим следующие соотношения:

$$\lambda_1^2 = -\frac{1}{C}\mu(\mu + 1), \tag{9}$$

$$\lambda_0 = -\frac{A\lambda_1}{4\mu + 2}, \tag{10}$$

$$-2\mu^2\lambda_1 - A\mu\lambda_0 = B\lambda_1 - 6C\lambda_0^2\lambda_1, \tag{11}$$

$$-2\mu\lambda_0 + A\mu\lambda_1 = 2B\lambda_0 - 4C\lambda_0^{\ 3}, \tag{12}$$

$$\mu(\mu-1)\lambda_1^{\ 2} + A\mu\lambda_0\lambda_1 = B\lambda_0^{\ 2} - C\lambda_0^{\ 4}. \tag{13}$$

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (7) имело решение вида (8), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (9)-(13).*

Исследуем соотношения (9)-(13). Из (10) с учетом (9) и (10) найдем

$$B(4\mu+2)^2 = -2\mu^2(4\mu+2)^2 - 2\mu(\mu+2)A^2.$$

Подставляя последнее соотношение в (13) с учетом (10) и (12), получим квадратное уравнение для величины A^2, т.е.

$$x^2 - \frac{(4\mu+2)^2(2\mu+2)}{\mu+3}x + \frac{(\mu-1)(4\mu+2)^4}{\mu+3} = 0, \tag{14}$$

где $x = A^2$. Из (14) найдем, что $A = -(4\mu+2)$. (Второй корень не удовлетворяет рассматриваемым условиям $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0 \geq |\lambda_1|$). Поэтому

$$\lambda_0 = \lambda_1 \equiv \lambda > 0, \quad \lambda = \sqrt{-\frac{1}{C}\mu(\mu+1)}, \tag{15}$$

если

$$C < 0, \quad B = -4\mu(\mu+1), \quad A = -(4\mu+2). \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (15), (16). Тогда уравнение (6) имеет решение вида*

$$u(t,x,y) = f(\xi) = \lambda^{\mu}\left[1 + th(\xi-\xi_0)\right]^{\mu},$$

причем этот топологический солитон удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$f(-\infty) = 0, \quad f(+\infty) = (2\lambda)^{\mu}.$$

II. Рассмотрим уравнение ЗК с законом нелинейности удвоенной степени и дисперсионными членами третьего порядка

$$u_t + \left(a_1u^{2m} + a_2u^{4m}\right)u_x + \left(a_3u^{2m} + a_4u^{4m}\right)u_y + a_5u_{txx} + a_6u_{xyy} = 0, \ m > 0, \tag{17}$$

где $\overline{a_1, a_6}$ – произвольные действительные числа. Топологический солитон уравнения (17) строится в виде плоской волны $f(\xi)$, которая удовлетворяет волновому уравнению

$$f''(\xi) = Af(\xi) - Bf^{2m+1}(\xi) - Cf^{4m+1}(\xi), \tag{18}$$

где

$$A=\frac{v}{a_6kl^2-a_5vk^2},\quad B=\frac{a_1k+a_3l}{(2m+1)\left(a_6kl^2-a_5vk^2\right)},\quad C=\frac{a_2k+a_4l}{(4m+1)\left(a_6kl^2-a_5vk^2\right)},$$

$$a_6kl^2-a_5vk^2\neq 0.$$

Решение уравнения (18), в отличие от [1], строится в виде

$$f(\xi)=F^{\mu}(\xi),\quad \mu=\frac{1}{2m},\tag{19}$$

где $F(\xi)$ – неизвестная волновая функция. Тогда уравнение (18) можно преобразовать к виду

$$\mu F(\xi)F''(\xi)+\mu(\mu-1)\left(F'(\xi)\right)^2-AF^2+BF^3+CF^4=0.\tag{19}$$

Используя форму топологического солитона (5), представим решение следующим образом:

$$F(\xi)=\lambda_0+\lambda_1 th(\xi-\xi_0),\tag{20}$$

где $\lambda_0>0$, $\lambda_0\geq|\lambda_1|$. Подставляя (20) в (19), получим следующие соотношения:

$$\begin{cases}C\lambda_1^{\,2}+\mu^2+\mu=0,\\ 2\mu\lambda_0+B\lambda_1^{\,2}+4C\lambda_0\lambda_1^{\,2}=0,\\ -2\mu^2-A+3B\lambda_0+6C\lambda_0^{\,2}=0,\\ -2\mu-2A+3B\lambda_0+4C\lambda_0^{\,2}=0,\\ \mu(\mu-1)\lambda_1^{\,2}-A\lambda_0^{\,2}+B\lambda_0^{\,3}+C\lambda_0^{\,4}=0.\end{cases}\tag{21}$$

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение (18) имело решение вида (19), (20), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (21).*

Соотношения (21) являются законами распространения топологического солитона для уравнения (17). Из (21) нетрудно найти, что

$$\lambda_0=-\frac{B(\mu+1)}{C(4\mu+2)}\quad (B>0),\quad \lambda_1^{\,2}=-\frac{\mu^2+\mu}{C}\quad (C<0),\tag{22}$$

$$A=4\mu^2,\quad \frac{B^2}{C}=-\frac{4\mu(2\mu+1)^2}{\mu+1}.\tag{23}$$

Теорема 4. *Пусть $B>0$, $C<0$ и выполнены условия (22), (23). Тогда уравнение (17) имеет решение вида*

$$u(t,x,y)=f(\xi)=\left[\lambda_0+\lambda_1 th(\xi-\xi_0)\right]^{\frac{1}{2m}},$$

причем $\lambda_0=|\lambda_1|$ и этот топологический солитон удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$f(-\infty)=0,\quad f(+\infty)=\left[\lambda_0+\lambda_1\right]^{\frac{1}{2m}},\quad \textit{если } \lambda_1>0;$$

$$f(-\infty)=\left[\lambda_0+|\lambda_1|\right]^{\frac{1}{2m}},\quad f(+\infty)=0,\quad \textit{если } \lambda_1<0.$$

III. Рассмотрим уравнение ЗК с законом нелинейности утроенной степени и дисперсионными членами четвертого порядка

$$\begin{aligned}&u_t+\left(a_1u^{2m}+a_2u^{4m}+a_3u^{6m}\right)u_x+\left(a_4u^{2m}+a_5u^{4m}+a_6u^{6m}\right)u_y+\\&+a_7u_{xxxx}+a_8u_{xxyy}=0,\quad m>0,\end{aligned}\tag{24}$$

где $\overline{a_1,a_8}$ – произвольные действительные числа. Топологический солитон уравнения (17) строится в виде плоской волны $f(\xi)$, которая удовлетворяет волновому уравнению

$$-vf(\xi)+A_1f^{2m+1}(\xi)+A_2f^{4m+1}(\xi)+A_3f^{6m+1}(\xi)+A_4f'''(\xi)=0,\tag{25}$$

где

$$A_1=\frac{1}{2m+1}\left(a_1k+a_4l\right),\quad A_2=\frac{1}{4m+1}\left(a_2k+a_5l\right),$$

$$A_3=\frac{1}{6m+1}\left(a_3k+a_6l\right),\quad A_4=a_7k^4+a_8k^2l^2,$$

Решение уравнения (25) строится в виде (19). Тогда уравнение (25) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}&-vF^3(\xi)+A_1F^4(\xi)+A_2F^5(\xi)+A_3F^6(\xi)+\\&+A_4\left[p\left(F'(\xi)\right)^3+qF(\xi)F'(\xi)F''(\xi)+\mu F^2(\xi)F'''(\xi)\right]=0.\end{aligned}\tag{26}$$

Решение уравнения (26) строится в виде (20). Подставляя (20) в (26), получим следующие соотношения:

$$A_3\lambda_1^{\,3}-A_4\left(p+2q+6\mu\right)=0,\tag{27}$$

$$\lambda_1^{\,3}\left(A_2+6A_3\lambda_0\right)-2A_4\lambda_0\left(q+6\mu\right)=0,\tag{28}$$

$$\lambda_1^3\left(A_1+5A_2\lambda_0+15A_3\lambda_0^2\right)+A_4\lambda_1^2\left(3p+4q+8\mu\right)-6A_4\mu\lambda_0^2=0, \quad (29)$$

$$\lambda_1\left(-v+4A_1\lambda_0+10A_2\lambda_0^2+20A_3\lambda_0^3\right)+4A_4\lambda_0\left(q+4\mu\right)=0, \quad (30)$$

$$\begin{gathered}\lambda_0\lambda_1\left(-3v+6A_1\lambda_0+10A_2\lambda_0^2+15A_3\lambda_0^3\right)-\\ -A_4\lambda_1^2\left(3p+2q\right)+2A_4\mu\left(4\lambda_0^2-\lambda_1^2\right)=0,\end{gathered} \quad (31)$$

$$\lambda_0\left(-3v+4A_1\lambda_0+5A_2\lambda_0^2+6A_3\lambda_0^3\right)-2A_4\lambda_1\left(q+2\mu\right)=0, \quad (32)$$

$$\lambda_0^3\left(-v+A_1\lambda_0+A_2\lambda_0^2+A_3\lambda_0^3\right)+A_4\lambda_1\left(p\lambda_1^2-2\mu\lambda_0^2\right)=0. \quad (33)$$

Теорема 5. *Для того чтобы уравнение (25) имело решение вида (19), (20), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (27)-(33).*

Эти соотношения являются законами распространения топологического солитона для уравнения (24). Для их исследования предположим, что $\lambda_0=\lambda_1\equiv\lambda>0$. Тогда из (27)-(33) найдем

$$A_1\lambda=4A_4\mu\left(3\mu^2+3\mu+1\right),\quad A_2\lambda^2=-6A_4\mu\left(\mu+1\right)^2, \quad (34)$$

$$A_3\lambda^3=A_4\mu\left(\mu+1\right)\left(\mu+2\right),\quad v=8A_4\mu^3=8\mu^3\left(a_7k^4+a_8k^2l^2\right). \quad (35)$$

Остальные соотношения выполняются тожественно. Следовательно, справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (34), (35). Тогда уравнение (24) имеет решение вида*

$$u\left(t,x,y\right)=f\left(\xi\right)=\lambda^{\frac{1}{2m}}\left[1+th\left(\xi-\xi_0\right)\right]^{\frac{1}{2m}},$$

которое удовлетворяет краевым условиям

$$f\left(-\infty\right)=0,\quad f\left(+\infty\right)=\left(2\lambda\right)^{\frac{1}{2m}}.$$

Таким образом, полученные результаты развивают теорию топологических солитонов для новых классов (2+1)-мерных уравнений ЗК со степенными законами нелинейности.

Список использованных источников:

1. **Biswas, A.** Topological and non-topological solitons for the generalized Zakharov – Kuznetsov modified equal width equation / A. Biswas // Int. J. Theor. Phys. – 2009. – Vol.48. – P. 2698-2703.

2. **Жестков, С.В.** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных: монография / С.В. Жестков // Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006. – 220 с.
3. **Жестков, С.В.** Конструктивный анализ топологических и нетопологических солитонов (2+1)-мерных обобщенных уравнений Захарова – Кузнецова / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. Сер.В. – 2011. – № 2(38). – С. 4-11.
4. **Новашинская, В.С.** Об одном подходе к исследованию солитоноподобных решений системы связанных уравнений КДФ / В.С. Новашинская // Оптика неоднородных структур – 2011: материалы III Междунар. науч.-практич. конф. – Могилев: УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – С. 248-251.
5. **Peng, Y.Z.** Exact traveling wave solutions for the Zakharov – Kuznetsov equation / Y.Z. Peng // Appl. Math. and Comput. – 2008. – Vol. 199. – P. 397-405.
6. **Peng, Y.Z.** Travelling wave-like solutions of the Zakharov – Kuznetsov equation with variable coefficients / Y.Z. Peng, E.VKrishnan, H. Feng // Pramana. – 2009. – Vol. 71. – N 1. – P. 49-55.
7. **Wazwaz, A.M.** Exact solutions for the ZK-MEW equation by using the tanh and sine-cosine methods / A.M. Wazwaz // Int. J. Comput. Math. – 2005. – Vol. 82. – N 6. – P. 699-708.