ОБЪЕДИНЕНИЕ ПО ОРГАНИЗАЦИИ
ВНЕШКОЛЬНОЙ ВОСПИТАТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
МОГИЛЁВСКОГО ОБЛИСПОЛКОМА

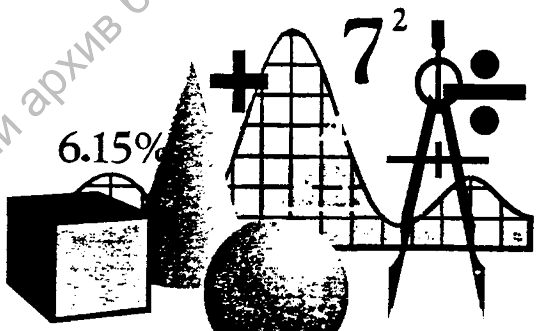
ЗАОЧНАЯ ШКОЛА "ЮНЫЙ МАТЕМАТИК"

А. М. Сазонова

Сплавы, растворы, смеси

Часть I

9 класс



Могилёв
2000

Одним из непременных критериев оценки математической подготовки большинства учащихся является умение решать текстовые задачи. Такая задача представляет собой словесную модель некоторой практической задачи, пусть и не всегда достаточно реальной по содержанию.

Однако логика формализации, или построения математической модели изучаемого объекта, и остальных этапов прикладного математического исследования содержатся в ней обязательно.

Остановимся на методике формализации задач раздела "Сплавы, растворы, смеси". Все задачи подобраны из вариантов разных лет вступительных в вузы экзаменов.

п. I Табличный метод.

Выделим первый тип таких задач- задачи на завершенные действия /без аналогичных повторов/. Логику формализации удобнее четко соблюдать, используя таблицу. Рассмотрим этот метод через задачи.

ЗАДАЧА № I

Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой I2 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

Компонентами сплава являются медь, олово. Поэтому таблица будет состоять из четырех колонок /единицы измерения- кг - вынесем в заглавие колонок/. Содержание компонента будем записывать выражением /а не значением выражения/, чтобы более отчетливо "увидеть" рассуждение решающего.

	медь	олово	общее количество /кг/ /сплав/
Было	0,45·I2	I2-0,45·I2	I2
Добавили		x	x
Получили	0,4·/I2+x/ или 0,45·I2	/I2-0,45·I2/+x	I2+x

Соответствующие рассуждения:

Было I2 /кг/ сплава,из них 45%,т.е. 0,45·I2 /кг/ меди,остальное I2- 0,45·I2 /кг/ /или можно было рассуждать так: I00-45=55 /%/- составляет олово,или 0,55·I2 /кг/ составляет олово - эти рассуждения соответствуют первой строке таблицы.

Добавили х /кг/ олова,что совпадает с общим количеством т.к. добавили чистое олово - это заполнение второй строки. Получили /I2+х/ /кг/ сплава,в котором 40%,а значит,0,4·/I2+х/ /кг/ меди. /Откуда эта медь "взялась? Смотрим по колонке на первую строку/ или 0,45·I2.Выделенная связь в таблице для меди в новом сплаве и есть уравнение.

$$0,4\cdot /I2+x/ = 0,45\cdot I2,$$

откуда

$$x = I,5 /кг/$$

Ответ: I,5 кг чистого олова надо добавить.

Заметим,что в задаче существенным компонентом,по которому ведется сравнение,является медь.Поэтому при достаточно приобретенном навыке формализации через таблицы можно колонку компонента,по которому не ведется сравнение,опустить.Таблица может выглядеть так

	Медь	Общее количество /кг/
Было	0,45·I2	I2
Добавили		х
Получили	0,4/I2+х/ или 0,45·I2	I2+X

ЗАДАЧА № 2

Имеется два сплава золота и серебра.В первом количество этих металлов находится в отношении 2:3, а в другом 3: 7.

Сколько надо взять каждого сплава,чтобы получить 8 кг нового сплава,в котором золото и серебро были в отношении 5:II.

В данной задаче существенными компонентами,по которым ведется сравнение,являются золото и серебро.

	Золото	Серебро	Общее кол-во /кг/
I	$\frac{2}{5}x$	$\frac{3}{5}x$	x
П	$\frac{3}{10}y$	$\frac{7}{10}y$	y
I+П	$\frac{5}{16}\cdot 8$ или $\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y$	$\frac{11}{16}\cdot 8$ или $\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y$	$x+y$ или 8

В I сплаве / x кг/ было $\frac{2}{5}x$ /кг/ и $\frac{3}{5}x$ /кг/ соответственно золота и серебра.

Во П сплаве / y кг/ было $\frac{3}{10}y$ /кг/ и $\frac{7}{10}y$/кг/ золота и серебра соответственно.

В новом /I+П/ сплаве /$x+y$/ кг или 8 кг $\frac{5}{16}\cdot 8$ кг золота /или / $\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y$ / кг/ и $\frac{11}{16}\cdot 8$ кг /или/ $\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y$ / кг / серебра.Любые два из выделенных условий дадут уравнения для определения искомых величин.Например,

$$\begin{cases} x+y=8 \\ \frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y=\frac{5}{16}\cdot 8, \end{cases} \text{ откуда } \quad \begin{matrix} x=1 \\ y=7 \end{matrix}$$

<u>Ответ</u>: I сплава надо взять I кг, П сплава - 7 кг.

Примечание: Описание рассуждений вне таблицы не обязательно Учтем это в дальнейшем.

<u>ЗАДАЧА № 3</u> Вычислите вес и пробу сплава серебра с медью, зная,что сплавив его с 3 кг чистого серебра,получим сплав 900-й

пробы,а сплавив его с 2 кг сплава 900-й пробы,получим сплав 840-й пробы.

Существенным компонентом,по которому ведется сравнение, является серебро.Обозначим через x - вес,а через p - пробу имеющегося сплава. /Проба - тысячная доля/.

	Серебро	Общее количество /кг/
Было	$\frac{p}{1000} \cdot x$	x
Взяли I раз	3	3
Получили I раз	0,9 /x+3/ или 0,001px +3	x+ 3
Взяли II раз	0,9 . 2	2
Получили II раз	0,84/x+2/ или 0,001px+0,9.2	x+2

Имеем систему уравнений $\begin{cases} 0,9\ /x+3/= 0,001\ px +3, \\ 0,84\ /x+2/= 0,001\ px +0,9.2, \end{cases}$

откуда x= 3 /кг/
p= 800 /проба/

Ответ: Было 3 кг 800-й пробы сплава серебра с медью.

ЗАДАЧА 4. Имеется три слитка:Первый слиток весит 5 кг, второй 3 кг и каждый из этих двух слитков содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим,то получится слиток,содержащий 56% меди,а если второй слиток сплавить с третьим,то получится слиток,содержащий 60% меди.Найдите вес третьего слитка и процент содержания меди в нем.

Обозначим вес третьего слитка x /кг/,а процент содержания меди в нем p /%/.

	Медь	Общее кол-во /кг/
I	0,3 . 5	5
П	0,3 . 3	3
Ш	0,0Iрх	х
I+Ш	0,56./5+х/ или 0,3 .5+0,0Iрх	5+х
П+Ш	0,6 /3+х/ или 0,3.3+0,0Iрх	3+х

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,56\ /5+x/= 0,3\cdot 5+0,0I\ px \\ 0,6\ /3+x/= 0,3\cdot 3+0,0I\ px \end{cases}$$, решаю которую,

получим $x = I0$

$p = 69$

Ответ: I0 кг третьего слитка содержит 69% меди.Не всегда уравнение выделяется непосредственно в таблице.Рассмотрим пример.

ЗАДАЧА 5. Из двух сплавов массами 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок,отрезанный от первого сплава,сплавили с остатком второго сплава,а кусок,отрезанный от второго сплава ,сплавили с остатком от первого сплава.Определить массу каждого из отрезанных кусков,если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

Обозначим процентное содержание магния в первом и втором сплавах соответственно а/%/ и в/%/,т.к. это процентное содержание разное,то $а \neq в$.

	Магний	Общее количество /кг/
I	0,0Iа· 7	7
П	0,0Iв· 3	3
Отрезали I /I'/	0,0Iа· х	х
Осталось от I / I"/	0,0Iа/7-х/	7-х
Отрезали от П /П'/	0,0Iвх	х
Осталось от П(П")	0,01в(3-х)	3-х

	! Магний	!Общее количество /кг/
I' + П"	0,01ах + 0,01в /3- х/	3
I"+ П'	0,01а /7-х/ + 0,01 вх	7

Процентное содержание магния в полученных сплавах / I + П" и I "+ П / одинаково,значит,другими словами,одинакова концентрация магния в этих сплавах /отношение количества вещества к тому количеству,в котором оно содержится.Это количество может измеряться в единицах массы /массовая концентрация/,в единицах объема /объемная концентрация/,в молях /молярная концентрация/ .

Таким образом,

$$\frac{0{,}01ax + 0{,}01в\,/3-x/}{3} = \frac{0{,}01a/7-x/ + 0{,}01\,вx}{7},$$

Откуда 10 /а-в/ х = 21 /а- в/ Т.к. а $\neq$ в, то получим равносильное уравнение 10х = 21

х= 2,1 /кг/

Ответ: Отрезали 2,1 кг

Обратим внимание на использованный в заполнении таблицы факт: процентное содержание вещества в однородном сплаве /раствора, смеси/ одинаково в любом его количестве /см.,например,первую строку - это 7 кг а %-го содержания магния,третью строку - это х кг а %-го содержания магния,четвертую строку - это /7- х/ кг а% -го содержания магния/.

Другими словами,концентрация вещества в любом количестве однородного сплава /раствора,смеси/ одинакова.

Рассмотрим ту же идею формализации для задачи другого содержания.

ЗАДАЧА 6. Имеются две бочки бензина разной цены объемом m литров и n литров. Одновременно из обеих бочек отлили равное количество бензина и бензин,отлитый из первой бочки,перелили во вторую,а бензин,отлитый из второй бочки,в первую,после чего цена бензина в обеих бочках стала одинаковой.Сколько литров бензина было перелито?

Здесь роль концентрации играет цена.
Обозначим цены соответственно а и в /а ≠ в /

	Стоимость	Общее количество /л/
I	а	m
П	вп	п
Отлили от I /I'/	ах	х
Осталось от I /I"/	а/m - х/	m - х
Отлили от П / П'/	вх	х
Осталось от П /П"/	в/п-х/	п- х
I' + П"	ах+в /п-х/	n
I"+ П'	а/m - х/ + вх	m

$$\frac{ах + в/п - х/}{n} = \frac{а/m - х/ + вх}{m}$$ /цены стали равными/

$х\ /в - а/\ /m + п/ = п\ /в - а/$ т.к. $а \neq в$, то

$$х = \frac{п}{m + п}$$

Ответ: $\frac{п}{m + п}$ литров было перелито

п.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

При решении задач старайтесь выбрать ядро формализации так, чтобы получить наиболее удачный путь составления уравнений.

I. Морская вода содержит 8% /по весу/ соли. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 30 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составило 5%?

2. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди следует добавить к этому куску, чтобы получить сплав, содержащий 60% меди?

3. В 2 литрах 10%-го раствора уксусной кислоты добавили 8 л чистой воды. Определить процентное содержание уксусной кислоты в полученном растворе.

4. К раствору, содержащему 39 г соли, добавили 1000 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10%. Найти первоначальную процентную концентрацию соли в растворе.