

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА»**

А.М. САЗОНОВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

МОДУЛЬ 1. СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТЬ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ



Могилев 2005

*Печатается по решению редакционно-издательского
и экспертного совета МГУ им. А.А. Кулешова*

Рецензент

кандидат физико-математических наук
доцент МГУ им. А.А. Кулешова *С.Н. Батан*

Сазонова, А.М.

С12 Теория вероятностей и математическая статистика. Модуль 1. События и вероятность : метод. реком. / А.М. Сазонова – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2005. – 42 с.

Методические рекомендации отражают практику преподавания предмета в Могилевском государственном университете им. А.А. Кулешова.

Предназначается для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям, преподавателей и слушателей курсов повышения квалификации, применяющих в своей практике вероятностные и статистические методы.

УДК 519.21(075)

ББК 22.3

© Сазонова А.М., 2005

© МГУ им. А.А. Кулешова, 2005

1.1 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – раздел дискретной математики, решающий задачи выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами.

Множество, в котором указан порядок следования элементов, называется **упорядоченным**.

Например, множества (m, p, r) и (m, r, p) – различные упорядоченные множества.

Основные правила комбинаторики

Пусть множество A состоит из n элементов.

Правило суммы

Если из множества A элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, элемент a_2 можно выбрать другими n_2 способами и так далее, элемент a_k – n_k способами, отличными от предыдущих, то выбор одного из элементов a_1 , или a_2 , или и так далее, a_k можно осуществить $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

Пример:

Пусть в коробке лежат 9 красных, 7 зеленых и 12 желтых карандашей. Выбор одного карандаша (или красного, или зеленого, или желтого) можно сделать 28 способами

$$(9 + 7 + 12 = 28).$$

Правило умножения

Если из множества A элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после этого элемент a_2 можно выбрать n_2 способами и так далее, наконец, после выбора элемента a_k , элемент a_k можно выбрать n_k способами, то одновременный выбор элементов $a_1, a_2, \dots, a_k$ в указанном порядке можно осуществить $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Пример:

Пусть в коробке лежат 9 красных, 7 зеленых и 12 желтых карандашей. Сколько можно осуществить наборов карандашей “красный, зеленый, желтый” в указанном порядке?

Число наборов совпадает с числом выборов одного красного карандаша из 9, другого зеленого из 7 и третьего желтого из 12. Поэтому число указанных наборов равно

$$9 \cdot 7 \cdot 12 = 756.$$

Пусть множество A состоит из n различных элементов.

Размещением из n элементов по k элементов называется каждое упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, взятых из множества A .

Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k (читается: “ A из n по k ”) и подсчитывается по формуле:

$$A = n (n-1) \cdot \dots (n - (k-1)). \quad (1.1)$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается $n!$ (“ n (“эн”) факториал”), т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. При этом условно считается $0! = 1$. Тогда

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1.2)$$

Если при выборе k элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это **размещения с повторениями**. Число размещений с повторениями из n по k :

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Пример:

Множество A состоит из трех элементов – цифр 2, 5 и 9. Количество двузначных чисел, составленных из этих цифр, совпадает с числом размещений из трех элементов по два. Числа 25, 29, 59, 52, 92, 95 соответствуют размещениям (2,5), (2,9), (5,9), (5,2), (9,2), (9,5). Число всех размещений равно $6 = 3 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = A_3^2$.

Размещение из n элементов по n называется **перестановкой из n элементов**. Число всех таких перестановок обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = A_n^n = n! \quad (1.3)$$

Пример:

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 5 и 9?

Количество таких трехзначных чисел равно количеству перестановок из указанных цифр. Эти числа: 259, 295, 529, 592, 925, 952, – их $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$

Сочетанием из n элементов по k элементов называется каждое неупорядоченное подмножество, состоящее из k элементов ($k \leq n$). Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k ("C ("цэ") из n по k ") и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \quad (1.4)$$

Справедливо свойство:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (1.5)$$

Если при выборе k элементов из n элементы возвращаются обратно и при последующем выборе не упорядочиваются, то говорят, что это **сочетание с повторениями**. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k определяется по формуле C_{n+k-1}^k .

Пусть множество из n элементов можно разбить на m упорядоченных частей (m подмножеств или m групп), из которых первая содержит k_1 элементов, вторая — k_2 элементов и т.д., m -ая — k_m элементов ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$). Число таких способов разбиения обозначается $C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$

Пример 1:

Из 5 вопросов предлагается выбрать 2 (порядок следования вопросов не важен). Сколько можно составить таких комбинаций?

Если пронумеровать вопросы, то неупорядоченные наборы могут быть следующими: (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5), поскольку набор, например, (2,3) не отличается от набора (3,2). Всего таких комбинаций будет $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$.

Пример 2:

Десять человек размещаются в гостинице в одноместный, двухместный, трехместный и четырехместный номера. Сколько существует способов их размещения?

По формуле $C_{10}(1, 2, 3, 4) = \frac{10!}{1!2!3!4!} = 12600$.

1.2 СОБЫТИЯ

Возникновение или преднамеренное создание определенного комплекса условий, результатом которого является тот или иной исход, называют *опытом, испытанием, экспериментом или процессом*.

В теории вероятностей первичным является понятие *события* – это *исход опыта*. События обозначают заглавными латинскими буквами $A, B, C, \dots$.

События бывают достоверными, невозможными и случайными.

Достоверное событие всегда происходит при выполнении данного комплекса условий. Оно обозначается Ω .

Невозможное событие $\emptyset$ никогда не может произойти при выполнении данного комплекса условий.

Случайное событие при выполнении данного комплекса условий может, как произойти, так и не произойти.

Элементарные события ω – это те события, которые нельзя разложить на составляющие их события. Любое событие A из пространства Ω можно составить из элементарных событий.

Например, в опыте с бросанием игральной кости (кубика) элементарными событиями являются $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ – выпадение соответственно чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Событие A – выпадение нечетного числа – можно представить в виде:

$$A = \{ \omega_1, \omega_3, \omega_5 \}.$$

События A и B *несовместны*, если в результате одного опыта они не могут произойти одновременно, в противном случае – *совместны*. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ *попарно несовместны*, если любые два из них несовместны.

События A и B *равновозможны*, если ни одно из них не имеет объективного преимущества перед другим.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны в результате опыта кроме этих событий ничего не может произойти.

Контрольные задания 1.1

1. Полагая, что каждый человек имеет одну фамилию, одно имя, одно отчество, сколько можно составить различных инициалов (алфавит русский)?

2. Сколько можно записать трехзначных чисел, используя без повторения (с повторением) все десять цифр?

3. Сколькими способами можно посадить в ряд семь различных деревьев, чтобы определенные три дерева были рядом?

4. Имеется 9 карандашей желтого и 6 синего цветов. Сколькими способами можно выбрать 7 карандашей, чтобы среди них были 3 желтых?

5. Сколькими способами можно группу из 13 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более четырех, а во второй – не более десяти человек?

Контрольные задания 1.2

1. Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт – бросание двух монет. События A – появление двух гербов, B – появление двух цифр?

в) опыт – автобус отправляется с 12 пассажирами и делает на маршруте пять остановок. События C – на первых четырех остановках сошло не более 11 пассажиров, событие F – на последней остановке вышел хотя бы один пассажир.

с) опыт – бросание двух игральных костей. События L – хотя бы на одной кости появилось пять очков, событие D – появление четного числа очков на каждой кости.

2. Являются ли равновозможными следующие события:

а) опыт – выстрел по мишени. События A – попадание при выстреле, событие B – промах при выстреле.

в) опыт – бросание двух игральных кубиков. События C – сумма очков на верхних гранях равна 7, D – произведение очков на верхних гранях равно 12.

с) опыт – бросание двух монет. События F – появление двух цифр, D – появление двух гербов, R – появление одной цифры и одного герба.

3. Брошены три монеты. Составьте события, образующие полную группу. Сколько и какие равновозможные исходы образуют полную группу событий? Укажите элементарные события, не образующие полной группы событий.

4. Приведите примеры:

а) трех событий, образующих полную группу событий;

в) трех событий, несовместных и равновозможных, но не образующих полную группу событий;

с) двух событий, несовместных и образующих полную группу событий, но не равновозможных.

1.3 ДЕЙСТВИЯ НАД СОБЫТИЯМИ

Если из наступления события A следует наступление события B , то говорят, что **событие A влечет за собой событие B** и это обозначается $A \subset B$, т.е. все элементарные события, входящие в A , входят в событие B .

Пример:

Бросают игральный кубик. Событие A – выпадение на верхней грани числа 4, влечет за собой событие B – выпадение на верхней грани четного числа.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что **события A и B равны** и обозначают $A=B$, т.е. события A и B состоят из одних и тех же элементарных событий.

Пример:

Бросают игральный кубик. Событие A – выпадение на верхней грани числа, кратного трем, равно событию B – выпадение на верхней грани чисел 3 и 6.

Суммой событий A и B называют событие $C = A + B$, которое означает наступление хотя бы одного из этих событий, т.е. события A , или события B .

Пример:

Стрелок произвел три выстрела по мишени. Событие A_1 – попал при первом выстреле, событие A_2 – попал при втором выстреле, событие A_3 – попал при третьем выстреле. Тогда событие C – хотя бы одно попадание, – это сумма событий $C = A_1 + A_2 + A_3$.

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в одновременном наступлении событий A и B .

Для несовместных событий A и B их произведение является невозможным событием, т.е. $A \cdot B = \emptyset$.

Дополнением к событию A или **отрицанием события A** (противоположным событию A) называют событие $\bar{A}$, определяемое равенствами: $A \cdot \bar{A} = \emptyset$, $A + \bar{A} = \Omega$.

Разностью событий A и B называется событие $A - B$, состоящее из наступления события A и не наступления события B , характеризующееся условием $A - B = A \cdot \bar{B}$.

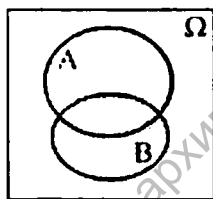
Пример:

Бросают игральный кубик. Событие A – выпадение на верхней грани четного числа, событие B – выпадение на верхней грани чисел 3 или 6.

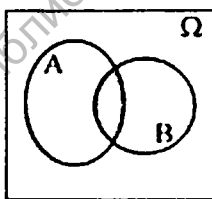
Событие $A \cdot B$ – это выпадение на верхней грани числа 6; событие $A - B$ – это выпадение на верхней грани чисел 2 или 4; отрицанием события A является событие $\bar{A}$, состоящее в выпадении чисел 1, или 3, или 5 на верхней грани кубика.

События рассматриваются как подмножества некоторого множества Ω . Операции над событиями представляют как операции над множествами:

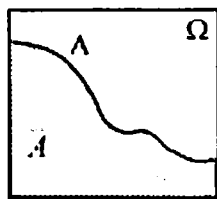
- сумме событий $A+B$ эквивалентно объединение $A \cup B$;
- произведению $A \cdot B$ событий A и B соответствует пересечение $A \cap B$;
- невозможное событие соответствует пустому множеству $\emptyset$;
- достоверное событие соответствует объемлющему множеству Ω ;
- событие $\bar{A}$, противоположное событию A , соответствует дополнению к событию A во множестве Ω . Иллюстрация операций над событиями может быть отражена на диаграммах Венна:



$A \cup B$



$A \cap B$



АЛГОРИТМ. Пусть рассматриваются опыт и связанное с ним сложное событие A , тогда A можно выразить через элементарные события:

а) рассматриваются простейшие элементарные события $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующие для данного опыта полную группу;

в) из элементарных событий с помощью операций сложения, умножения и отрицания формируют необходимое, для решения данной задачи, сложное событие.

Пример:

Монета подбрасывается три раза. Элементарные события:

A_1 – выпадение герба при первом бросании; A_1 – выпадение цифры при первом бросании;

A_2 – выпадение герба при втором бросании; A_2 – выпадение цифры при втором бросании;

A_3 – выпадение герба при третьем бросании; $\bar{A}_3$ – выпадение цифры при третьем бросании;

Выразим через элементарные события и их отрицания следующие события:

а) хотя бы одно выпадение герба:

$$A = A_1 + A_2 + A_3;$$

в) не более одного выпадения герба:

$$B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3;$$

с) выпадение герба после первого бросания:

$$C = A_1 (A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_2 \bar{A}_3).$$

Контрольные задания 1.3

1. Является ли событие $5 \cdot 5 = 25$: а) достоверным; б) невозможным?

2. Обязательно ли элементарное событие, входящее в сумму событий $A + B$, входит в событие B ?

3. Равны ли числа а) C_5^1 и A_5^1 ? б) C_5^2 и A_5^2 ? в) A_5^3 и P_3 ?

4. Производится три выстрела по мишени. Рассматриваются события:

A_1 – попадание в цель первым выстрелом; A_2 – попадание в цель вторым выстрелом; A_3 – попадание в цель третьим выстрелом. Определите, каким событиям равносильны следующие события:

$$1) A_1 + A_2 + A_3; 2) \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3; 3) \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3; 4) (A_1 + A_2) A_3;$$

$$5) A_1 + A_1 A_2 + A_1 A_2 A_3; 6) A_1 + A_2 + A_3; 7) A_1 + A_2 + A_3;$$

5. Монета подбрасывается три раза. Рассматриваются события – появление герба при i -ом подбрасывании ($i = 1, 2, 3$). Представьте в

виде сумм, произведений и сумм произведений событий A , следующие события: A – появились все три герба; B – появились все три цифры; C – появился хотя бы один герб; D – появилась хотя бы одна цифра; E – появился только один герб; F – появилась только одна цифра; G – появилось только два герба.

ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Под вероятностью события понимается численная мера объективной возможности наступления этого события в данном опыте. Рассмотрим основные подходы к определению вероятности.

Аксиоматическое определение вероятности

Каждому событию A ставится в соответствие число p – **вероятность события A** , при этом выполняются следующие аксиомы:

1. $P(A) = p \geq 0$, где A – событие из пространства событий Ω ;
2. Для несовместных событий A и B

$$P(A + B) = P(A) + P(B);$$

3. $P(\Omega) = 1$.

Аксиоматический подход не указывает, как конкретно находить вероятность, поэтому для решения задач целесообразно использовать другие определения вероятности.

Классическое определение вероятности

Классической схемой, или схемой случаев, называется опыт, при котором число элементарных исходов *конечно* и все они *равновозможны*.

Элементарное событие (исход) ω называется благоприятствующим событию A , если его появление влечет наступление события A . т.е. ω входит в число элементов, составляющих A).

Классической вероятностью события A называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A , к числу n всех возможных элементарных событий из этой схемы:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.7)$$

Из определения вероятности следует, что $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Если пространство Ω состоит из n элементарных событий (равно-возможных), то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{n}$.

Пример:

В лифт 10-этажного дома входят 5 человек. Какова вероятность того, что они выйдут на разных этажах?

У первого пассажира лифта есть 9 возможностей выйти (на этажах 2-10), тогда у второго остается 8 возможностей, у третьего – 7, у четвертого – 6, у пятого – 5. Значит, $m = A_9^5$. Так как каждый пассажир лифта может выйти на любом из этажей, то число всех возможностей по правилу произведения равно 9^5 . Поэтому

$$P = \frac{A_9^5}{9^5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{9^5} = 0,256.$$

Статистическое определение вероятности

Пусть при проведении n одинаковых опытов некоторое событие A появилось m раз. Отношение называют *частотой* или *относительной частотой* $\frac{m}{n}$ события A .

Статистической вероятностью события A называют постоянную величину, вокруг которой колеблются значения частот при неограниченном возрастании числа n , т.е. $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$.

Пример:

Опыты по подбрасыванию монеты. Появление герба – событие A .

Опыт	Число опытов, n	Появление герба, m	$\frac{m}{n}$
Опыт Бюффона	4040	2048	0,5069
Опыт Керриха	10000	5087	0,5087
Опыт 1 Пирсона	12000	6019	0,5016
Опыт 2 Пирсона	24000	12012	0,5005

Из таблицы видно, что $\frac{m}{n} \rightarrow 0,5$ при возрастании числа опытов n .

При рассмотрении *бесконечных* множеств удобно рассматривать геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности

Геометрической вероятностью события A называют отношение меры области события, благоприятствующих появлению события A , к мере всей возможной области событий.

Пример:

В круг радиуса r вписан треугольник наибольшей площади. Определите вероятность попадания в треугольник точки (событие A), случайно брошенной в круг.

Мера области, благоприятствующей появлению события A , – площадь указанного треугольника. Треугольник с наибольшей площадью является равносторонним со стороной $a = r\sqrt{3}$, его площадь равна $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$. Мера всей возможной области – площадь круга πr^2 .

По определению геометрической вероятности $P(A) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,414$.

Контрольные вопросы и задания 1.4

1. Как называется числовая характеристика возможности наступления события?
2. Что называется частотой события?
3. Как связана вероятность события с его частотой?
4. Каким условиям должны удовлетворять элементарные события в классической схеме определения вероятности?
5. Как называется по отношению к A элементарное событие, которое влечет за собой наступление A ?
6. Может ли вероятность события быть равной 1,2?
7. Бросаются две монеты. Какова вероятность того, что обе монеты выпадут “гербом” кверху?
8. На каждой из десяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: “а”, “т”, “а”, “и”, “с”, “и”, “т”, “с”, “т”, “к”. Найдите вероятность того, что из вынутых по одной и расположенных “в одну линию” карточек можно будет прочитать слово “статистика”.
9. В пирамиде девять винтовок, из которых пять с оптическим прицелом. Найдите вероятность того, что среди случайным образом взятых трех винтовок только две с оптическим прицелом.

10. Встреча двух студентов планируется с 13-00 до 14-00. Каждый из встречающихся обещает ждать другого в течение 20 минут. Найдите вероятность того, что студенты встретятся в течение планируемого часа.

1.5 ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для несовместных событий A и B вероятность их суммы равна сумме вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (1.8)$$

Для произвольных событий A и B верна более общая теорема:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (1.9)$$

Пример:

В классе 23 человека. Из них 5 являются участниками олимпиады по математике, 4 – по биологии, 3 – по математике и биологии. Определите вероятность того, что случайно выбранный из класса ученик является участником, по крайней мере, одной из олимпиад.

Введем событие: A – “выбранный ученик участвует в олимпиаде по математике”, B – “выбранный ученик участвует в олимпиаде по биологии”, тогда событие $A+B$ означает, что ученик участвует по крайней мере в одной из олимпиад.

По условию задачи

$$P(A) = \frac{5}{23}, \quad P(B) = \frac{4}{23}, \quad P(A \cdot B) = \frac{3}{23}.$$

По формуле (1.6)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{5}{23} + \frac{4}{23} - \frac{3}{23} = \frac{6}{23}.$$

Так как события A и $\bar{A}$ образуют полную группу, то $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Откуда

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (1.10)$$

1.6 УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ, ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Наступление некоторого события может значительно менять вероятность наступления другого события. Если произошло событие B , то новая вероятность события A называется **условной вероятностью** и обозначается $P_B(A)$ или $P(A|B)$, говорят: “вероятность события A при условии B ”.

При этом событие B является достоверным и играет роль пространства элементарных событий Ω .

При $P(B) > 0$ условная вероятность $P(A|B)$ определяется формулой

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \quad (1.11)$$

В примере пункта 1.5 $P(A \cdot B) = \frac{3}{23}$, $P(B) = \frac{4}{23}$, поэтому $P(A|B) = \frac{\frac{3}{23}}{\frac{4}{23}} = \frac{3}{4}$.

Согласно определению в состав события B входят 4 ученика, но только 3 из них входят в событие A . По формуле классической вероятности $P(A|B) = \frac{3}{4}$.

Из (1.11) следует, что

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B), \text{ где } P(B) > 0, \quad (1.12)$$

и в симметричной форме

$$P(B \cdot A) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A), \text{ где } P(A) > 0. \quad (1.13)$$

Независимыми называются такие события A и B , что

$$P(A|B) = P(A).$$

Теорема умножения вероятностей:

Если события A и B независимы, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.14)$$

Соотношение (1.11) часто служит определением независимости событий, т.е. события называются *независимыми*, если вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей.

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно независимы и имеют одинаковые вероятности появления

$$(P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p, P(\bar{A}_1) = q),$$

то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (1.15)$$

АЛГОРИТМ. Составить по алгоритму формулу, выражающую событие, вероятность которого необходимо определить, через элементарные события, а затем применить теоремы сложения и умножения вероятностей. Предполагается, что все события в рамках каждой теоремы, принадлежат одному пространству элементарных событий.

Пример 1:

Вероятность успешной сдачи экзамена первым студентом составляет 0,7, а вторым 0,8. Какова вероятность того, что экзамен сдаст только один студент? Каждый из студентов может пересдать один экзамен, если он его первый раз не сдал.

A_1 – первый студент успешно сдал экзамен (с первого раза). $P(A_1) = 0,7$.

$\bar{A}_1$ – (с первого раза) первый студент не сдал экзамен. $P(\bar{A}_1) = 0,3$.

A – первый студент успешно сдал экзамен со второй попытки, т.е. он не сдал экзамен в первый раз и сдал успешно экзамен во второй раз, значит, $A = \bar{A}_1 \cdot A_1$, $P(A) = P(\bar{A}_1 \cdot A_1) = P(\bar{A}_1) P(A_1) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$.

B – первый студент успешно сдал один экзамен (с первой или со второй попытки), значит, $B = A_1 + A$. $P(B) = P(A_1 + A) = P(A_1) + P(A) = 0,7 + 0,21 = 0,91$.

B_0 – первый студент не сдал экзамен с первой попытки и не сдал экзамен со второй попытки, значит, $B_0 = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_1$, $P(B_0) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_1) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_1) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$.

C_1 – второй студент успешно сдал экзамен (с первого раза). $P(C_1) = 0,8$.

C_1 – (с первого раза) второй студент не сдал экзамен. $P(\bar{C}_1) = 0,2$.

D – второй студент успешно сдал экзамен со второй попытки, т.е. в первый раз он экзамен не сдал и успешно сдал его во второй раз, значит, $D = C_1 \cdot C_1$, $P(D) = P(C_1 \cdot C_1) = P(C_1) \cdot P(C_1) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$.

F – второй студент успешно сдал экзамен один экзамен (с первой попытки или со второй попытки), значит, $F = C_1 + D$, $P(F) = P(C_1 + D) = P(C_1) + P(D) = 0,8 + 0,16 = 0,96$.

F_0 – второй студент не сдал экзамен с двух попыток, т.е. $F_0 = C_1 \cdot \bar{C}_1$. $P(F_0) = P(\bar{C}_1 \cdot C_1) = P(\bar{C}_1) \cdot P(C_1) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$.

Интересующее по условию задачи событие E – успешно сдал экзамен только один из двух студентов при условии двух попыток, значит, $E = B_0 \cdot F + B \cdot F_0$.

$$P(E) = P(B_0 \cdot F + B \cdot F_0) = P(B_0 \cdot F) + P(B \cdot F_0) = P(B_0)P(F) + P(B)P(F_0) = 0,09 \cdot 0,96 + 0,91 \cdot 0,16 = 0,1228.$$

Пример 2:

В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Событие A – оба шара белые;

элементарное событие A_1 – первый шар вынули белый;

элементарное событие A_2 – второй шар вынули белый. Событие A наступит, если наступят одновременно A_1 и A_2 , т.е. $A = A_1 \cdot A_2$, откуда

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

В указанном примере $P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{10}$, $P(A_1) = \frac{2}{5}$, поэтому условная вероятность равна

$$P(A_2 | A_1) = \frac{1}{10} : \frac{2}{5} = \frac{1}{4}.$$

1.7 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют *полную группу событий*, т.е. они попарно несовместны, а их сумма является достоверным событием:

$$H_i \cdot H_j = \emptyset, \text{ при } i \neq j \text{ и } H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega.$$

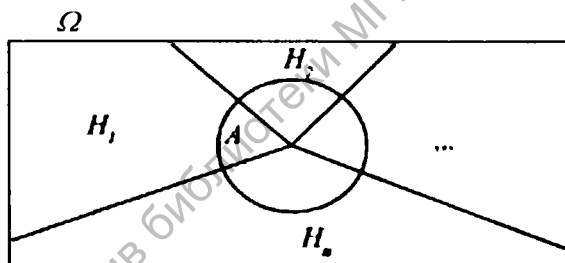
Такие события называются *гипотезами*.

По теореме сложения вероятностей справедлива формула

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

Простейшим примером полной группы событий является произвольное событие A и его отрицание $\bar{A}$.

Полную группу событий можно проиллюстрировать диаграммой



Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда любое событие A можно представить в виде

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \dots + H_n \cdot A.$$

По теореме сложения вероятностей имеем

$$P(A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \dots + P(H_n \cdot A),$$

а по теореме умножения вероятностей получим

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n) \quad (1.16)$$

формула полной вероятности, или

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

В формулу полной вероятности входят вероятности $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, которые называются априорными. Если событие A наступило, то эти вероятности изменяются. Это будут теперь условные вероятности $P(H_1|A), P(H_2|A), \dots, P(H_n|A)$. Они могут быть найдены по формуле Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)} \quad (1.17)$$

АЛГОРИТМ:

1. По условию задачи определяют, что некоторое событие A может наступить только при одновременном наступлении одного из попарно независимых событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу.

2. По имеющимся данным определяют вероятности $P(H_i), P(A|H_i)$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

3. Применяются формулы (1.16), (1.17).

Пример:

В пирамиде пять винтовок, две из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7.

а). Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу выбранной винтовки;

б). Стрелок поразил цель при одном выстреле. Найти вероятность того, что выстрел был произведен из винтовки без оптического прицела.

Обозначим гипотезы: H_1 – винтовка с оптическим прицелом; H_2 – винтовка без оптического прицела. Эти гипотезы несовместны и образуют полную группу.

$$P(H_1) = \frac{2}{5} = 0,4; \quad P(H_2) = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Событие A – стрелок одним выстрелом поразит мишень. $P(A|H_1) = 0,95$; $P(A|H_2) = 0,7$.

а). По формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1) P(A|H_1) + P(H_2) P(A|H_2) = 0,4 \cdot 0,95 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,8.$$

б). По формуле Байеса

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,7}{0,8} = 0,525.$$

Контрольные вопросы

1. Сколько элементарных событий может появиться при бросании монеты, кубика?
2. Влечет ли событие $\{-1; 2\}$ событие $\{-5; -1; 0; 2; 4\}$?
3. Что больше: $P(A+B)$ или $P(A) + P(B)$?
4. Какое событие играет роль достоверного события при определении условной вероятности $P(A|H)$?
5. Для каких событий верно равенство $P(AB) = P(A)P(B)$?
6. Могут ли события H_1 и H_2 из полной группы быть совместными?
7. Составляют ли события A и $\bar{A}$ полную группу?
8. Чему равна сумма всех событий из полной группы событий?
9. Чему равна сумма вероятностей всех событий из полной группы событий?
10. Могут ли изменяться вероятности гипотез после наступления события?
11. При каких условиях применимы формулы полной вероятности?
12. В чем разница условий использования формулы полной вероятности и формулы Байеса?

Контрольные задания 1.5

1. В читальном зале имеется семь учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекаря надо наугад взять два учебника. Найдите вероятность того, что хотя бы один учебник окажется в переплете.
2. В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найдите вероятность того, что не все отобранные лица окажутся мужчинами.
3. Сколько надо бросить монет, чтобы с вероятностью, меньшей 0,125, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших сторон не появится герб?

4. Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шар с одинаковой вероятностью попадает в любую ячейку. Найдите вероятность того, что шарики попадут в соседние ячейки.

5. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной 6 см наудачу брошена монета радиуса 2 см. Найдите вероятность того, что монета пересечет не более одной стороны квадрата.

6. Аппарат содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,06 и 0,09. Найдите вероятность отказа аппарата, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

7. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9919. Найдите вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Контрольные задания 1.6 – 1.7

1. В студии телевидения 3 телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включается в данный момент, равна 0,6. Найдите вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

2. На склад обувной фабрики поступают сапоги от трех бригад одного цеха. В первой бригаде производится в полтора раза больше сапог, чем во второй бригаде, и в два раза меньше, чем в третьей. Вероятность того, что сапог окажется стандартным для первой бригады, равна 0,8, для второй – 0,7, для третьей – 0,9. Определите вероятность того, что взятый наугад сапог будет стандартным. Взятый наугад сапог оказался стандартным, какова вероятность, что он произведен первой бригадой.

3. Из 30 студентов группы 8 студентов знают все 40 вопросов программы, 12 студентов выучили по 30 вопросов, 7 студентов – по 25 вопросов, трое – по 15 вопросов. Случайно вызванный студент ответил на два заданных вопроса. Какова вероятность, что он из семи студентов, которые подготовили 25 вопросов.

4. В первом ящике из 20 деталей 5 бракованных, во втором из 30 деталей 6 бракованных. Из первого во второй переложили три детали. Найдите вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второго ящика, бракованная.

5. Электронный прибор содержит две микросхемы. Вероятность выхода первой микросхемы в течение определенного (достаточно большого) времени равна 0,2, а второй – 0,1. Известно, что из строя вышла одна микросхема. Какова вероятность, что это первая схема?

6. Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей находится по 4 белых и 6 черных шаров, в четвертой и пятой урнах по 2 белых и 3 черных шара. Равновероятно случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова вероятность того, что была выбрана четвертая или пятая урна, если извлеченный шар оказался белым?

7. Покупатель с равной вероятностью посещает 3 магазина. Вероятность того, что он купит товар в первом магазине, равна 0,3, во втором – 0,4, в третьем – 0,2. Определите вероятность того, что покупатель купит товар только в одном магазине, если каждый магазин он посетил дважды.

1.8 ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

Формула Бернулли

Несколько испытаний называются *независимыми* относительно события A , если вероятность события A в каждом из них не зависит от исходов других испытаний.

Как связаны независимость n испытаний и независимость событий, которые могут произойти в результате этих испытаний?

Пусть проводятся n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить с одинаковой вероятностью p , т.е. вероятность события A не изменяется от того, какие события произойдут в остальных испытаниях (*схема Бернулли*).

Практически событие A может появиться в n независимых испытаниях любое число $k \leq n$ раз в разных последовательностях или комбинациях, чередуясь с противоположным событием $\bar{A}$. Таким образом, из независимости n испытаний относительно события A следует независимость в совокупности группы n событий, представляющей собой произвольную комбинацию событий A и $\bar{A}$, одно из которых обязательно произойдет в каждом из рассматриваемых испытаний. Если в результате n испытаний событие A произошло m раз (неважно, в каком порядке), то это означает, что в совокупности наступили m событий A и $n-m$ событий $\bar{A}$, вероятности которых в каждом отдельном

опыте равны p и $q=1-p$ соответственно. Все n событий независимы, поэтому по теореме умножения, вероятность появления m раз события A в определенной последовательности равна $p^m q^{n-m}$.

Поскольку событие A может появиться m раз в n опытах в совершенно другой последовательности и число таких последовательностей равно числу сочетаний из n по m , т.е. C_n^m , то вероятность появления события A точно m раз в n независимых испытаниях равна (*формула Бернулли*)

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad (1.18)$$

Часто применяемые формулы в схеме Бернулли:

Вероятность наступления события A :

- менее m раз в n испытаниях

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m-1);$$

- более m раз в n испытаниях

$$P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n);$$

- не менее m раз в n испытаниях

$$P(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n);$$

- не более m раз в n испытаниях

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m);$$

- хотя бы один раз в n испытаниях

$$1 - P_n(0),$$

- после k неудач

$$P_{k+1}(1) = pq^k.$$

Наивероятнейшее число m_0 наступивших событий в схеме Бернулли определяется из следующего неравенства

$$np - q \leq m_0 \leq np + p, \quad (1.19)$$

которое получено решением системы неравенств $\begin{cases} P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1), \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0 + 1). \end{cases}$

АЛГОРИТМ:

1. Проверить, выполняется ли в условии задачи схема Бернулли.
2. Определить вероятность p события A (вероятность успеха) и вероятность неудачи $q=1-p=P(A)$.
3. При заданных n – числе независимых испытаний и m – количестве наступления события A , воспользоваться одной из формул (1.18), (1.20), (1.21), (1.22).

Пример:

Студент проходит тестированный опрос. Тест состоит из пяти вопросов. На каждый даны три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность, что методом угадывания студенту удастся выбрать, по крайней мере, четыре правильных ответа?

Испытание – ответ на один вопрос. Всего испытаний пять. Событие A – выбор наугад правильного ответа на вопрос. Вероятность события A в каждом испытании одинакова и равна $P(A) = p = \frac{1}{3}$. Событие B – выбор, по крайней мере, четырех правильных ответов, т.е. четыре правильных ответа в любом порядке или все пять правильных ответа. По теореме сложения вероятностей и формуле Бернулли

$$\begin{aligned} P(C) &= P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 p^4 q^1 + C_5^5 p^5 q^0 = C_5^4 p^4 q^1 + \\ &+ C_5^0 p^5 q^0 = \frac{5!}{1!4!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot 1 = \frac{11}{3^5} = 0,045. \end{aligned}$$

Если в каждом из независимых испытаний вероятности наступления события A различные, то вероятность наступления события A m раз в n опытах определяется как коэффициент, при m -ой степени полинома:

$\varphi_n(t) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$, где $\varphi_n(t)$ – производящая функция.

Пример:

По некоторой цели производится три независимых выстрела. Вероятности попадания при разных выстрелах различны и равны соответственно: $p_1=0,8$, $p_2=0,7$, $p_3=0,9$. Найдите вероятность промаха, одного, двух, трех попаданий.

Составим полином третьей ($m=3$) степени:

$$\begin{aligned}\varphi_3(t) &= (0,2 + 0,8t) \cdot (0,3 + 0,7t) \cdot (0,1 + 0,9t) = \\ &= 0,504t^3 + 0,398t^2 + 0,092t^1 + 0,006t^0.\end{aligned}$$

Тогда вероятность: промаха $P_3(0)=0,006$;
 одного попадания $P_3(1)=0,092$;
 двух попаданий $P_3(2)=0,398$;
 трех попаданий $P_3(3)=0,504$.

Асимптотические формулы в схеме Бернулли

Для случаев, когда n или m достаточно велики, используют асимптотические (предельные) теоремы: локальную и интегральную теоремы Муавра-Лапласа, формулу Пуассона.

Локальная формула Муавра-Лапласа:

Если число n независимых испытаний достаточно велико ($npq \geq 10$), а вероятность появления события A в каждом из них равна p и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна (локальная формула Муавра-Лапласа):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad (1.20)$$

где

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

а $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ — малая функция Лапласа, значения которой находятся по соответствующим таблицам. (При $x \geq 5$, $\varphi(x) \rightarrow 0$, поэтому $\varphi(x)$ табулирована для $0 \leq x \leq 5$).

Если число n независимых испытаний достаточно велико ($npq < 10$), вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, близка к нулю ($p < 0,1$), а произведение $np = \lambda = \text{const}$, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равно (формула Пуассона)

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = p(m), \quad m=0, 1, \dots, n. \quad (1.21)$$

Значения функции $p(m)$ можно найти в таблицах распределения Пуассона.

Пример1:

На тренировке стрелок выполнил 400 выстрелов в цель. Найдите вероятность 325 попаданий в цель, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.

$npq = 400 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 64 > 10$, $p = 0,8 > 0,1$, поэтому применяем локальную формулу Муавра-Лапласа (1.20).

$$\begin{aligned} P_{400}(325) &\approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \varphi\left(\frac{325 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = \\ &= \frac{1}{8} \varphi(0,625) \approx 0,125 \cdot 0,3271 \approx 0,041. \end{aligned}$$

Пример2:

Студент купил 500 билетов лотереи. Вероятность выигрыша одного билета составляет 0,002. Найдите вероятность того, что выигрышными окажутся:

- а) три билета;
- б) один билет;
- в) не более трех билетов.

$npq = 500 \cdot 0,002 \cdot 0,998 = 0,998 < 10$, $p = 0,002 < 0,1$, поэтому применяем формулу Пуассона (1.21), где $\lambda = np = 500 \cdot 0,002 = 1$.

а) при $m = 3$: $P_{500}(3) \approx \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,061$,

б) при $m = 1$: $P_{500}(1) \approx \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,366$,

в) при $0 \leq m \leq 3$: $P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3) =$
 $= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} + \frac{1}{6e} = \frac{16}{6e} = \frac{8}{3e} \approx 0,976$.

Интегральная формула Муавра-Лапласа:

Если в схеме Бернулли число m появления события A находится в заданном промежутке $a \leq m \leq b$, а n достаточно велико, то вероятность

$$P(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad (1.22)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \quad (1.23)$$

— функция Лапласа (или интеграл вероятности), значения которой находят по таблицам (при $x \geq 5$, $\Phi(x) \rightarrow 1$, поэтому значения функции представлены в виде таблицы для $0 \leq x \leq 5$.)

Следствием формулы (1.22) является вероятность отклонения частоты m/n появления события A в n испытаниях Бернулли от вероятности p на величину $\varepsilon > 0$

$$P(|m/n - p| \leq \varepsilon) \approx \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (1.24)$$

Для числа m наступлений события A из (1.24) следует

$$P(|m - np| \leq \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right). \quad (1.25)$$

Пример 1:

Известно, что в учреждении бытового обслуживания 80% специалистов имеют среднее специальное образование. Найдите вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек среднее специальное образование имеют от 65 до 90 человек?

По условию задачи $n = 100$, $a = 65$, $b = 90$, $p = 0,8$, $q = 0,2$.

Используем формулу (1.22)

$$P(65 \leq m \leq 90) \approx \Phi\left(\frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{65 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-3,75)$$

$$\Phi(2,5) + \Phi(3,75) \approx 0,4938 + 0,49991 = 0,99371.$$

Пример2:

Отдел контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. С вероятностью 0,9544 найдите границы, в которых будет заключено число стандартных деталей.

Из условия задачи следует, что выполняется схема Бернулли: $n = 900$, $p = 0,9$, $P(|m - np| \leq \varepsilon) = 0,9544$, откуда $np - \varepsilon \leq m \leq np + \varepsilon$, где m – число стандартных деталей. По формуле (1,25) имеем $P(|m - np| \leq \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 0,9544$. По таблицам значений большой функ-

ции Лапласа $\Phi(x)$ найдем значение аргумента: $\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} = 2$. Тогда,

$\varepsilon = 2 \cdot \sqrt{900 \cdot 0,9 \cdot 0,1} = 9$ откуда $900 \cdot 0,9 - 9 \leq m \leq 900 \cdot 0,9 + 9$ или $801 < m \leq 819$.

Контрольные вопросы:

1. Можно ли считать схемой Бернулли:

- а) многократное бросание монеты?
- б) многократное бросание кубика?

2. Может ли в схеме Бернулли при $n = 40$, $p = \frac{1}{41}$ наивероятнейшее число успехов быть больше 4?

3. Как определяется параметр λ в формуле Пуассона?

4. С использованием каких функций дается оценка вероятности в формулах Муавра-Лапласа?

5. Какая величина принимается за среднее значение успехов в n испытаниях Бернулли?

Контрольные задания 1.8

1. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6 и собирается произвести 10 выстрелов. Найдите вероятность того, что он попадет в цель: а) три раза, б) хотя бы один раз.

2. Вероятность выбора спортсмена на факультете равна $1/7$. Из 28 студентов группы наудачу вызываются три студента. Определите

вероятности всех возможных значений числа спортсменов, которые могут оказаться среди вызванных трех студентов.

3. Всхожесть клубней картофеля равна 80%. Сколько нужно посадить клубней картофеля, чтобы наивероятнейшее число взошедших из них было равно 100.

4. Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,01 для каждого работника предприятия. Численность работников составляет 500 человек. Определите вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работников.

5. Вероятность рождения мальчика 0,515. Найдите такое число m , чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что среди 900 новорожденных более m мальчиков.

6. В автопарке имеется 400 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,9. С вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля безотказно работавших машин в определенный момент времени.

7. Известно, что 10% делянок под овощами плохо обработаны. Сколько нужно проверить делянок, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что относительная частота засоренных делянок будет отличаться от вероятности засоренности по модулю более чем на 0,99?

8. Всхожесть зерна, хранящегося на складе, равна 80%. Какова вероятность того, что среди 200 зерен число всхожих составит от 136 до 180 штук.

9. Вероятность того, что человек в период страхования будет травмирован, равна 0,006. Компанией застраховано 1000 человек. Годовой взнос с человека составляет 150 руб. В случае получения травмы застраховавшийся получает 12000 руб. Какова вероятность того, что выплата по страховкам превысит сумму страховых взносов?

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К МОДУЛЮ 1

№ варианта	Номера задач									
1	10	21	36	38	46	55	60	65	68	75
2	9	15	17	27	34	43	49	50	51	55
3	7	12	19	26	28	39	61	66	79	80
4	2	11	15	22	27	30	45	55	67	72
5	8	16	20	24	37	53	57	63	71	77
6	2	10	17	35	44	54	64	74	69	76
7	4	11	23	24	28	39	51	54	76	78
8	1	6	9	13	19	40	46	48	57	58
9	6	19	31	33	52	58	62	71	72	80
10	9	13	20	23	25	38	56	60	62	68
11	2	4	7	16	30	32	34	38	63	76
12	5	11	21	23	25	32	40	43	53	78
13	1	14	26	33	34	41	50	58	70	76
14	5	6	15	18	21	50	62	63	67	68
15	10	13	20	31	37	57	61	72	73	74
16	24	25	36	44	47	48	52	54	69	72
17	11	18	21	22	40	52	63	70	78	79
18	1	3	27	39	49	51	61	64	66	78
19	9	12	14	29	30	42	56	69	71	74
20	2	5	14	29	31	55	58	60	70	75
21	12	33	44	47	49	53	57	59	68	76
22	3	7	12	13	16	40	50	56	64	74
23	25	29	30	32	34	36	45	46	53	65
24	8	22	35	48	56	65	69	70	76	77
25	6	19	27	31	32	37	42	59	71	73
26	4	7	16	17	18	26	33	41	42	67
27	3	10	17	22	28	35	37	43	59	69
28	4	8	23	24	26	44	54	61	66	73
29	5	20	35	36	39	42	43	62	63	67
30	1	14	15	18	45	51	62	63	64	75
31	3	8	28	29	38	41	52	75	79	80

1. Из 20 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 17. Найдите вероятность того, что студент ответит правильно на экзаменационный билет, состоящий из трех вопросов.
2. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,8, второго – 0,75, третьего – 0,85, четвертого – 0,95. Найдите вероятность того, что: а) откажут три станка; б) все четыре станка будут работать безотказно; в) хотя бы один станок откажет.
3. Из колоды, содержащей 32 карты, вынимается наугад три. Найдите вероятность того, что это: тройка, семерка, туз.
4. Найдите вероятность того, что абонент наберет правильный двухзначный номер, если он знает, что данный номер не делится на 5.
5. Игральная кость подброшена два раза. а) Найдите вероятность того, что сумма очков на верхних гранях составит 7; б) Найдите вероятность того, что хотя бы при одном подбрасывании появятся два очка.
6. В урне имеется 5 черных и 9 желтых шаров. Последовательно (без возвращения) извлекается три шара. Найдите вероятность того, что: а) все три шара будут желтыми; б) три шара будут желтыми или черными.
7. В группе из 15 человек 9 занимаются спортом. Найдите вероятность того, что из случайно отобранных 10 человек 8 человек занимаются спортом.
8. Мышь может выбрать наугад один из 5 лабиринтов. Известно, что вероятности ее выхода из различных лабиринтов за три минуты соответственно равны 0,5; 0,6; 0,2; 0,1; 0,1. Пусть оказалось, что мышь выбралась из лабиринта через три минуты. Какова вероятность того, что она выбрала второй лабиринт? Третий лабиринт?
9. Из 10 билетов выигрышными являются 3. Найдите вероятность того, что из 7 случайно взятых билетов выигрышными являются два.
10. В сентябре вероятность дождливого дня 0,3. Команда “Экономист” выигрывает в ясный день с вероятностью 0,8, а в дождливый день эта вероятность равна 0,3. Известно, что в сентябре команда выиграла некоторую игру. Какова вероятность, что в этот день: а) шел дождь; б) был ясный день.

11. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,5, третьим – 0,6. Найдите вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель.
12. В первом ящике содержится 20 деталей, из которых 15 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 20 – стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 8 – стандартных. Из случайно взятого ящика наудачу взята одна деталь, которая оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что она взята из третьего ящика.
13. На каждой из семи одинаковых карточек написана одна из следующих букв: Д, Е, Н, С, Т, У, Т. Карточки перемешаны. Определите вероятность того, что из вынутых и положенных в ряд карточек: а) можно составить слово “студент”; б) из пяти карточек составить слово “стенд”.
14. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено два залпа из двух орудий. Найдите вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,54, второго – 0,72.
15. Имеется 3 урны. В первой урне 6 черных и 4 белых шара, во второй – 5 белых и 5 черных шаров, в третьей – 7 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар, который оказался белым. Найдите вероятность того, что выбрана третья урна.
16. Монета подбрасывается 3 раза. Найдите вероятность того, что герб появится: а) все три раза; б) только один раз; в) хотя бы один раз.
17. На отдельных карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все карточки перемешиваются, после чего наугад берут 5 карточек и раскладывают их в ряд. Определите вероятность того, что будет получено число 21095.
18. Три известных экономиста предложили одновременно три экономические теории, которые считались равновероятными. После наблюдения над состоянием экономики оказалось, что вероятность того развития, которое она получила на самом деле, в соответствии с первой теорией была равна 0,5; со второй – 0,7; с третьей – 0,4. Каким образом это изменяет вероятности правильности трех теорий.

19. В магазине продается 4 магнитофона. Вероятность того, что они выдержат гарантийный срок, соответственно равны: 0,91; 0,9; 0,95; 0,94. Найдите вероятность того, что взятый наудачу магнитофон выдержит гарантийный срок.
20. Игральная кость сделана так, что вероятность выпадения определенного числа пропорциональна числу очков. Какова вероятность выпадения трех очков, если известно, что выпало нечетное число очков.
21. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна трем?
22. Студент в поисках книги посещает 3 библиотеки. Вероятность того, что они есть в библиотеках, соответственно равны: 0,4, 0,5, 0,1, а того, что они выданы или нет – равновероятные события. Какова вероятность того, что нужная книга найдена?
23. Найдите вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.
24. В урне имеется 10 белых, 5 черных и 15 желтых шаров. Извлекается последовательно 2 шара. Рассматриваются два события: А – хотя бы один шар из двух вынутых желтый, В – хотя бы один вынутый шар белый. Найдите вероятность события $C = A + B$.
25. Наудачу набранный номер состоит из 5 цифр. Определите вероятность того, что все цифры в нем различны.
26. В магазин трикотажных изделий поступили носки, 60% которых получено от одной фабрики, 25% – другой и 15% – третьей. Найдите вероятность того, что купленные покупателем носки изготовлены на второй или третьей фабриках.
27. Пассажир за получением билета может обратиться в одну из касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, вторую – 0,35, третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3, для второй 0,4, для третьей 0,6. Найдите вероятность того, что пассажир купит билет.
28. Бросают 4 игральные кости. Найдите вероятность того, что:
а) хотя бы на одной появится 2 очка; б) на них выпадет по одинаковому числу очков.

29. Из 9 жетонов, занумерованных разными однозначными числами, выбирается 3. Найдите вероятность того, что последовательная запись их номеров покажет возрастание значений цифр.
30. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Какова вероятность того, что выиграет хотя бы один билет из трех купленных.
31. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу 4 карты. Найдите вероятность того, что все эти карты будут разных мастей.
32. Имеется 3 урны. В первой из них 5 белых и 6 черных шаров, во второй – 4 белых и 3 черных шара, в третьей – 5 белых и 3 черных шара. Некто наугад выбирает одну из урн и вынимает из нее шар. Этот шар оказался белым. Найдите вероятность того, что шар вынут из второй урны.
33. В магазине имеется в продаже 20 пар обуви, из которых 7 пар 42-го размера. Найдите вероятность того, что из 8 покупателей трое выберут обувь 42-го размера.
34. В мешке смешаны нити трех цветов: 30% белых, 50% желтых, остальные – зеленые. Определите вероятность того, что при последовательном вытягивании наугад трех нитей окажется, что все они одного цвета.
35. В урне m белых и n черных шаров. Из урны извлекли один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найдите вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, тоже белый.
36. У рыбака имеется два места ловли рыбы, которые он посещает с одинаковой вероятностью. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,6, на втором – с вероятностью 0,7. Рыбак, выйдя на ловлю в одно из мест, два раза закинул удочку. Найдите вероятность того, что рыба клонет только один раз.
37. На сборку поступило 50 деталей от первого станка, 100 – от второго и 150 – от третьего. Первый станок дает 2%, второй 1% и третий 2% брака. Найдите вероятность того, что взятая наугад деталь окажется не бракованной. Задачу решите двумя способами.

38. Найдите вероятность того, что на две определенные карточки в “Спортлото-5 из 36” будет получено по минимальному выигрышу (угадано ровно три числа).
39. Вероятность того, что стрелок попадет хотя бы один раз при трех выстрелах, равна 0,992. Найдите вероятность попадания в цель при одном выстреле, предполагая ее постоянной при каждом выстреле.
40. Пусть 3% всех мужчин и 0,5% всех женщин дальтоники. Наугад выбранный человек оказался дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина? (Считайте, что число женщин и мужчин одинаково.)
41. В группе из 25 человек 10 учится на “отлично”, 8 на “хорошо” и 7 – на “удовлетворительно”. Найдите вероятность того, что из взятых наугад 8 человек 3 человека учатся на “отлично”.
42. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует первому числу месяца? (Год считается не високосным).
43. В группе спортсменов 10 лыжников, 6 боксеров и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжников составляет 0,8, боксеров – 0,7, бегунов – 0,9. Найдите вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационную норму.
44. На одной полке наудачу расставляются 8 книг. Найдите вероятность того, что определенные три книги окажутся поставленными рядом.
45. Монету бросают три раза. Какое из событий более вероятно: событие А – все три раза выпала цифра или событие В – два раза выпала цифра и один раз герб? Подсчитайте вероятности этих событий.
46. К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых 50 спелых. Покупатель выбирает два арбуза. Какова вероятность, что оба арбуза спелые?
47. На один ряд из 7 мест случайным образом садятся семь учеников. Найдите вероятность того, что три определенных ученика окажутся рядом.
48. Известно, что при 10-кратном бросании монеты 5 раз выпали гербы и 5 раз цифры. Какова вероятность того, что все гербы выпали при первых пяти бросаниях?

49. Из 15 строительных рабочих 10 – штукатуры, а 5 – маляры. Наудачу отбирается бригада из 5 рабочих. Какова вероятность того, что среди них будет 3 маляра и 2 штукатура?
50. Игральная кость подброшена 3 раза. Найдите вероятность того, что: а) все три раза выпадет четное число очков; б) четное число очков выпадет только один раз; в) четное число очков выпадет хотя бы один раз.
51. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата в 2 раза больше производительности второго. Вероятность изготовления не бракованной детали первым автоматом равна 0,95, а вторым – 0,8. Найдите вероятность того, что взятая наугад деталь окажется стандартной.
52. Какова вероятность получения 1 туза, туза и короля при сдаче 6 карт из колоды в 52 карты?
53. В соревнованиях по футболу участвуют 20 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 10 команд. Какова вероятность того, что 2 наиболее сильные команды окажутся в одной группе?
54. Гардеробщица одновременно выдала номерки пяти лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы, и повесила их наугад. Найдите вероятность того, что она каждому выдаст его собственную шляпу.
55. Несколько раз бросают игральную кость. Какова вероятность того, что одно очко появится впервые при третьем бросании?
56. 20 машин были доставлены на станцию технического обслуживания. При этом 5 из них имели неисправность в ходовой части, 8 имели неисправности в моторе, а 10 были полностью исправны. Какова вероятность, что машина с неисправной ходовой частью имеет также неисправный мотор?
57. Из 15 билетов выигрышными являются 2. Найдите вероятность того, что из 10 билетов выигрышным является один.
58. Готовясь к вступительному экзамену по математике, абитуриент должен подготовить 20 вопросов по геометрии и 25 по алгебре. Однако он успел подготовить только 15 вопросов по геометрии и 20 вопросов по алгебре. Билет содержит 3 вопроса, два из которых по геометрии и один по алгебре. Какова

вероятность, что: а) студент сдает экзамен на “отлично” (отвечает на все три вопроса); б) на “хорошо” (отвечает на любые два вопроса)?

59. На стеллаже 15 учебников, 5 из них в переплете. Наудачу выбирают 3 учебника. Какова вероятность, что хотя бы один из них будет в переплете?
60. Из пяти винтовок (3 снайперские и 2 обычные), наудачу выбирается одна, и из нее производится выстрел. Найдите вероятность попадания, если вероятность попадания из снайперской винтовки – 0,95, а из обычной – 0,7.
61. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Произведено 3 выстрела. Какова вероятность, что будет: а) три попадания; б) один промах; в) хотя бы одно попадание.
62. На спортивных соревнованиях вероятность показать рекордный результат для первого спортсмена равна 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,1. Какова вероятность того, что а) рекорд будет установлен одним спортсменом; б) рекорд будет установлен хотя бы одним спортсменом; в) рекорд не будет установлен?
63. В первой урне 6 шаров черного и 4 белого цвета, во второй 3 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что вынуты: а) 2 белых шара; б) хотя бы один шар черный; в) белый и черный в любой последовательности?
64. Вероятность того, что хотя бы один из трех покупателей купит определенный товар, равна 0,784. Вероятности покупки товара покупателями одинаковы. Определите вероятность того, что: а) два покупателя совершат покупки; б) три покупателя совершат покупки.
65. В коробке находятся жетоны с числами от 1 до 10. Наудачу извлекаются два жетона. Какова вероятность того, что будут вытянуты: а) оба жетона с нечетными номерами; б) хотя бы один жетон с нечетным номером; в) один жетон с четным номером.
66. В двух группах обучается по 25 студентов. В первой группе сессию на “отлично” сдали 7 человек, во второй – 4 человека. Из каждой группы наудачу вызывают по одному студенту. Какова вероятность того, что: а) оба студента отличники; б) только один отличник; в) хотя бы один отличник.

67. В первой бригаде из 8 тракторов 2 требуют ремонта, во второй из 6 тракторов 1 требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Определите вероятность того, что: а) оба трактора исправны; б) хотя бы один исправен; в) только один исправен.
68. В организации работают 12 мужчин и 8 женщин. Для них выделено 3 премии. Определите вероятность того, что премию получают: а) двое мужчин и одна женщина; б) только женщины; в) хотя бы один мужчина.
69. Из 25 работников предприятия 10 имеют высшее образование. Определите вероятность того, что из случайно отобранных четырех человек высшее образование имеют: а) четыре человека; б) один человек; в) хотя бы один человек.
70. На карточках написаны буквы А, К, И, Т, А, М, А, Т, Е, М. Карточки перемешивают и кладут в порядке их вытаскивания. Какова вероятность, что получится: а) слово “МАТЕМАТИКА”; б) слово “ТЕМАТИКА”; в) слово “ТЕМА”?
71. В коробке из 25 изделий 15 повышенного качества. Наудачу извлекается 3 изделия. Определите вероятность того, что: а) одно из них повышенного качества; б) все три изделия повышенного качества; в) хотя бы одно изделие повышенного качества.
72. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что: а) хотя бы на одной из них появится 5 очков; б) на всех выпадут нечетные числа; в) на всех костях выпадут три одинаковых числа?
73. В первом ящике из 6 шаров 4 желтых и 2 черных, во втором ящике из 7 шаров 2 желтых и 5 черных. Из первого ящика во второй переложили один шар, затем из второго в первый переложили один шар. Найдите вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первого ящика – желтый.
74. Два предприятия выпускают однотипные изделия. Причем второе выпускает 55% изделий обоих предприятий. Вероятность выпуска нестандартного изделия первым предприятием равна 0,1, вторым – 0,15. а) Определите вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется нестандартным. б) Взятое изделие оказалось нестандартным. Какова вероятность, что оно выпущено на втором предприятии?

75. Имеется три урны. В первой 3 белых и 2 черных шара, во второй и третьей по 4 белых и 3 черных шара. Из случайно выбранной урны извлекается шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар взят из третьей урны?
76. Семена для посева в хозяйство поступают из трех семеноводческих хозяйств. Причем первое и второе хозяйства присылают по 40% всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства равна 90%, второго – 85%, третьего – 95%. а) Определите вероятность того, что наудачу взятое семя не взойдет. б) Наудачу взятое семя не взошло. Какова вероятность, что оно получено со второго хозяйства?
77. Программа экзамена состоит из 30 вопросов. Из двадцати студентов группы 8 человек выучили все вопросы, 6 человек по 25 вопросов, 5 человек по 20 вопросов, а один человек – 10 вопросов. Определите вероятность того, что случайно вызванный студент ответит на два вопроса билета.
78. Перед посевом 95% семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки равна 99%, а необработанных – 85%. а) Какова вероятность того, что случайно взятое семя не взойдет? б) Случайно взятое семя взошло. Какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени?
79. В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность, равна для первого завода 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,8 и для четвертого – 0,99. Случайно выбранный телевизор в течение года вышел из строя. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?
80. Покупатель с равной вероятностью посещает каждый из трех магазинов. Вероятность того, что покупатель купит товар в первом магазине, равна 0,4, во втором – 0,6, в третьем – 0,8. Определите вероятность того, что покупатель купит товар в каком-нибудь магазине. Покупатель купил товар, найдите вероятность того, что он купил его в третьем магазине.

ПРОГРАММА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (МОДУЛЬ 1: СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТЬ)

Размещения, перестановки, сочетания.

Случайные события и их классификации.

Действия над событиями.

Классическое определение вероятности.

Статистическое определение вероятности.

Аксиоматическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности.

Теорема сложения вероятностей.

Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Формула полной вероятности.

Формула Байеса.

Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.

Наивероятнейшее число наступления события.

Формула Пуассона.

Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа.

.

ЛИТЕРАТУРА:

1. **Белько И.В., Кузьмич К.К.** Высшая математика для экономистов. III семестр: Экспресс-курс. – М.: Новое знание, 2002. – 144 с.
2. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб.пособие для студентов вузов. Изд.4-е стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 400с., ил.
3. **Горелова Г.В., Кацко И.А.** Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel : учебное пособие для вузов. – 2-е изд., испр. и доп. – Ростов н/Д: Феникс, 2002. – 400 с.: ил.
4. **Калинина В.Н., Панкин В.Ф.** Математическая статистика : учеб. для студ. сред. спец. учеб. заведений. – 3-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2001. – 336 с.: ил.
5. **Кремер Н.Ш.** Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001.

Учебное издание

Сазонова Алла Михайловна

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**
МОДУЛЬ 1. СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТЬ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Редактор *В.А. Сорокин*
Технический редактор *А. Н. Гладун*
Компьютерная верстка *В.С. Цумарева*
Корректор *И.Г. Коржова*

Подписано в печать 21.04.2005. Формат 60х84/16
Бумага газетная. Гарнитура Times New Roman. Усл.-печ. л. 2,6.
Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 70 экз. Заказ № 176.

Могилевский государственный университет
им. А.А. Кулешова, 212022, Могилев, Космонавтов, 1.
Лицензия ЛИ № 02330/278 от 30.04.04.

Напечатано на ризографе отдела оперативной полиграфии
МГУ им. А.А. Кулешова. 212022, Могилев, Космонавтов, 1