УДК 514.763.5

Л.А. РОМАНОВИЧ

О ГРУППОИДЕ Ли ПРОДОЛЖЕНИЙ ЛЕВЫХ СДВИГОВ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Важной задачей современной дифференциальной геометрии является исследование структур высших порядков на гладких многообразиях. Интенсивная научная работа в этом направлении ведется с начала 60-х годов нашего столетия. Классический подход к такому исследованию базируется на понятиях главного расслоения и присоединенного расслоения, а сами структуры определяются как подрасслоения в главных расслоениях или как сечения присоединенных расслоений и исследуются методом, основанным на изучении структурных уравнений указанных структур. Начало исследований в этом направлении заложено в работах Э. Картана, Г. Ф .Лаптева, А. М. Васильева, Ю.Г. Лумисте и других.

Наряду с этим в 50-х годах Ш.Эресман предложил метод исследования геометрических структур, основанный на использовании группоидов Ли и алгеброидов Ли. В 60-х годах вышел ряд работ Ш.Эресмана, П.Либерман, Нго ван Кё, выполненных этим методом. Между группоидами Ли и главными расслоениями установлено соответствие [1], из которого следует соответствие между расслоениями, ассоциированными с группоидами Ли и расслоениями, ассоциированными с главными расслоениями. Это соответствие позволяет применить группоиды Ли для описания структур высших порядков на гладких многообразиях. Такой подход имеет некоторые преимущества, так как позволяет более полно использовать алгебраические аспекты геометрии.

Ш. Кобаяси и К. Номидзу определяют G-структуру L (B, G) на гладком многообразии B как редукцию расслоения линейных реперов L (B, GL) к группе G, которая является подгруппой Ли группы Ли $GL = GL$ (n, R) [2]. Развивая эту теорию для более высоких порядков, В. Гийёмин, Ш. Стернберг, И. Зингер [3] определяют G-структуру порядка k на многообразии B как редукцию главного расслоения реперов к группе Ли G, имеющей точное дифференциальное представление порядка k , т.е. гомоморфизм $\varphi: G \to D_n^k$, где D_n^k – дифференциальная группа порядка k, состоящая из k-струй в точке О локальных диффеоморфизмов пространства R^n, которые оставляют точку О неподвижной.

Нго ван Кё применил метод Эресмана и теорию Спенсера к исследованию G-структур высшего порядка на гладком многообразии B, используя при этом понятие группоида Ли $\Pi^k(B)$, элементами которого являются k-струи локальных диффеоморфизмов многообразия B. Одним из вариантов определения G-структуры является следующее [4]:

G-структурой порядка k на многообразии B называется редукция группоида Ли $\Pi^k(B)$ к некоторому подгруппоиду Ли, группа изотропии которого изоморфна некоторой подгруппе Ли G группы Ли D_n^k .

Такой подход применим при изучении инвариантных структур на однородных пространствах. При этом важную роль играет группоид Ли $\Pi^k(B, H)$, который строится с помощью дифференциальных продолжений локальных левых сдвигов. Например, в работе [5] этот группоид используется при построении инвариантных связностей. Целью нашей работы является описание структуры группоида Ли в $\Pi^k(B, H)$ в виде редукции группоида Ли $\Pi^k(B)$.

Нго ван Кё [4, с.166] установил связь между подгруппоидами Ли произвольного группоида Ли и регулярными сечениями присоединенных к нему расслоений. Это соответствие ведёт к тому, что всякой G-структуре порядка k на многообразии B соответствует регулярное сечение присоединенного расслоения к $\Pi^k(B)$ и, обратно, регулярные сечения присоединенных к группоиду Ли $\Pi^k(B)$ расслоений определяют структуры порядка k на многообразии B. Например, расслоение $(S^2(T^*), p, B)$ является присоединенным к группоиду $\Pi^1(B)$. Регулярное ненулевое сечение этого расслоения определяет псевдориманову структуру на гладком многообразии B.

Пусть G-группа Ли, H – замкнутая подгруппа Ли группы Ли G, $B = G/H$ – однородное пространство; l_g: $B \to B$: $g_1H \to gg_1H$ – отображение левого сдвига на элемент $g \in G$. В работе [6] для описания дифференциальных структур порядка k на однородном пространстве B используются главное расслоение G (B, p, H), где p: $G \to G/H$ – каноническая проекция, и расслоение $L^k(B)$ реперов порядка k. Расслоение G(B, p, H) является присоединенным к группоиду Ли $\dfrac{G\times G}{H}$ [1], состоящему из элементов вида $\langle g_2, g_1\rangle = \{(g_2h, g_1h)/h \in H\}$. Структура группоида Ли на множестве $\dfrac{G\times G}{H}$, определяется с помощью отображений $\alpha(\langle g_2, g_1\rangle) = \pi(g_1)$, $\beta(\langle g_2, g_1\rangle) = \pi(g_2)$, $\varepsilon(gH) = \langle g, g\rangle$, $\langle g_3, g_2\rangle\langle g_2, g_1\rangle = \langle g_3g_2, g_2^{-1}g_1\rangle$. Расслоение реперов $L^k(B)$ является присоединенным к группоиду Ли $\Pi^k(B)$, состоящему из k-струй локальных диффеоморфизмов многообразия B. Структура группоида Ли на множестве $\Pi^k(B)$ определяется с помощью отображений $\alpha(j_x^k f) = x$, $\beta(j_x^k f) = f(x)$, $\varepsilon(x) = j_x^k id_B$, $j_{f(x)}^k \varphi \cdot j_x^k f = j_x^k(\varphi \circ f)$. Если $r = k$ то можно построить отображение $\mu_k^r : \Pi^k(B) \to \Pi^r(B)$: $j_x^k f \to j_x^r f$, причем $\mu_r^s \circ \mu_k^r = \mu_k^s$, если $s \le r \le k$.

Пусть $0 = H \in B$, $(\Pi^k(B))_0^0$ – группа изотропии группоида Ли $\Pi^k(B)$, состоящая из k-струй диффеоморфизмов многообразия B, у которых начало и конец совпадают с точкой 0, и изоморфная дифференциальной группе D_n^k. При таком подходе важную роль играет изотропное представление порядка k, которое является гомоморфизмом $i_k : H \to (\Pi^k(B))_0^0 : h \to j_0^k l_h$. Наименьшее из чисел k, для которого изотропное представление точно, называется порядком изотропии однородного пространства.

Изотропному представлению i_k соответствует морфизм группоидов Ли:

$$J_K : \frac{G \times G}{H} \to \Pi^k(B) : \langle g_2, g_1 \rangle \to j_x^k(l_{g_2} \circ l_{g_1^{-1}}),$$

где $x = g_1H$. Левому сдвигу $l_g : B \to B$. соответствуют отображения

$$l_g^k : \Pi^k(B) \to \Pi^k(B) : j_x^k f \to j_{gx}^k(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}}) \text{ и}$$

$$\bar{l}_g : \frac{G \times G}{H} \to \frac{G \times G}{H} :< g_2, g_1 > \to < gg_2, gg_1 >.$$

Лемма Отображения l_g^k и $\bar{l}_g$ обладают следующими свойствами:

1) $\mu_k^s \circ l_g^k = l_g^s \circ \mu_k^s$;
2) $\alpha \circ l_g^k = l_g \circ \alpha$, $\beta \circ l_g^k = l_g \circ \beta$;
3) $l_{g_1 g_2}^k = l_{g_1}^k \circ l_{g_2}^k$;
4) $J_k \circ \bar{l}_g = \bar{l}_g^k \circ J_k$.

Доказательство:

1. $(\mu_s^k \circ l_g^k)(j_x^k f) = \mu_k^s(j_{gx}^k(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}}) = j_{gx}^s(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}})$
и $(l_g^s \circ \mu_k^s)(j_x^k f) = j_{gx}^s(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}})$.
2. $(\alpha \circ l_g^k)(j_x^k f) = \alpha(j_{gx}^k(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}}) = gx$
и $(l_g \circ \alpha)(j_x^k f) = l_g(x) = gx$,
$(\beta \circ l_g^k)(j_x^k f) = \beta(j_{gx}^k(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}}) = gf(x)$
и $(l_g \circ \beta)(j_x^k f) = l_g(f(x)) = gf(x)$.

3. $l^k_{g_1g_2}(j^k_x f) = j^k_{g_1g_2x}(l_{g_1g_2} \circ f \circ l_{(g_1g_2)^{-1}})$ и

$$(l^k_{g_1} \circ l^k_{g_2})(j^k_x f) = l^k_{g_1}(j^k_{g_2x}(l_{g_2} \circ f \circ l_{g_2^{-1}})) = j^k_{g_1g_2x}(l_{g_1} \circ l_{g_2} \circ f \circ l_{g_2^{-1}} \circ l_{g_1^{-1}}) =$$

$$= j^k_{g_1g_2x}(l_{g_1g_2} \circ f \circ l_{(g_1g_2)^{-1}}).$$

4. $\left(J_k \circ \overline{l_g}\right)(\langle g_2, g_1\rangle) = J_k(\langle gg_2, gg_1\rangle) = j^k_{gg_10}(l_{gg_2} \circ l_{(gg_1)^{-1}})$

и $(l^k_g \circ J_k)(\langle g_2, g_1\rangle) = l^k_g(j^k_{g_10}(l_{g_1} \circ l_{(g_1)^{-1}}) =$

$$j^k_{gg_10}(l_g \circ l_{g_2} \circ l_{(g_1)^{-1}} \circ l_{g^{-1}}) = j^k_{gg_10}(l_{gg_2} \circ l_{(gg_1)^{-1}}).$$

Что и требовалось доказать.

Обозначим через $\Pi^k(B,H)$ образ $J_k(\frac{G\times G}{H}) \subset \Pi^k(B)$.

Теорема. Пусть $B = G/H$ – однородное пространство, k – его порядок изотропии. Тогда группоид Ли $\Pi^k(B, H)$ является редукцией группоида Ли $\Pi^k(B)$ до группы изотропии, изоморфной $H_k = H/H^k$, где H^k – ядро изотропного представления i_k.

Доказательство. Обозначим через α' и β' ограничение отображений α и β на множество $\Pi^k(B, H)$. Из свойств 2) и 4) леммы следует, что для любых элементов g и g_1 из G и для любого элемента h из H выполняются условия:

$$J_k(<hg_2, hg_1>) = l^k_h(J_k(<g_2, g_1>)), \alpha' \circ l^k_g = l_g \circ \alpha', \beta' \circ l^k_g = l_g \circ \beta'$$

Из свойства 4) доказанной леммы следует, что это множество замкнуто относительно операции частичного умножения, следовательно является группоидом Ли – подгруппоидом Ли группоида Ли $\Pi^k(B)$. Из выполнения условия 3) следует что каждый α-слой группоида Ли $\Pi^k(B, H)$ является орбитой действия группы G и, следовательно, однородным пространством группы Ли G с группой изотропии H^k – ядром изотропного представления i_k. Тогда $\Pi^k(B, H) \cong$ $\cong \frac{G\times G/H^k}{H}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\frac{G\times G}{H} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Pi^k(B, H) \\
& \frac{G\times G/H^k}{H} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Проверим это. Пусть g_2 и g_1 принадлежат одному смежному классу в G/H^k. Это означает, что $g_2^{-1} g_1 \in H^k$ или $g_2 = g_1h$, $h \in H^k$. По определению 2 и по условию теоремы $i_k(h) =$

$$= j^k_0(id_B) = i_k(g_2^{-1}g_1) = j^k_0 l_{g_2^{-1}g_1} = j^k_0(l_{g_2^{-1}} \circ l_{g_1}) = \left(l^k_{g_2}\right)^{-1} \circ j^k_0 l_{g_2}.$$

Тогда $j^k_0 l_{g_1} = l^k_{g_2} \circ j^k_0(id_B) = j^k_0 l_{g_2}$.

$$J_k(< g_3, g_1 >) = j^k_{g_1 H}(l_{g_3} \circ l_{g_1^{-1}}) = l^k_{g_3} \circ j^k_{g_1 H}(l_{g_1^{-1}}) \qquad (1)$$

$$\mathrm{J_k}(\langle g_3, g_2 \rangle) = j^k_{g_2 H}(l_{g_3} \circ l_{g_2^{-1}}) = j^k_{g_1 h H}(l_{g_3} \circ l_{(g_1 h)^{-1}}) =$$

$$j^k_{g_1 H}(l_{g_3} \circ l_{h^{-1}} \circ l_{g_1 -1}) = l^k_{g_3} \circ j^k_{g_1 H}(l_{h^{-1}} \circ l_{g_1^{-1}}) =$$

$$= l^k_{g_3} \circ l^k_{h^{-1}} \circ j^k_{g_1 H}(l_{g_1^{-1}}) = l^k_{g_3} \circ j^k_0(id_B) \circ j^k_{g_1 H}(l_{g_1^{-1}}) = l^k_{g_3} \circ j^k_{g_1 H}(l_{g_1^{-1}}).$$

т.е. выполняется условие

$$J_k(< g_3, g_2 >) = l^k_{g_3} \circ j^k_{g_1 h}(l_{g_1^{-1}}) \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получим $J_k(< g_3, g_1 >) = J_k(< g_3, g_2 >)$, если g_2 и g_1 принадлежат одному смежному классу в G/H^*. Однородное пространство G/H^* допускает структуру главного расслоения со структурной группой $H_k = H/H^k$. Изотропное представление порядка k группы H определяет точное представление группы H_k в группе изотропии $(\Pi^k(B))^0_0$. Следовательно, группоид Ли $\Pi^k(B, H)$ является сокращением группоида Ли $\Pi^k(B)$ до группы изотропии, изоморфной H_k.

Что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Mackenzie K.*** Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometrie. – Cambridge University Press, 1987. – 327 p.
2. ***Кобаяси Ш., Номидзу К.*** Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1987. – Т.1 – 345с.
3. ***Гийемин В., Стернберг Ш.*** Алгебраическая модель транзитивной дифференциальной геометрии // Математика: Сб. переводов. – 1966. – 10. – №4. – С. 3–31
4. ***Ngo van Que.*** Du prolongement des espaces fibres et des struktures infinitesimales // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1969. – №17. – P. 159–223.
5. ***Рамановіч Л. А.*** Інварыянтныя звязнасці ў групоідах Лі // Весці БДПУ. – 1988. – № 3. – С. 117–121.
6. ***Лумисте Ю.Г.*** Однородные расслоения со связностью и их погружения // Тр. Геометрического семинара. Ин-т научной информации АН СССР. – 1966. – № 1. – С.191–236.