А.М. Сазонова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Модуль 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Могилев 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА»

А.М. Сазонова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

МОДУЛЬ 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

им. А.А. Кулешова

Могилев 2007

УДК 519.21(075)
ББК 22.3
С12

Печатается по решению редакционно-издательского и экспертного совета МГУ им. А.А. Кулешова

Рецензент
кандидат физико-математических наук
доцент МГУ им. А.А. Кулешова
В.А. Сорокин

Сазонова, А.М.
С12 Теория вероятности и математическая статистика. Модуль 2: Случайные величины: метод. рекомендации / А.М. Сазонова. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2007. – 48 с.: ил.

Методические рекомендации отражают практику преподавания предмета в Могилевском государственном университете им. А.А. Кулешова.

Предназначаются для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям, преподавателей и слушателей курсов повышения квалификации, применяющих в своей практике вероятностные и статистические методы.

УДК 519.21(075)
ББК 22.3

Часть 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Модуль 2: Случайные величины

2.1. Понятие случайной величины и ее функции распределения

Случайной величиной X (СВ X) называют числовую функцию $X(\omega)$, заданную на пространстве элементарных событий Ω, что для всякого $X = x$ подмножество $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ является событием.

Случайная величина, принимающая **конечное или счетное** число значений на числовой прямой, называется ***дискретной*** (ДСВ).

Если же случайная величина принимает **непрерывное множество значений** (например, значения на числовом промежутке: отрезке, интервале, полупрямой, прямой), то такая величина называется ***непрерывной*** (НСВ).

Пример 1:

Монета подбрасывается 7 раз. Случайная величина X – появление герба – дискретная случайная величина и может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Пример 2:

Мишень имеет форму горизонтального отрезка длиной l. По этой мишени произвели выстрел с обязательным попаданием. Обозначим через Y расстояние от левого конца отрезка до точки попадания. $Y \in [0, l]$. Y – непрерывная случайная величина, так как она принимает бесконечное несчетное число значений.

Случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами (например, X, Y, Z) или строчными греческими буквами, значения случайной величины обозначают, соответственно, малыми буквами: x, y, z.

Например, X – число выигрышных лотерейных билетов из трех купленных. В этом случае случайная величина X может принимать значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Таким образом, чтобы знать все о случайной величине, достаточно для любого $-\infty < x < +\infty$ знать вероятность $P\{\omega : X(\omega) < x\}$, совокупность которых концентрирует все знания о распределении вероятностей по значениям случайной величины X, поскольку через эти множества можно определить любые другие.

✔ ***Функция распределения вероятностей***, значения которой при конкретном x и есть одна из таких вероятностей, $F_X(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\}$ содержит в себе все сведения о СВ X.

Если речь идет об одной случайной величине, то в обозначении функции распределения опускается индекс случайной величины, а для непрерывной СВ X функцию $F(x)$ (непрерывную) называют ***интегральной функцией распределения***:

$$F(x) = P\,(X<x). \tag{2.1}$$

Свойства функции распределения (? докажите самостоятельно):

- $0 \le F(x) \le 1$;
- $F(x_1) \le F(x_2)$ для $x_1<x_2$, то есть функция распределения неубывающая;
- $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
- $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$;
- для непрерывной случайной величины вероятность любого отдельного значения равна нулю:

$$P(X=x_1) = \lim_{x\to x_1} P(x_1 \le X < x) = \lim_{x\to x_1}(F(x) - F(x_1)) = 0.$$

События возможные, но с нулевой вероятностью, появляются, когда применение классического определения вероятности ограничено.

Задание непрерывной СВ X с помощью функции распределения не является единственным. Если функция распределения $F(x)$ *дифференцируема*, то непрерывную СВ X можно задать с помощью ***плотности или функции плотности вероятностей*** или ***дифференциальной функции распределения*** $p(x)$ – первая производная интегральной функции распределения: $p(x) = F'(x)$, график которой называют ***кривой распределения***.

Свойства функции плотности вероятности:

- $p(x) \geq 0$; (2.2)
- $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$; (2.2.1)
- $P(a<X<b)=P(a \leq X<b)=P(a<X \leq b)=P(a<X<b)= \int\limits_{a}^{b} p(x)dx$; (2.3)
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. (2.4)

Пусть СВ X принимает k значений $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$, прообразами которых служат события $A_i = (X = x_i) = \{\omega : X(\omega) = x_i\}, i = 1,2,...,k$, вероятности которых заданы $p_i = P(A_i) = P(X = x_i)$, $0 \leq p_i \leq 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$, так как события A_i образуют полную группу.

Таблицу, состоящую из значений x_i случайной величины X и соответствующих значений ее вероятностей p_i, называют ***рядом распределения дискретной случайной величины***:

x_i	x_1	x_2		x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

или $X = \begin{pmatrix} x_1 x_2 ... x_n ... \\ p_1 p_2 ... p_n ... \end{pmatrix}$. Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$.

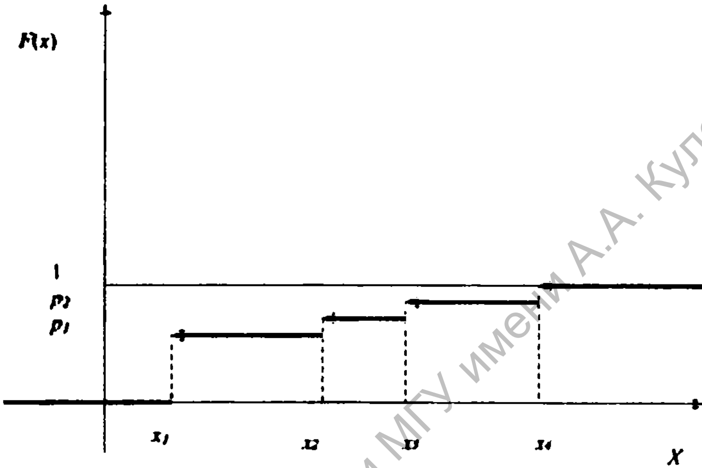
Ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_i; p_i)$, называется ***многоугольником распределения вероятностей***.

Ряд распределения, как и многоугольник распределения, полностью характеризует случайную величину и является одним из способов задания закона распределения.

Функция распределения F(x) *дискретной* случайной величины X с законом распределения $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, ..., k$ имеет вид:

$F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$ – *накопленная вероятность*. (2.1.1)

График функции распределения представляет собой график кусочно-постоянной функции, скачки которой в точках разрыва $x = x_i$ равны $p_i = P(X = x_i)$.



Пример 3:

В схеме Бернулли результат единичного испытания задается двумя значениями:

x_1=0 (неудача), x_2=1 (успех), при этом $p(1)=p$, $p(0)=1-p=q$, поэтому ряд распределения СВ X имеет вид:

x_i	0	1
p_i	q	p

Контроль: $p + q = 1$.

Пример 4:

Известно, что 60% управленцев-стажеров в клинике прошли двухгодичное обучение. Если оба стажера приступят к обучению в один и тот же день, то составьте ряд распределения случайной величины X – числа стажеров, не окончивших курс обучения.

Пусть событие A_1 – первый стажер не прошел обучение. $P(A_1)$= 1-0,6=0,4.

Событие A_2 – второй стажер не прошел обучение. $P(A_2)$=0,4. События A_1 и A_2 независимы.

X=0 соответствует событию $A=\overline{A}_1\overline{A}_2$ – «оба стажера прошли обучение» или «первый стажер прошел обучение **и** второй стажер прошел обучение». $P(X=0)=P(A)=\ P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)$ =0,6 0,6=0,36.

X=1 соответствует событию $C=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$ – «только один из стажеров не прошел обучение» или «(первый стажер не прошел обучение, **и** второй стажер прошел обучение) **или** (первый стажер прошел обучение, и второй стажер не прошел обучение)» $P(X=1)=P(C)=$ $P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)$ =0,4·0,6+0,6·0,4=0,48.

X=2 соответствует событию $B=A_1A_2$ – «ни один из стажеров не прошел двухгодичного обучения» или «первый стажер не прошел обучение, **и** второй стажер не прошел обучение» $P(X=2)=P(B)=$ $=P(A_1)P(A_2)$=0,4·0,4=0,16.

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,36	0,48	0,16

Контроль: 0,36+0,48+0,16=1.

Пример 5:

В схеме Бернулли число x положительных исходов в n испытаниях ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	...	x	...	n
p_i	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^x p^x q^{n-x}$	...	p^n

$$0<p\le 1,\ \ p+q=1,\ C\sum_{x=0}^{n} C_n^x p^x q^{n-x}=(p+q)^n=1$$ – контроль!

Вопросы:

1. Какова область определения функции как случайной величины?

2. Вероятность какого события является значением функции распределения случайной величины?

3. Какова область значений функции распределения случайной величины?

4. Как связаны функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины?

5. В чем отличие дискретной и непрерывной случайных величин?

6. Всякая ли таблица значений случайной величины и их соответствующих вероятностей задает закон распределения этой случайной величины?

7. Что определяют величины скачков в точках разрыва для функции распределения дискретной случайной величины?

Контрольные задания 2.1

1. Фирма использует различные методы оценки при подборе новых работников, в том числе тесты на математическую грамотность и логику речи. По прошлому опыту известно, что 60% кандидатов проходят успешно тест на математическую грамотность и 80% – тест на логику речи. Приняв допущение, что прохождение одного теста не влияет на результат прохождения второго теста, составить ряд распределения случайной величины X – числа успешного прохождения двух тестов.

2. Известно, что 30% управленцев-стажеров в клинике не прошли двухгодичного обучения. Если оба стажера приступят к обучению в один и тот же день, то составьте ряд распределения случайной величины X – числа стажеров, окончивших курс обучения.

3. Вероятность безотказной работы каждого из четырех автоматов в течение определенного времени равна 0,9. Составьте закон распределения случайной величины X – числа автоматов, работавших без поломок. Постройте многоугольник распределения вероятностей.

4. Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность промаха для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго – 0,4. Составьте закон распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень.

5. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии равна 0,2, на втором – 0,35, на третьем – 0,15. Составьте ряд распределения случайной величины X – числа предприятий, на которых акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды.

6. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Со-

ставьте ряд распределения случайной величины X – числа стандартных изделий из трех проверенных.

7. Три стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Составьте ряд распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень.

8. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично», наугад извлекаются 3 работы. Составьте закон распределения случайной величины X – числа извлеченных работ, оцененных на «отлично».

9. В урне 5 белых и 20 черных шаров. Вынули наугад 4 шара. Составьте закон распределения случайной величины X – числа извлеченных белых шаров. Составьте закон распределения случайной величины Y – числа извлеченных черных шаров.

10. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Составьте ряд распределения случайной величины X – числа окрашенных деталей из четырех извлеченных.

11. Покупатель посещает магазины до момента приобретения нужного товара. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине, составляет 0,4. Составьте закон распределения случайной величины X – числа магазинов, которые посетит покупатель из четырех возможных. Постройте график функции распределения. Найдите наиболее вероятное число магазинов, которые посетит покупатель.

Пример 6. Известно, что 20% управленцев-стажеров в клинике не прошли годичного обучения. Если оба стажера приступят к обучению в один и тот же день, то составьте ряд распределения случайной величины X – числа стажеров, окончивших курс обучения. Найдите функцию распределения этой случайной величины.

Ряд распределения СВ X имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	$0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04$	$0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}8\cdot 0{,}2=0.32$	$0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}64$

Функция распределения $F(x)$ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при}\quad x\le 0,\\ 0+0{,}04=0{,}04 & \text{при}\ 0<x\le 1,\\ 0{,}04+0{,}32=0{,}36 & \text{при}\ 1<x\le 2,\\ 0{,}36+0{,}64=1 & \text{при}\ x>2.\end{cases}$$

2.2. Арифметические операции над случайными величинами

Произведением CX случайной величины X на постоянную C называют такую новую случайную величину Z, которая принимает возможные значения: Cx_1, Cx_2, ...Cx_i, ...с теми же вероятностями, что и соответствующие значения случайной величины $X = x_i$.

Суммой X+Y случайных величин X и Y называют новую случайную величину Z, которая принимает следующие возможные значения: x_1+y_1, x_1+y_2, ..., x_i+y_i, ..., x_2+y_1, x_2+y_2, x_3+y_2, ..., x_j+y_1, x_j+y_2, ..., x_j+y_i, ... с вероятностями, подсчитываемыми по формуле:

$$P((X=x_j)\cdot(Y=y_j))=P(X=x_j)\cdot \ldots \cdot P(Y=y_j).$$

Пример 7:

Даны ряды распределения случайных величин X и Y:

x_i	-1	0	2
p_i	0,1	0,6	0,3

y_i	0	1
p_i	0,2	0,8

Составьте ряд распределения случайной величины $Z=X+Y$.

Случайная величина $Z=X+Y$ принимает значения:

z_i	-1 ($x=-1$ *и* $y=0$)	0 ($x=-1$ *и* $y=1$) *или* ($x=0$ *и* $y=0$)	1 ($x=0$ *и* $y=1$)	2 ($x=2$ *и* $y=0$)	3 ($x=2$ *и* $y=1$)
p_i	0,1·0,2=0,02	0,1·0,8+0,6·0,2=0,2	0,6·0,8=0,48	0,3·0,2=0,06	0,3·0,8=0,24

Контроль: 0,02+0,2+0,48+0,06+0,24=1.

Произведением XY случайных величин X и Y называется новая случайная величина Z, которая принимает следующие возможные значения: $x_1 y_1$, x_1y_2, ..., x_iy_i, ..., x_2y_1, x_2y_2, x_3y_2, ..., x_jy_1, x_jy_2, ..., $x_j y_i$, ... с вероятностями, подсчитываемыми по формуле:

$$p_{ij} = P((X=x_i)\cdot(Y=y_j)) = P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j).$$

Две случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если события $(X = x_i)$ и $(Y = y_j)$ независимы для всех значений x_i и y_j, что означает

$$P((X=x_i)\,(Y=y_j)) = P(X=x_i)\,P(Y=y_j).$$

2.3. Числовые характеристики случайной величины

К числовым характеристикам, описывающим случайную величину, относятся ***моменты***, среди которых выделяют ***математическое ожидание и дисперсию***.

Математическое ожидание MX дискретной случайной величины X определяется формулой

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (2.5.1)$$

Заметим, что математическое ожидание дискретной случайной величины может и не совпадать ни с одним из ее возможных значений и является вероятностным обобщением среднего арифметического случайной величины и характеризует «центр» закона распределения.

Для *непрерывной* случайной величины X математическое ожидание

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx . \qquad (2.5.2)$$

Свойства математического ожидания:

1. $MC = C$, *где* C – *const*;
2. $M(C \cdot X) = C \cdot MX$, *где* C – *const*;
3. $M(X \pm Y) = MX \pm MY$, *для любых* X *и* Y;
4. $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$, *если* X *и* Y *независимы*.

Медиана (x_{me}) – это любой корень уравнения $F(x) = 0,5$. (Для дискретной случайной величины медиана обычно не определяется.)

Если математическое ожидание может и не существовать, то медиана существует всегда и может быть неоднозначно определенной.

В приложениях рассматриваются ***квантили***. Квантиль x_p порядка p – это корень уравнения $F(x)=p$, где p – некоторое данное число, $0 < p < 1$.

Модой (x_{mo}) называют значение случайной величины, соответствующее наибольшей вероятности.

Дисперсия DX случайной величины X равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$DX = M\left(\left(X - MX\right)^2\right) \qquad (2.6)$$

? *Докажите, что* $DX = MX^2 - \left(MX\right)^2$.

Для *дискретной* случайной величины X дисперсия

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p(x). \qquad (2.6.1)$$

Для *непрерывной* случайной величины

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (MX)^2. \qquad (2.6.2)$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$, *где C – const;*
2. $D(X) \geq 0$, *для любого X;*
3. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, *где C – const;*
4. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, *если X и Y – независимы.*

Среднеквадратическое отклонение $\sigma X = \sqrt{DX}$ имеет ту же размерность, что и случайная величина. (2.7)

Дисперсия, как и среднеквадратическое отклонение, являются мерой рассеивания СВ X.

Пример 8:

По условию примера 4 вычислите математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины X.

По формуле (2.5.1) $MX = 0\ 0,36 + 1\cdot 0,48 + 2\cdot 0,16 = 0,8$.

Вычислим дисперсию $DX = M\left((X - MX)^2\right) = MX^2 - (MX)^2$ двумя способами: $DX = M\left((X - MX)^2\right)$ и $DX = MX^2 - (MX)^2$

x_i	0	1	2
x_i-MX	0-0,8=-0,8	1-0,8=0,2	2-0,8=1,2
$(x_i$-$MX)^2$	0,64	0,04	1,44
p_i	0,36	0,48	0,16

$DX = M\left((X - MX)^2\right) = 0,64\cdot 0,36 + 0,04\cdot 0,48 + 1,44\cdot 0,16 = 0,48.$

x_i	0	1	2
$(x_i)^2$	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$
p_i	0,36	0,48	0,16

$DX = MX^2 - (MX)^2 = (0\cdot 0,36 + 1\cdot 0,48 + 4\cdot 0,16) - (0,8)^2 = 0,48.$

Тогда $\sigma X = \sqrt{DX} = \sqrt{0,48} = 0,69.$

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины X^k:

$$\nu_k = MX^k. \qquad (2.8)$$

Для $k = 1$ начальный момент есть математическое ожидание СВ X.

Отклонение случайной величины X от ее математического ожидания MX называют ***центрированной*** случайной величиной Y:

$$Y = X - MX. \tag{2.9}$$

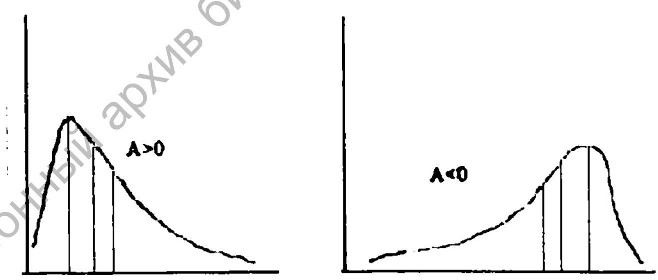
Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание k-ой степени отклонения СВ X от ее математического ожидания:

$$\mu_k = M(X - MX)^k. \tag{2.10}$$

Для $k = 2$ центральный момент является дисперсией СВ X.

Асимметрия (скошенность распределения) характеризуется ***коэффициентом асимметрии A (Sk)*** $= \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$. (2.11)

Если Sk<0, то на величину μ_3 оказывают большое влияние отрицательные отклонения, поэтому кривая распределения более полога слева от MX. Если Sk>0, то на μ_3 преобладает влияние положительных отклонений и кривая распределения более полога справа от MX.



Мода Медиана МХ МХ Медиана Мода

Эксцессом E (Ex) (плосковершинность (E<0) или островершинность ($E>0$) распределения по сравнению с нормальным распределением ($E=0$)) называют величину

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3. \tag{2.12}$$

Вопросы:

1. Какие арифметические операции можно производить над случайными величинами?
2. Каким условием определяют независимость случайных величин?
3. Какая числовая характеристика имеет смысл среднего значения случайной величины?
4. Какие числовые характеристики описывают степень рассеивания случайной величины?
5. В чем отличие начального и центрального моментов порядка k случайной величины?
6. Какова связь математического ожидания и дисперсии с моментами случайной величины?
7. Медиана – это квантиль какого порядка?
8. Что характеризуют коэффициенты асимметрии и эксцесса?

Контрольные задания 2.2-2.3

1. Для каждой из задач 1-10 контрольного задания 2.1 постройте график функции распределения случайной величины, вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, асимметрию, эксцесс.

2. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_2 = -1$ с вероятностью p_2=0,3; x_3 =3 с вероятностью p_3= 0,5 и x_1 с вероятностью p_1. Найдите x_1 и p_1, если известно, что MX = - 2,2.

3. По результатам сдачи сессии совокупность студентов имеет следующее распределение:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0	p_2	0,1	p_4	0,1	0,1	0.2	p_8	0,1	0

Найдите вероятности получения баллов «2(два)», «4(четыре)», «8(восемь)», если известно, что математическое ожидание (среднее значение) результатов сдачи экзаменов составило 5,7, а дисперсия 3,61.

4. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ c\,(1+\sin x) \text{ при } -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 \quad \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определите: а) значение c; б) математическое ожидание; в) постройте графики функций $F(x)$, $p(x)$.

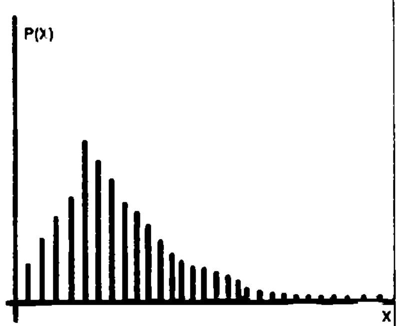
5. Независимые случайные величины X и Y имеют следующие распределения:

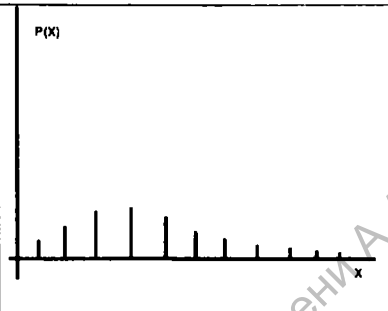
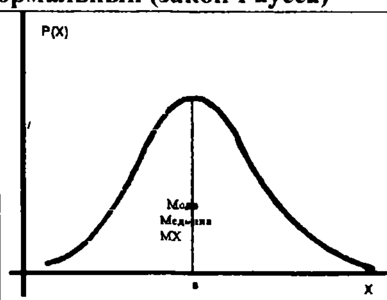
x_i	-2	1
p_i	0,7	0,3

y_i	-2	-1	0
p_i	0,15	0,6	0,25

Составьте ряды распределений случайных величин: 1) $Z = X + 5$, 2) $V = X+Y$, 3) $U=XY$, 4) $T=X^2$, 5) $W=(3X+Y)Y$.

2.4. Некоторые виды распределения случайных величин

Распределение $p(x)$ случайной величины X (MX, DX, A, E)	*График $p(x)$*	*Основные признаки закона*
Дискретные распределения		
1. Биномиальное В схеме Бернулли проводится n испытаний с вероятностью p появления события (успех) в каждом из них, q=1-p. Случайная величина X – число x успехов в n испытаниях		
$p_n(x) = P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$ Параметры n, p $MX = np$, $DX = npq$, $A = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$, $E = \frac{1-6pq}{npq}$		Используется для описания вероятностей числа наступления события ровно x раз в n испытаниях

Распределение $p(x)$ случайной величины X (MX, DX, A, E)	*График $p(x)$*	*Основные признаки закона*
2. Пуассона (закон редких событий)		
$p_n(x) = P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ Параметр λ. $MX = DX = \lambda = np$, $A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, E = \frac{1}{\lambda}$		Используется в схеме Бернулли для $p<0,1$, $n \to \infty$, $\lambda = np$
3. Геометрическое		
$p(x) = P(X=x) = p(1-p)^{x-1}$ Параметр p $MX = \frac{1}{p}$, $DX = \frac{q}{p^2}$		СВ X – число x испытаний Бернулли до первого успеха, $0<p<1$
4. Гипергеометрическое		
$p(x) = P(X=x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$ Параметры n, M, N. $x = 0, 1, \ldots, m$; $m = \min(n, M)$, $M \le N, n \le N$ $MX = n\frac{M}{N}, DX = n\frac{M}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right)$		СВ X – число x выбранных с данным свойством из n объектов, причем эти n объектов случайным образом извлечены (без возврата) из совокупности N объектов, среди которых M объектов обладают данным свойством
Непрерывные законы распределения		
1. Нормальный (закон Гаусса)		
$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$ Параметры a, σ. $MX = a$, $DX = \sigma^2$, $A = 0$, $E = 0$		Подчиняются все СВ, на которые оказывают влияние большое число факторов, равнозначных по величине

<table>
<tr><th>Распределение p(x) случайной величины X (MX, DX, A, E)</th><th>График p(x)</th><th>Основные признаки закона</th></tr>
<tr><td colspan="3">

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\right).$$ *Откуда*

$$P(|X - a| < \varepsilon) = \Phi(\varepsilon / \sigma).$$

При a=0, σ=1 распределение называют ***стандартным нормальным****, их множество обозначают N(0,1), плотность вероятности равна* $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, *а вероятность попадания случайной нормальной величины X в интервал (-x, x) есть функция Лапласа* $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-x}^{x} \varphi(t)dt = 2\int_0^x \varphi(t)dt.$

Если $X \in N(a,\sigma)$, *то отклонение этой величины от ее математического ожидания по абсолютной величине практически не превышает утроенного среднего квадратического отклонения* ***(правило «трех сигм»)****:* $P(|X - a| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0{,}9973 \approx 1$.

Теорема. *Алгебраическая сумма независимых нормально распределенных случайных величин имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным алгебраической сумме математических ожиданий слагаемых, и дисперсией, равной сумме дисперсий слагаемых*

</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Равномерный</td></tr>
<tr><td>

$p(x) = \frac{1}{b-a}$

Параметры a, b

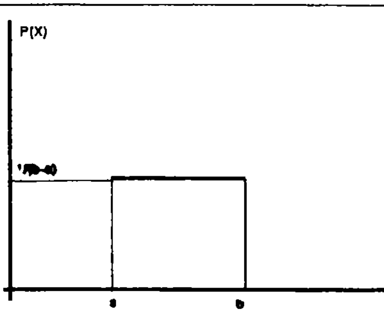
$MX = \frac{a+b}{2}$,

$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$,

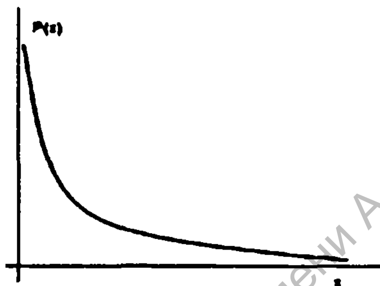
$A = 0,\ E = -1{,}2$,

$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$

</td><td>



</td><td>Подчиняются те СВ X, на которые оказывает влияние резко доминирующий фактор, (ошибка округления, отсчета и др.)</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Распределение p(x) случайной величины X (MX, DX, A, E)	*График p(x)*	*Основные признаки закона*
3. Показательный (экспоненциальный)		
$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ Параметр λ $MX = \frac{1}{\lambda}$, $DX = \frac{1}{\lambda^2}$, $A = 2$, $E = 6$, $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$		Используется для описания времени безотказной работы элементов. В теории массового обслуживания параметр λ – среднее число событий, приходящихся на единицу времени. При определенных условиях число событий, произошедших за промежуток времени t, распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием $MX = \lambda t$. Длина промежутка τ между произвольными двумя соседними событиями подчиняется показательному закону: $P(T < \tau) = F(\tau) = 1 - e^{\lambda\tau}$ (Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. 5-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 576 с.: ил.)

4. Используемые в математической статистике распределения, связанные с нормальным распределением

4.1. Распределение χ^2 (распределение К. Пирсона)

Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ имеют стандартное нормальное распределение: $\xi_i \in N(0,1), i=\overline{1,..k}$.

Распределение $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i^2$ называют ***распределением хи-квадрат*** с k степенями свободы, а сама величина χ^2 – случайной величиной хи-квадрат с k степенями свободы. Обозначают $\chi^2(k)$. Параметр k. Значения квантилей табулированы.

Замечание. Число степеней свободы определяют как разность между числом суммируемых случайных величин и числом линейных связей, ограничивающих свободу изменения этих величин (в нашем случае слагаемые независимы и их количество равно k).

Если СВ $\chi^2(k_1)$ и *$\chi^2(k_2)$ независимы, то их сумма имеет хи-квадрат распределение с числом степеней свободы k_1+k_2.*

Дифференциальная функция распределения случайной величины $\chi^2(k)$ имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \int\limits_0^{\infty} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-x} dx} (\chi^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, & \text{если } \chi^2 \geq 0, \\ 0 & , \text{если } \chi^2 < 0. \end{cases}$$

На практике, как правило, используется не дифференциальная или интегральная функция, а квантили χ^2-распределения – $\chi^2_{\alpha,k}$, отвечающие заданному уровню значимости α, – это такое значение $\chi^2 = \chi^2_{\alpha,k}$, *при котором* $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}) = \int\limits_{\chi^2_{\alpha,k}}^{\infty} p(\chi^2) d\chi^2 = \alpha$.

$M(\chi^2)=k$, $D(\chi^2(k))= 2k$

4.2. Распределение Стьюдента (t - распределение)

Пусть даны независимые случайные величины $U \in N(0,1)$ и $\chi^2(k)$. Распределение случайной величины $t(k) = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{\chi^2(k)}{k}}}$ *(дробь Стьюдента)* называется ***распределением Стьюдента*** (***$t(k)$-распределением***) с k степенями свободы. Параметр k. Значения квантилей табулированы. Графики функции плотности распределения $t(k)$ – кривые Стьюдента симметричны относительно оси ординат.

Дифференциальная функция распределения случайной величины t имеет вид:

$$p(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\frac{\int\limits_0^\infty x^{\frac{k+1}{2}-1}e^{-x}dx}{\int\limits_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1}e^{-x}dx}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},\quad -\infty<t<\infty.$$

В соответствующей таблице приведены значения квантилей распределения Стьюдента $t_{\frac{\alpha}{2},k}$ в зависимости от числа степеней свободы k и вероятности $\alpha/2$. Значения квантилей распределения Стьюдента $t_{\frac{\alpha}{2},k}$ найдены из уравнения $P(t>t_{\frac{\alpha}{2},k})=\int\limits_{t_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty}p(t)dt=\frac{\alpha}{2}.$

$M(t(k))=0$, $D(t(k))=\dfrac{k}{k-2}, k>2$

4.3. Распределение Фишера-Снедекора (F-распределение)

Пусть даны независимые случайные величины $\chi^2(k_1)$ и $\chi^2(k_2)$, имеющие хи-квадрат распределение, соответственно, с k_1 и k_2 степенями свободы. Распределение случайной величины $F(k_1,k_2)=\dfrac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}$ называют ***распределением Фишера-Снедекора***, ***или $F(k_1,k_2)$-распределением*** с k_1 и k_2 степенями свободы. Заметим, что $F(k_1,k_2)\geq 0$. Параметры k_1 и k_2 .

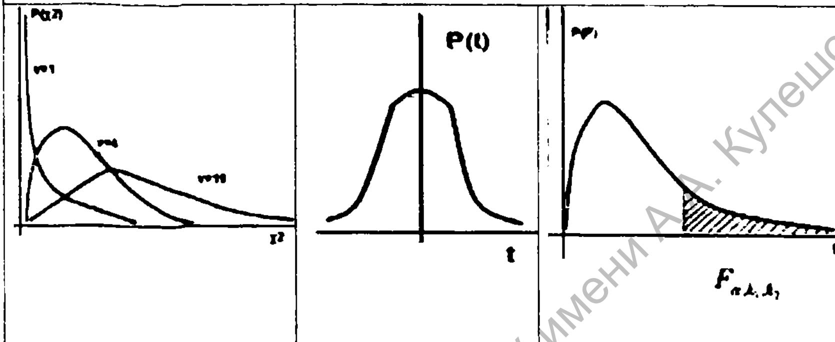
Дифференциальная функция распределения Фишера имеет вид:

$$p(F)=\begin{cases}\dfrac{\int\limits_0^\infty x^{\frac{k_1+k_2}{2}-1}e^{-x}dx}{\int\limits_0^\infty x^{\frac{k_1}{2}-1}e^{-x}dx\int\limits_0^\infty x^{\frac{k_2}{2}-1}e^{-x}dx}\left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}}\dfrac{F^{\frac{k_1}{2}-1}}{(k_2+k_1F)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & \textit{если}\quad F>0,\\ 0, & \textit{если}\quad F\leq 0.\end{cases}$$

В соответствующей таблице приведены значения квантилей F-распределения – F_{α,k_1,k_2}, в зависимости от числа степеней свободы

k_1, k_2. Значения квантилей найдены из решения уравнения

$$P(F > F_{\alpha,k_1,k_2}) = \int_{F_{\alpha,k_1,k_2}}^{\infty} p(F)dF = \alpha$$



Вопросы:

1. Назовите виды распределений дискретной случайной величины.

2. Какими параметрами характеризуется биномиальное распределение?

3. Как вычисляются числовые характеристики случайной величины, имеющей биномиальное распределение?

4. Каким параметром определяется распределение Пуассона?

5. Какой смысл имеет параметр λ в пуассоновском распределении?

6. При каких условиях используется закон Пуассона?

7. Какими параметрами определяется геометрическое распределение?

8. Когда используют гипергеометрическое распределение?

9. Какой смысл имеет вероятность события в гипергеометрическом распределении?

10. Какие виды распределений непрерывной случайной величины Вы знаете?

11. Какой смысл имеют параметры нормального распределения? Как влияют эти параметры на форму графика плотности его распределения?

12. Может ли случайная величина, распределенная по показательному закону, принимать отрицательные значения?

13. Как строятся случайные величины распределений, использующиеся в математической статистике?

2.5. Предельные теоремы

Предельные теоремы устанавливают зависимость между случайностью и необходимостью, поскольку конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате большой массы подобных явлений, а числовые характеристики наблюдаемых в испытаниях случайных величин при неограниченном увеличении числа испытаний становятся практически не случайными. По смыслу предельные теоремы можно разбить на две группы, одна из которых называется *законом больших чисел* (это обобщенное название нескольких теорем, из которых следует, что при неограниченном увеличении числа испытаний средние величины стремятся к некоторым постоянным), а другая – *центральной предельной теоремой* (устанавливает связь между законом распределения суммы случайных величин и его предельной формой – нормальным законом распределения).

Закон больших чисел

1. Неравенства Чебышева (Маркова).

Лемма Чебышева (Маркова). Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и существует математическое ожидание $MX = a$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{a}{\varepsilon}.$$

Это неравенство (или в форме $P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{a}{\varepsilon}$*) может быть применено для определения вероятностей относительно неотрицательных случайных величин с неизвестным законом распределения.*

Неравенство Чебышева. Если случайная величина X имеет конечные математическое ожидание MX и дисперсию DX, то для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|x - MX| \leq \varepsilon) > 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

2. Теорема Чебышева.

При достаточно большом числе n попарно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющих, соответственно, математические ожидания $MX_1, MX_2 \ldots, MX_n$, дисперсия каждой из которых не превышает одного и того же постоянного числа σ^2 для любого сколь угодно малого ε >0

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MX_i\right|\le\varepsilon\right)>1-\varsigma,$$

где ζ – положительное, близкое к нулю число.

При $n\to\infty$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MX_i\right|\le\varepsilon\right)=1.$$

Следствие из теоремы Чебышева. *Пусть при n испытаниях наблюдаются n значений случайной величины X, имеющей математическое ожидание MX и дисперсию DX. Эти полученные значения можно рассматривать как значения случайных величин X_1, X_2, ..., X_n с тем же законом распределения, что и X, а значит, с теми же MX и DX.*

Если испытания удовлетворяют следующим требованиям:

- *испытания независимы, то есть результаты X_1, X_2, ..., X_n испытаний – независимые случайные величины;*
- *испытания проводятся в одинаковых условиях, т.е. каждая из случайных величин X_1, X_2, ..., X_n имеет такой же закон распределения, что и X, поэтому $MX_i=MX$, $DX_i=DX$, $i=1,2,\dots,n$,*

тогда имеем частный случай теоремы Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MX_i\right|\le\varepsilon\right)>1-\frac{DX}{n\varepsilon^2}.$$

или в предельной форме $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X}-MX\right|\le\varepsilon\right)=1$, *то есть среднее арифметическое наблюдений случайной величины X обладает свойством устойчивости.*

3. Теорема Бернулли.

Пусть вероятность события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, тогда при достаточно большом числе испытаний для любого сколь угодно малого ε>0 справедливо неравенство:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

или в предельной форме

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=1,$$

где m – число появлений события A в n испытаниях.

Для оценки вероятности того, что отклонение числа m *появления события* A *в* n *испытаниях от ожидаемого результата* np *не превысит определенного числа* ε, *роль случайной величины играет* m. *Пусть* $m=X_1+X_2+\ldots+X_n$. *Тогда*

$$Mm = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} MX_i = np.$$

$$Dm = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} DX_i = npq.$$

Из неравенства Чебышева следует: $P(|m-np| \le \varepsilon) > 1-\dfrac{npq}{\varepsilon^2}$.

Примечание. К законам больших чисел относят интегральную и локальную теоремы Муавра-Лапласа (см. Модуль 1).

Центральная предельная теорема

Различные формы центральной предельной теоремы отличаются между собой условиями, накладываемыми на сумму рассматриваемых случайных величин, поэтому рассмотрим, например, ***теорему Ляпунова.***

Распределение суммы независимых случайных величин X_1, X_2, …, X_n *приближается к нормальному закону распределения при неограниченном увеличении* n, *если выполняются следующие условия:*

- *все случайные величины имеют конечные математические ожидания и дисперсии;*
- *ни одна из случайных величин не оказывает доминирующего влияния на их сумму, то есть по своему значению резко не отличается от всех остальных.*

Или в другой формулировке:

Если случайная величина X *имеет конечные математическое ожидание* MX *и дисперсию* DX, *то распределение среднего арифметического* $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, *вычисленного по наблюдавшимся значениям случайной величины* X *в* n *независимых испытаниях, проведенных в одинаковых условиях, при* $n \to \infty$ *приближается к* ***нормальному*** *с математическим ожиданием* MX *и дисперсией* $\frac{1}{n}DX$, *то есть*

$$P(\bar{X} < x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi DX/n}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-MX)^2}{2DX/n}}\,dt \quad \text{или} \quad \bar{X} \in N\left(MX, \sqrt{\frac{DX}{n}}\right) \quad \text{при}$$

$n \to \infty$.

Откуда следует, что $P(\alpha < \overline{X} < \beta) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi DX/n}}\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-MX)^2}{2DX/n}}dx$,

или $P(\alpha < \overline{X} < \beta) \approx \dfrac{1}{2}\Phi(u_2) - \dfrac{1}{2}\Phi(u_1)$, *где*

$u_1 = \dfrac{\alpha - MX}{\sqrt{DX/n}}, u_2 = \dfrac{\beta - MX}{\sqrt{DX/n}}$. *В частности,* $P(\left|\overline{X} - MX < \varepsilon\right|) \approx \Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{DX/n}}\right)$.

Следствие из теоремы Ляпунова: *Если независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ имеют одинаковое распределение с $MX_i = a$, $DX_i = \sigma^2$, то функция распределения их центрированной и нормированной суммы $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{X_i - a}{\sigma\sqrt{n}}$ сводится к функции распределения стандартной случайной величины: $F_n(x) = P(Z_n < x) \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.*

Частным случаем следствия из теоремы Ляпунова является **интегральная теорема Муавра-Лапласа.** (*функция распределения центрированной и нормированной биномиальной случайной величины стремится к функции распределения стандартной нормальной случайной величины $P\left(\dfrac{z - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$), поскольку биномиальная величина является суммой альтернативных случайных величин: $z = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.*

Пример 9:

Сколько необходимо произвести операций, если известно, что вероятность нахождения средней продолжительности операций в пределах от 46 до 49 секунд равна 0,9984, а математическое ожидание одной операции равно 47,4 секунды; среднее квадратическое отклонение – 4,9 секунды.

Случайная величина X – продолжительность наугад взятой операции, $a = MX = 47{,}4$ с., $\sigma = \sqrt{DX} = 4{,}9$ с, $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, причем $M\overline{X} = 47{,}4$; $D\overline{X} = \sigma^2/n = (4{,}9)^2/n$. Откуда $n = 100$ – количество произведенных операций.

Вопросы:

1. Какие группы теорем объединяют предельные теоремы?

2. Какие значения принимает случайная величина, для которой выполняется неравенство Маркова?

3. При каком условии выполняется неравенство Чебышева?

4. Для каких случайных величин справедлива теорема Чебышева (следствие из теоремы Чебышева)?

5. К чему стремится согласно закону больших чисел среднее значение величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$?

6. К чему в схеме Бернулли при неограниченном увеличении числа испытаний стремится частость событий?

Контрольные задания 2.4-2.5:

1. Случайная величина принимает только положительные значения. Закон распределения ее неизвестен. Определите вероятность того, что случайная величина примет значение, не превышающее 8, если ее математическое ожидание равно 2.

2. Вероятность сдачи первого экзамена студентом составляет 0,7, второго – 0,6, третьего – 0,8. Найдите функцию распределения случайной величины X – числа экзаменов, сданных студентом. Определите математическое ожидание этой случайной величины.

3. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы, равно 2. Найдите вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает: а) 4 ошибки; б) не менее двух ошибок; в) хотя бы одну ошибку.

4. Вероятность брака при изготовлении двигателей равна 0,1. Определите вероятность того, что при проверке 500 двигателей будет забраковано не более 54.

5. Инвестор покупает ценные бумаги за счет займа, взятого с процентной ставкой 14% под залог недвижимости. Процентная ставка на ценные бумаги X – случайная величина с $MX = a = 17\%$, $DX = \sigma^2 = 4$. Какова вероятность того, что инвестор не сможет вернуть долг и лишится своей недвижимости?

Указание. Оцените с помощью неравенства Чебышева вероятность события ($X < 14$).

6. Средний стаж работы преподавателя до защиты кандидатской диссертации равен 7,9 года. Вычислите вероятность того, что стаж наугад взятого преподавателя не превышает 10 лет.

7. При штамповке изделий на каждые 8 изделий приходится одно бракованное. Определите вероятность того, что из 100 изготовленных изделий число стандартных изделий будет находиться в пределах от 80 до 95.

8. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a = 10. Вероятность попадания ее в интервал (10; 20) равна 0,4772. Определите вероятность попадания случайной величины в интервал (5; 15).

9. Нормально распределенная случайная величина X задана дифференциальной функцией с параметрами $a = 5$ и $\sigma = 4$. Определите: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (3; 9); б) моду и медиану случайной величины X.

10. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале а) (5; 11); б) (-3; 5). Постройте графики их функций плотности распределения.

2.6. Многомерные случайные величины

Если в результате испытания явление описывается несколькими случайными величинами, образующими систему случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то упорядоченный набор этих случайных величин $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называют ***многомерной случайной величиной***, или ***многомерным случайным вектором***. Таким образом, в результате испытания каждому элементарному событию многомерная величина ставит в соответствие упорядоченный набор n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые приняли случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Например. значением двумерной случайной величины (X, Y) считается пара (x, y).

При условии, что X и Y – дискретные случайные величины, двумерную случайную величину (X, Y) называют ***дискретной***. ***Закон распределения*** двумерной случайной величины (X, Y) можно представить в виде таблицы распределения всех ее значений и **матрицы** вероятностей p_{ij} этих значений, где $p_{ij} = P(x_i, y_j) = P((X=x_i)\cdot(Y=y_j))$, $i=1, 2, \ldots$, $j=1, 2, \ldots$.

Y \ X	x_1	x_2	...	x_n	$\sum P(y_j)$
y_1	$P(x_1,y_1)$	$P(x_2,y_1)$	...	$P(x_n,y_1)$	$P(y_1)$
y_2	$P(x_1,y_2)$	$P(x_2,y_2)$	...	$P(x_n,y_2)$	$P(y_2)$
...	...	...	...	...	...
y_m	$P(x_1,y_m)$	$P(x_2,y_m)$	...	$P(x_n,y_m)$	$P(y_m)$
$\sum P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_n)$	1

Суммируя элементы матрицы вероятностей по строкам, получим распределение СВ X, а по столбцам – СВ Y. (Объясните, используя теоремы сложения вероятностей случайной величины).

В общем случае двумерная случайная величина (X,Y) задается интегральной функцией, означающей геометрически вероятность попадания двумерной случайной величины в квадрант левее и ниже точки с координатами (x,y) на координатной плоскости:

$F(x, y) = P((X<x)\cdot(Y<y))$ – ***функция распределения двумерной случайной величины.***

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x,y) \le 1$,

2. $F(x, y)$ *не убывает и непрерывна слева по каждому аргументу;*

3. $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$,

4. $F(x,+\infty) = F_1(x)$, $F(+\infty,y) = F_2(y)$ – функции распределения, соответственно, случайных величин X и Y;

5. $F(+\infty,+\infty) = 1$.

Случайные величины X, Y ***независимы***, если $F(x,y) = F_1(x)\cdot F_2(y)$.

Двумерная случайная величина (X, Y) называется ***непрерывной***, если ее функция распределения $F(x, y)$ непрерывна по каждому аргументу.

Если функция распределения $F(x, y)$ дважды дифференцируема, то функцию $p(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x,y)$ называют ***дифференциальной функцией*** двумерной случайной величины (X, Y), или ***плотностью*** двумерной случайной величины (X, Y), или ***совместной плотностью*** случайных величин X и Y.

Свойства плотности распределения:

1. $p(x, y) \ge 0$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = 1$;

3. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} p(t,u)dtdu$.

Для ***независимых*** случайных величин X и Y имеем

$p(x, y)=p_1(x)p_2(y)$, где $p_1(x)= F_1'(x)$, $p_2(y) = F_2'(y)$.

В противном случае $p(x, y)=p_1(x)p(y/x)$ или $p(x, y)=p_2(y)p(x/y)$, где $p(x\ /\ y)=\dfrac{p(x,y)}{p_2(y)}$ – условная плотность вероятности двумерной случайной величины (X,Y) при заданном значении $Y = y$, а $p(y/x)=\dfrac{p(x,y)}{p_1(x)}$ – условная плотность вероятности двумерной случайной величины (X,Y) при заданном значении $X = x$.

$p_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy$ и $p_2(y) = \int p(x,y)dx$ – плотности вероятностей составляющих случайных величин X и Y, входящих в двумерную случайную величину (X,Y).

Числовые характеристики системы двух случайных величин

Начальным моментом порядка k, l двумерной случайной величины (X,Y) называют математическое ожидание произведения степени k случайной величины X и степени l случайной величины Y:

$$\nu_{k,l} = M(X^k Y^l).$$

Заметим, что $\nu_{1,0} = M(X^1Y^0) = M(X)$; $\nu_{0,1} = M(X^0Y^1) = M(Y)$.

Центральным моментом порядка k, l двумерной случайной величины (X,Y) называют математическое ожидание произведения степени k отклонения случайной величины X от своего математического ожидания MX и степени l отклонения случайной величины Y от своего математического ожидания MY:

$$\mu_{k\,l} = M((X-MX)^k (Y-MY)^l).$$

Заметим, что $\mu_{2,0} = M((X-MX)^2(Y-MY)^0) = DX$ *геометрически характеризует рассеяние случайных величин в направлении оси Ox.* $\mu_{0,2} = M((X-MX)^0(Y-MY)^2) = DY$ *геометрически характеризуют рассеяние случайных величин в направлении Oy.*

Второй смешанный центральный момент определяет меру связи случайных величин X и Y:

$$\mu_{1,1} = M((X-MX)\ (Y-MY)\ ) = M(XY) - M(X)M(Y) = K(X,Y) = \operatorname{cov}(X,Y),$$

и его называют ***корреляционным моментом*** *K(X,Y) или* ***ковариацией*** *cov (X,Y).*

*Для **независимых** случайных величин X и Y математическое ожидание произведения равно произведению их математических ожиданий, поэтому*

$$\mathbf{cov}\,(X,Y) = 0.$$

*Если $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$, то считают случайные величины X и Y коррелированными. Поскольку ковариация может принимать все действительные значения, то в качестве меры связи используют основной момент порядка $k=1$, $l=1$, который называют **коэффициентом корреляции**:*

$$r(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},\ \text{где}\ \sigma_X = \sqrt{DX},\ \sigma_Y = \sqrt{DY}.$$

Свойства коэффициента корреляции:

- $-1 \leq r(X,Y) \leq 1;$
- *если X и Y независимы, то $r(X,Y)=0$;* Если коэффициент корреляции двух случайных величин равен нулю, то эти величины называют ***некоррелированными***.

Для нормального распределения понятия независимости и некоррелируемости совпадают, то есть если две нормальные величины некоррелированы, то они и независимы. В общем случае это утверждение неверно.

- *если $r(X,Y) \neq 0$, то X и Y являются зависимыми случайными величинами;*
- *если случайные величины X и Y линейно зависимы, то коэффициент корреляции равен ± 1, то есть если $Y = a + bX$, то*

$$r\,(X,Y) = \begin{cases} 1, & \text{при}\ b > 0, \\ 0, & \text{при}\ b = 0, \\ -1, & \text{при}\ b < 0. \end{cases}$$

? Докажите это утверждение самостоятельно, используя свойства математического ожидания и дисперсии.

Основным моментом порядка k, l двумерной случайной величины (X,Y) называют нормированный центральный момент порядка k, l:

$$r_{k,l} = \frac{\mu_{k,l}}{\sigma_X^k \sigma_Y^l}.$$

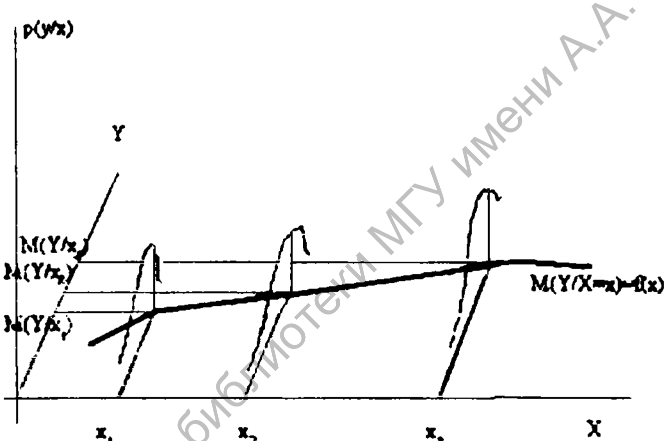
Заметим, что для $k=1$ и $l=1$ имеем $r_{1,1}$ – коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

Условное математическое ожидание определяется

• для дискретной СВ Y при $X = x$ (x – определенное возможное значение X): $M(Y|X = x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i p(y_i|x) = f(x)$;

• для непрерывной $M(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yp(y|x)dy = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***функцией регрессии Y на X***. Функция регрессии обладает свойством минимальности, то есть удовлетворяет условию: $M(Y-M(Y/X=x))^2$ – минимально.



Аналогично определяется ***функция регрессии X на Y***: $M(X|Y) = \varphi(y)$.

Вопросы:

1. Как из матрицы распределения двумерной случайной величины (X,Y) получить ряд распределения каждой составляющей?

2. Как из матрицы распределения двумерной случайной величины (X,Y) получить распределение величины при условии $X = x_i$?

3. Чему равна сумма всех элементов матрицы распределения двумерной случайной величины?

4. Как определить значение $F(3;3)$ функции распределения двумерной случайной величины?

5. Как по заданной матрице распределения двумерной случайной величины определить вероятность попадания случайной величины в квадрат $1 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$?

6. Как определить коэффициент корреляции для независимых случайных величин?

2.7. Функции случайных величин

Две случайные величины X и Y, соответственно, с функциями плотности вероятности $p_1(x)$ и $p_2(y)$ могут быть связаны функциональной зависимостью. Это означает, что случайная точка (x,y) ($X=x$, $Y=y$) должна находиться только на кривой $y = \varphi(x)$. В случае монотонности функции $\varphi(x)$ на интервале (a, b) для нее существует обратная функция $x = \varphi^{-1}(x) = \psi(y)$.

Обратная функция может определяться на каждом промежутке монотонности. На промежутках монотонности задают математическое ожидание и дисперсию СВ Y – функции СВ X - $y = \varphi(x)$:

$$M(Y) = M(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)p_1(x)dx,\ D(Y) = D(\varphi(x)) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)p_1(x)dx - M^2(Y).$$

Дифференциальная функция СВ Y $p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(\psi(y))|\psi'(y)|dy$.

Композиция законов распределения

Пусть двумерная случайная величина (X,Y) задана функцией плотности распределения $p(x,y)$ в области D-полуплоскости, ограниченной сверху прямой $y = z - x$, где z – любое действительное число.

Для случайной величины $Z = X+Y$ можно определить функцию распределения

$$F(z) = \iint_D p(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-x} p(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} p(z-y, y)dy$$

а также плотность распределения

$$p(z) = F'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x)dx.$$

При условии независимости непрерывных X и Y для случайной величины $Z = X+Y$ используют композицию законов распределения случайных величин, и плотность распределения СВ Z определяется так:

$$p(z) = p_1(x)p_2(y) = p_1(x)p_2(z-x).$$

При условии неотрицательности возможных значений аргументов плотность распределения СВ Z определяется так:

$$p(z) = \int_0^z p_1(x) p_2(z-x) dx \quad \text{или} \quad p(z) = \int_0^z p_1(z-y) p(y) dy.$$

Контрольные задания 2.6-2.7:

1. Двумерная случайная величина задана законом распределения:

Y \ X	0	5	20
0	0,15	0,2	0,10
10	0,10	0,3	0,15

Найдите математическое ожидание и дисперсию составляющих случайных величин X и Y.

2. Распределение 100 студентов по количеству пропущенных часов занятий и экзаменационной оценке представлено в следующей таблице

Количество пропущенных часов	Оценка на экзамене							
	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	1	2	5	7	8	1
4	5	6	7	13	9	8	6	1
10	6	4	4	3	2	1	0	0

Определите безусловные и условные законы распределения случайных величин: количества пропущенных часов (X) и экзаменационной оценки (Y).

3. Дана дискретная двумерная величина (X, Y)

а)

X \ Y	3	5
5	0,15	0,10
10	0,3	0,05
15	0,15	0,25

б)

X \ Y	10	20
0	0,1	0,25
50	0,05	0,2
100	0,1	0,3

Найдите: а) условный закон распределения X при условии, что $y = 15$; б) условный закон распределения Y, при условии, что $x = 20$.

4. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $p(x, y) = \cos x \cos y$ в квадрате $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq \pi/2$ и $p(x, y) = 0$ вне квадрата. Доказать, что составляющие X и Y независимы. Найдите математические ожидания и дисперсии составляющих.

5. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x+y = 5$. Определите: а) математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y; б) корреляционный момент.

6. Законы плотности распределения независимых составляющих непрерывной случайной величины (X, Y):

7.

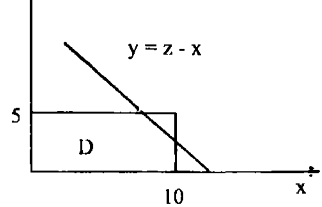
$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 3e^{-3x} & \text{при } x > 0, \end{cases} \qquad p(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0, \\ 7e^{-7y} & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Определите: а) плотность совместного распределения двумерной случайной величины (X, Y); б) функцию распределения этой двумерной случайной величины.

8. Независимые случайные величины X и Y распределены равномерно: СВ X на (0;10), СВ Y на (0;5). Найдите интегральную и дифференциальную функции случайной величины $Z = X + Y$.

Указание: найдите функцию распределения $Y(Z)$ величины $Z = X+Y$ по формуле

$$F(z) = \iint_D p(x, y)dxdy = \iint_D p(x)p(y)dxdy,$$ *где D – часть прямоугольника, лежащая левее и ниже прямой $y = z-x$.*



Индивидуальные задания к модулю 2*.

Задания к модулю 2

№варианта	Номера задач									
1	10	21	36	38	46	55	60	65	68	75
2	9	15	17	27	34	43	49	50	51	55
3	7	12	19	26	28	39	61	66	79	80
4	2	11	15	22	27	30	45	55	67	72
5	8	16	20	24	37	53	57	63	71	77
6	2	10	17	35	44	54	64	74	69	76
7	4	11	23	24	28	39	51	54	76	78
8	1	6	9	13	19	40	46	48	57	58
9	6	19	31	33	52	58	62	71	72	80
10	9	13	20	23	25	38	56	60	62	68
11	2	4	7	16	30	32	34	38	63	76
12	5	11	21	23	25	32	40	43	53	78
13	1	14	26	33	34	41	50	58	70	76
14	5	6	15	18	21	50	62	63	67	68
15	10	13	20	31	37	57	61	72	73	74
16	24	25	36	44	47	48	52	54	69	72
17	11	18	21	22	40	52	63	70	78	79
18	1	3	27	39	49	51	61	64	66	78
19	9	12	14	29	30	42	56	69	71	74
20	2	5	14	29	31	55	58	60	70	75
21	12	33	44	47	49	53	57	59	68	76
22	3	7	12	13	16	40	50	56	64	74
23	25	29	30	32	34	36	45	46	53	65
24	8	22	35	48	56	65	69	70	76	77
25	6	19	27	31	32	37	42	59	71	73
26	4	7	16	17	18	26	33	41	42	67
27	3	10	17	22	28	35	37	43	59	69
28	4	8	23	24	26	44	54	61	66	73
29	5	20	35	36	39	42	43	62	63	67
30	1	14	15	18	45	51	62	63	64	75
31	3	8	28	29	38	41	52	75	79	80

1. Вероятность того, что студент попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,9. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он

*Задания заимствованы из Г.В. Горелова, И.А. Кацко. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е испр. и доп. – Ростов н/Д: Феникс, 2002. - 400 с.: ил.

не промахнется. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

2. Имеется 7 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих пробах не участвует. Постройте многоугольник распределения.

3. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией $p(x)$:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<-\frac{\pi}{2} \text{ или } x>0,\\ \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2}<x<0.\end{cases}$$

а) Найдите функцию распределения случайной величины X: $F(x)$

б) Постройте графики функций $F(x)$ и $p(x)$.

в) Найдите вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-\pi/3;\ \pi/4)$.

4. Дана интегральная функция распределения:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Найдите дифференциальную функцию $p(x)$, MX, DX, $\sigma(X)$.

5. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,4, вторым - 0,6. Начинает стрельбу первое орудие. Составьте законы распределения дискретных случайных величин X и Y – числа израсходованных снарядов, соответственно, первым и вторым орудием.

6. Производится три независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,4. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события A в указанных испытаниях. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

7. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 3 детали. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу стандартных деталей в выборке. Постройте многоугольник распределения.

8. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)\ \begin{cases} 0 & при\quad x \le 0, \\ (1/\pi)(x - 0{,}5\sin 2x) & при\quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

а) Найдите плотность вероятности случайной величины X.

б) Постройте графики $p(x)$, $F(x)$.

в) Найдите вероятность попадания СВ X в интервал $(0;\pi/2)$.

9. Найдите математическое ожидание непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2;8); функцию распределения $F(x)$ и функцию плотности вероятности $p(x)$; вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал (3;6).

10. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени Т равна 0,001. Найдите вероятность того, что за время Т откажут ровно X элементов. Определите закон распределения СВ X и ее числовые характеристики.

11. В коробке 9 карандашей, из которых 5 красных. Из этой коробки наудачу извлекается 4 карандаша.

а) Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу красных карандашей в выборке.

б) Постройте многоугольник распределения.

в) Найдите вероятность события: $0<X\le 2$.

12. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,001. Найдите вероятность того, что среди 250 деталей окажется ровно X бракованных. Определите закон распределения СВ X и ее числовые характеристики.

13. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время Т. Найдите среднее число отказавших за время Т элементов, если вероятность того, что за это время не откажет хотя бы один элемент, равна 0,99.

14. Непрерывная случайная величина X на всей числовой оси ОХ задана интегральной функцией: $F(x) = (1/2) + (1/\pi)\operatorname{arctg} x$. Найдите вероятность того, что в результате двух испытаний случайная величина примет значение, заключенное в интервале (0;1).

15. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le \pi/6,\\ C\sin 3x & \text{при} \quad \pi/6<x\le \pi/3,\\ 0 & \text{при} \quad x>\pi/3.\end{cases}$$

Найдите постоянную C, интегральную функцию $F(x)$.

16. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на 10 (десять) наугад извлекаются 3 работы. Найдите закон распределения дискретной случайной величины X, если X – число работ, оцененных на 10 (десять) среди извлеченных. Постройте многоугольник распределения. Чему равна вероятность события $X>0$?

17. Найдите среднее число λ бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в рассматриваемой партии распределено по закону Пуассона.

18. В урне 5 белых и 20 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Постройте ряд распределения величины X.

19. Дискретная случайная величина задана законом распределения

x_i	3	4	7	10
p_i	0.2	0.1	0.4	0.3

Найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте ее график.

20. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ C\,(x^2-x) & \text{при} \quad 1<x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найдите постоянную C; интегральную функцию $F(x)$; вероятность попадания СВ X в интервал (1/2; 3/2).

21. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,9 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Дискретная случайная величина X – число промахов.

а) Найдите закон распределения X.

б) Постройте многоугольник распределения.

в) Найдите вероятности событий $X<2$, $X\le 3$, $1<X\le 3$.

22. Бросают три монеты. Требуется: а) задать случайную величину X, равную числу выпавших «решек»; б) построить ряд распределения.

23. Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности (закон Коши) $p(x)=C/(1+x^2)$. Найдите:

а) постоянную C;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность попадания в интервал $-1<X<1$;

г) постройте графики $p(x)$, $F(x)$.

24. Найдите MX и $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X, имеющей плотность распределения вероятности:

$$p(x)=1/(3\sqrt{2\pi})\exp\left(-(x+2)^2/18\right).$$

Укажите интервал, симметричный относительно MX, в который попадает случайная величина X с вероятностью $p = 0{,}9973$.

25. Постройте ряд распределения числа попаданий мячом в корзину при четырех бросках, если вероятность попадания равна 0,7.

26. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго – 0,4. Дискретная случайная величина X – число попаданий в мишень.

а) Найдите закон распределения X.

б) Постройте многоугольник распределения.

в) Найдите вероятность событий $X\geq 1$.

27. Из партии в 20 изделий, среди которых имеются 4 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Постройте ряд распределения случайного числа X – бракованных изделий, содержащихся в выборке.

28. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x_0^3}{x^3} & \text{при } x > x_0 \ (x_0>0), \\ 0 & \text{при } x < x_0. \end{cases}$$

а) Найдите плотность вероятности СВ X.

б) Постройте графики $p(x)$, $F(x)$.

в) Найдите вероятность попадания НСВ X в интервал (0; 1).

29. MX и $\sigma(X)$ нормально распределенной СВ X, соответственно, равны 10 и 2. Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12; 14).

30. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -2,\\ 0{,}5+(1/\pi)\arcsin(x/2) & при \quad -2<x\le 2,\\ 1 & при \quad x>2.\end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате трех испытаний X примет одно значение в интервале (-1; 1).

31. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<2,\\ (x-2)^2 & при \quad 2\le x\le 3,\\ 1 & при \quad x>3.\end{cases}$$

а) Найдите плотность вероятности СВ X.

б) Постройте графики $p(x)$, $F(x)$.

в) Найдите вероятность попадания НСВ X в интервал (2,5; 3).

32. Три стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найдите закон распределения величины X – числа попадания в мишень. Постройте многоугольник распределения. Чему равна вероятность получения не менее двух попаданий?

33. Случайная величина X распределена равномерно в интервале (0; π). Найдите закон распределения случайной величины $Y = \cos X$.

34. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[1;3]$. Найдите плотность вероятности случайной величины $Y=X^2$.

35. Задана дифференциальная функция НСВ X:

$$p(x)=\begin{cases}Ax^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}} & при\ x\ge 0 \quad (\alpha>-1,\ \beta>0),\\ 0 & при\ x<0.\end{cases}$$

(гамма-распределение).

При $\alpha = 1$, $\beta = 1$ найдите: а) постоянный параметр A; б) математическое ожидание; в) дисперсию.

36. В первой урне 5 шаров: 2 белых и 3 черных. Во второй – 3 шара: 1 белый и 2 черных. Из первой урны наудачу переложили во вторую 2 шара, после чего из второй в первую переложили 1 шар. Найдите закон распределения случайной величины X – числа белых

шаров в первой урне после всех перекладываний шаров. Какова вероятность того, что число белых шаров не больше, чем первоначально? Постройте многоугольник распределения.

✓ 37. Случайную величину X умножили на k. Как от этого изменяются ее характеристики: а) математическое ожидание; б) дисперсия; в) среднеквадратическое отклонение; г) второй начальный момент?

38. Функция распределения случайной величины X задана формулой:

$$F(x) = A + B \operatorname{arctg} x \quad (-\infty < X < +\infty).$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $p(x)$; в) вероятность того, что величина X попадет на отрезок $[-1; 1]$.

39. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 2, \\ 0{,}5x - 1 & при \ 2 < x \le 4, \\ 1 & при \quad x > 4. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение:

а) меньше 2; б) меньше 3; в) не меньше 3; г) не меньше 5.

40. Дана интегральная функция НСВ X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \ x \le 0, \\ \sin 2x & при \ 0 < x \le \pi/4, \\ 1 & при \ x > \pi/4. \end{cases}$$

Найдите дифференциальную функцию и вероятность попадания СВ на интервал $(\pi/16; \pi/8)$.

41. Вероятность изготовления стандартной детали 0,98. Для контроля наудачу взято 100 деталей. Найдите закон распределения СВ X, равный числу нестандартных деталей в выборке. Постройте многоугольник распределения. Найдите вероятности событий:

а) в выборке 2 стандартные детали;

б) в выборке более 2 стандартных деталей.

42. Найдите MX числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 50 билетов, причем вероятность выигрыша равна 0,01.

43. НСВ X задана дифференциальной функцией:

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \qquad \text{в интервале } (-c; c).$$

Вне этого интервала $p(x) = 0$. Найдите вероятность попадания СВ X в интервал (-c/2; c/2) и функцию распределения $F(x)$.

44. НСВ X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания СВ X в интервал (10; 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания НСВ X в интервал (0; 10)?

45. Производятся 20 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления успеха равна 0,2. Найдите дисперсию числа появлений успеха в этих испытаниях.

46. ДСВ X – число мальчиков в семьях с пятью детьми. Предполагают равновероятное рождение мальчика и девочки. Найдите закон распределения. Постройте многоугольник распределения. Найдите вероятность событий: а) в семье 2-3 мальчика; б) не более 3-х мальчиков; в) более 1 мальчика.

47. При 10 000 бросаний монеты «герб» выпал 6400 раз. Следует ли считать, что монета несимметрична?

48. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,01. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время t окажется меньше 2.

49. НСВ X задана дифференциальной функцией:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x > 0\ (\lambda > 0), \\ 0 & при \quad x \le 0. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (2; 3).

50. Случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad \text{(распределение Лапласа).}$$

Найдите математическое ожидание величины X.

51-60. Случайные величины X и Y заданы законами распределений. Определите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайных величин X и Y. Составьте законы распределений случайных величин $Z = X + Y$, $V = XY$. Постройте многоугольник распределения вероятностей случайной величины Z. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 2X - 4Y$.

51.

x_i	-1	3	4		y_i	2	5
p_i	0,2	p_2	0,6		q_i	0,4	0,6

52.

x_i	2	7	9		y_i	0	1
p_i	p_1	0,3	0,2		q_i	0,7	0,3

53.

x_i	1	2	5		y_i	3	5
p_i	p_1	0,1	0,8		q_i	0,4	0,6

54.

x_i	4	6	9		v_i	1	3
p_i	0,1	0,5	p_3		q_i	0,4	0,6

55.

x_i	0	5	10		v_i	-2	4
p_i	0,3	0,1	p_3		q_i	0,3	0,7

56.

y_i	0	5	10		x_i	-2	4
q_i	0,3	q_2	0,3		p_i	0,4	0,6

57.

x_i	-10	0	5		y_i	1	4
p_i	0,3	0,4	0,3		q_i	0,8	q_2

58.

x_i	-6	-2	-1		y_i	1	4
p_i	0,2	p_2	0,2		q_i	0,2	0,8

59.

x_i	-2	-1	1		v_i	4	5
p_i	0,3	0,2	p_3		q_i	0,2	0,8

60.

x_i	-10	-6	-1		v_i	-1	2
p_i	0,4	p_2	0,2		q_i	q_1	0,8

В задачах 61-80 непрерывная случайная величина задана интегральной функцией (функцией распределения) $F(x)$. Найдите: а) вероятность попадания величины X в интервал $(a;\ b)$; б) дифференциальную функцию (функцию плотности вероятностей) $p(x)$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X; г) постройте графики функций $F(x)$ и $p(x)$.

61. $$F(x)=\begin{cases}0 & при\quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{\pi^2} & при\ 0<x\le\pi,\\ 1 & при\quad x>\pi.\end{cases}$$
$a=1,\ b=2.$

62. $$F(x)=\begin{cases}0 & при\quad x\le 0,\\ \dfrac{64}{81}x^2 & при\quad 0<x\le\dfrac{9}{8},\\ 1 & при\quad x>\dfrac{9}{8}.\end{cases}$$
$a=0{,}5,\ b=0{,}9.$

63. $$F(x)=\begin{cases}0 & при\quad x\le 2,\\ (x-2)^2 & при\ 2<x\le 3,\\ 1 & при\quad x>3.\end{cases}$$
$a=2{,}5,\ b=3.$

64. $$F(x)=\begin{cases}0 & при\quad x\le 1\\ \dfrac{1}{6}\left(x^2-x\right) & при\ 1<x<3,\\ 1 & при\quad x>3.\end{cases}$$
$a=1,\ b=2.$

65. $$F(x)=\begin{cases}0 & при\quad x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ 0{,}5\,(\sin x+1) & при\ -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & при\quad x<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$
$a=0,\ b=\dfrac{\pi}{6}.$

66. $$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ \dfrac{16}{25}x^2 & при\ 0<x\le\dfrac{5}{4},\\ 1 & при\ x>\dfrac{5}{4}.\end{cases}$$
$a=0{,}5,\ b=1.$

67. $F(x)=\begin{cases} e^x \text{ при } x\le 0, \\ 1 \text{ при } x>0. \end{cases}$

$a=-2,\ b=0.$

68. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 1, \\ \ln x \text{ при } 1<x\le e, \\ 1 \text{ при } x>e. \end{cases}$

$a=2,\ b=e.$

69. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 100, \\ 1-\left(\frac{100}{x}\right)^3 \text{ при } x>100. \end{cases}$

$a=110,\ b=120.$

70. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0, \\ 1-e^{-2x} \text{ при } x>0. \end{cases}$

$a=0,\ b=2.$

71. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\ge 0, \\ \frac{x^2}{e^2} \text{ при } 0<x\le e, \\ 1 \text{ при } x>e. \end{cases}$

$a=1,\ b=2.$

72. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 3, \\ \frac{x^4-81}{175} \text{ при } 3<x\le 4, \\ 1 \text{ при } x>4. \end{cases}$

$a=3{,}2,\ b=3{,}5.$

73. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0, \\ \frac{x^4}{16} \text{ при } 0<x\le 2, \\ 1 \text{ при } x>2. \end{cases}$

$a=1,\ b=1{,}5.$

74. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\ge 1, \\ \frac{(x-1)^2}{25} \text{ при } 1<x\le 6, \\ 1 \text{ при } x>2. \end{cases}$

$a=2,\ b=4.$

75. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le -2, \\ \frac{(x+2)^3}{216} \text{ при } -2<x\le 4, \\ 1 \text{ при } x>4. \end{cases}$

$a=-1,\ b=3.$

76. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 1, \\ \frac{x^3-x}{60} \text{ при } 1<x\le 4, \\ 1 \text{ при } x>4. \end{cases}$

$a=1,\ b=2.$

77. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0, \\ \frac{64}{49}x^2 \text{ при } 0<x\le \frac{7}{8}, \\ 1 \text{ при } x>\frac{7}{8}. \end{cases}$

$a=0{,}5,\ b=1.$

78. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le -2, \\ \frac{x^3+8}{16} \text{ при } -2<x\le 2, \\ 1 \text{ при } x>2. \end{cases}$

$a=-1,\ b=1.$

79. $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \dfrac{x^3-x^2}{48} & \text{при } 1<x\le 4,\\ 1 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$$

$a=2,\ b=3.$

80. $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le \sqrt{2},\\ \dfrac{x^6-x^4-4}{96} & \text{при } \sqrt{2}<x\le \sqrt{5}.\\ 1 & \text{при} \quad x>\sqrt{5}.\end{cases}$$

$a=1{,}5;\ b=2.$

Задания заимствованы из Гореловой Г.В., Кацко И.А. [3].

ПРОГРАММА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
(Модуль 2: Случайные величины)

1. Понятие случайной величины.
2. Функция распределения случайной величины.
3. Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины.
4. Ряд распределения дискретной случайной величины.
5. Арифметические операции над случайными величинами.
6. Числовые характеристики случайных величин.
7. Некоторые виды распределения случайной величины.
8. Предельные теоремы.
9. Многомерные случайные величины.
10. Функция распределения двумерной случайной величины.
11. Числовые характеристики двумерной случайной величины.
12. Функции случайных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белько И.В., Кузьмич К.К. Высшая математика для экономистов. III семестр: Экспресс-курс. М.: Новое знание, 2002. – 144 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 4-е стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 400 с.: ил.
3. Горелова Г.В., Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, испр. и доп. – Ростов н/Д: Феникс, 2002. 400 с.: ил.
4. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. Математическая статистика: Учеб. для студ. сред. спец. учеб. заведений. – 3-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2001. – 336 с.: ил.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Сазонова Алла Михайловна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Модуль 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Методические рекомендации

Технический редактор *А.Н. Гладун*
Компьютерная верстка *А.Л. Позняков*
Корректор *Н.С. Ястреб*

Подписано в печать 23.08. 2007 г.
Формат 60x84/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 2,8. Уч.-изд. л. 2,85. Тираж 80 экз. Заказ № 412.

Учреждение образования "Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004 г.

Отпечатано на ризографе отдела оперативной полиграфии МГУ им. А.А. Кулешова. 212022, Могилев, Космонавтов, 1