

Могилевский государственный педагогический институт
им. А. А. Кулешова

Могилевский областной институт усовершенствования учителей

Методы решения конструктивных задач на плоскости

(методическое пособие
с помощью учителя математики)

СОСТАВИТЕЛЬ: Сазонова А.М. – кандидат педагогических наук,
доцент кафедры и геометрии Могилёвского пединститута им.А.А.Кулешова.

Методы решения конструктивных задач на плоскости (методическое пособие) – Могилёв, 1996. – с 26.

Одобрено и рекомендовано к печати кафедрой алгебры и геометрии Могилёвского государственного педагогического института им. А.А.Кулешова (протокол № 6 от 11 декабря 1995 г)

Печатается по решению Совета кабинета математики Могилёвского областного института усовершенствования учителей.

РЕЦЕНЗЕНТЫ: Николаева В.В. – канд.пед.наук., доцент кафедры методики преподавания математики Могилёвского пединститута им.А.А.Кулешова;
– Матюшевская Я.К. – учительница математики СШ № 21 г.Могилёва, учитель высшей категории, Заслуженный учитель Республики Беларусь.

Методическое пособие разработано в соответствии со школьной программой по геометрии и имеет целью помочь учителям математики средних школ, ПТУ и техникумов осуществить систематический подход к решению конструктивных задач на евклидовой плоскости.

Ответственный за выпуск: ШУСТИКОВА В.Я.

– Зав. кабинетом математики Могилёвского областного института усовершенствования учителей.

Данное пособие по конструктивной геометрии разработано на основе текстов экзаменационных заданий для учащихся 9 классов. Задачи разбиты на три группы по методам их решения: метод геометрических мест, алгебраический метод и метод преобразований.

Следует заметить, что предложенные способы решений отдельных задач не являются единственно возможными, и такие задачи помещены в соответствующую группу по причине демонстрации указанного метода.

Напомним, что основными инструментами построения на евклидовой плоскости служат односторонняя линейка (имитация прямой) и циркуль (имитация окружности). Решение конструктивной задачи (задачи на построение) состоит из четырех этапов: 1) анализа, 2) построения, 3) доказательства, 4) исследования.

В анализе, как правило, от руки делают чертеж якобы искомой фигуры и к ней присоединяют данные задачи. Находят связи между данными или производными от них, чтобы определить путь решения задачи и ответить на вопрос: "К чему сводится решение задачи?" (Например, задача сводится к построению отрезка по формуле).

На этапе построения с помощью чертежных инструментов задаются данные задачи и осуществляется пошаговое построение фигуры с описанием каждого шага, содержащего ряд простейших построений. (Например, стрсим прямоугольный треугольник по двум катетам - шаг построения.)

На этапе доказательства проводится обоснование того, что построенная фигура является искомой, т.е. удовлетворяет условию задачи.

На этапе исследования отвечают на вопросы: "Возможен ли каждый шаг построения и при каких наборах данных?" (Здесь допускается либо аналитическое условие для данных задачи, т.е. данные задачи связываются формулой, либо дается описательное условие, например, если окружность и прямая имеют одну общую точку.) и "Если шаг возможен, то сколько при этом имеем решений?" (Если положение построенной фигуры на плоскости несущественно относительно данных задачи, то решение считается единственным (фигуры можно совместить движением плоскости). Например, треугольник, построенный по трем заданным отрезкам, единственен. Если же положение построенной фигуры существенно относительно заданных фигур, то решения считаются различными. Например, касательных, проведенных к заданной окружности из точки вне круга, определяемого этой окружностью, - две.)

В исследовании также описывается способ построения при определенных наборах данных, если он отличается от предложенного общего случая построения.

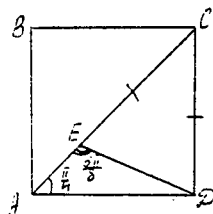
Отметим, что из методических соображений не всегда целесообразно четко выделять в решении задачи указанные выше этапы. На практике синтезируют целесообразно отдельные **ЭТАПЫ**, что сможет читатель увидеть в дальнейшем изложении.

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ.

Суть метода состоит в том, что задача сводится к построению одной точки, удовлетворяющей двум условиям, вытекающим из постановки задачи. Очевидно, что точка X принадлежит пересечению двух множеств точек, каждое из которых удовлетворяет соответственно одному из рассматриваемых условий.

Из варианта 3.

Построить квадрат по разности его диагонали и стороны.



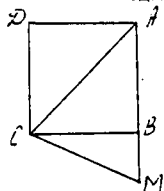
Допустим, что данный квадрат построен и разность его диагонали и стороны равна данному отрезку.

Построим на диагонали AC точку E так, что $CE = CD$. Так как $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ - диагональ квадрата, то $\angle CAD = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Но $\triangle CDE$ - равнобедренный. У него углы при осно-

вании равны. Тогда $\angle CED = \angle CDE = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$.
 $\angle AED = \pi - \frac{3\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$.

Отсюда построение искомого квадрата:

Строим треугольник AED по данной стороне AE и двум прилежащим углам. Строим перпендикуляр к AD , проходящий через точку D . Точка C - точка пересечения этого перпендикуляра и продолжения отрезка AE . Точку B можно построить как пересечение прямой, проходящей через точку A и параллельной CD , и прямой, проходящей через точку C и параллельной AD . Задача имеет одно решение.



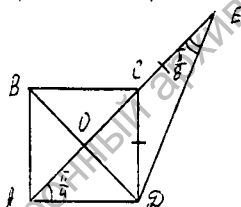
Примечание:

Данную разность диагонали и стороны можно отложить на продолжении стороны AB ($BM = AC - AB$), тогда задача сведётся к построению $\triangle CBM$ по

катету BM и $\angle CMB = \frac{3\pi}{8}$ ($\angle AMC = \angle ACM$).

Из варианта 4.

Построить квадрат по сумме его диагонали и стороны.



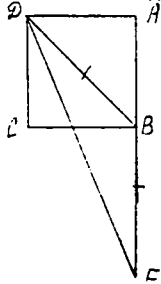
Допустим, что данный квадрат построен и сумма его диагонали и стороны равна данному отрезку.

На продолжении диагонали AC построим отрезок $CE = CD$. Так как $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ - диагональ квадрата, то $\angle CAD = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Но треугольник CDE - равнобедренный. В нём $\angle CED = \angle CDE = \frac{\pi}{5}$.

Отсюда вытекает построение квадрата:

Строим треугольник ADE по данной стороне AE и двум прилежащим углам. Строим перпендикуляр к стороне AD , проходящий через точку D . Точка C - точка пересечения этого перпендикуляра и прямой AE . Точку B можно построить следующим образом: точка O - середина AC ; $OB = OD$.

Задача имеет единственное решение.



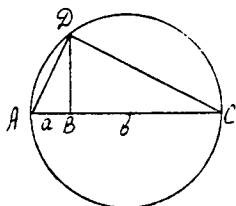
Примечание:

Построив сумму диагонали и стороны квадрата на стороне и её продолжении стороны, можно свести решение задачи к построению прямоугольного треугольника DAE по катету AE и углу $\angle AED = \frac{\pi}{5}$.

($\angle DBA = \frac{\pi}{4}$ - внешний угол треугольника DBE).

Из варианта 65.

Построить прямоугольный треугольник по двум данным отрезкам - проекциям его катетов на гипотенузу.



Пусть a, b - проекции катетов на гипотенузу. Тогда угол $ADC = 90^\circ$ можно рассматривать как вписанный угол, опирающийся на диаметр.

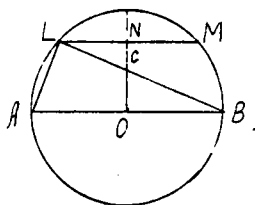
Построение:

На отрезке $AC = a + b$, как на диаметре, строим окружность. Строим перпендикуляр к отрезку AC , проходящий через точку B ($AB = a$). Пусть точка D - точка пересечения перпендикуляра с окружностью. Треугольник ADC - исконый.

Задача всегда имеет одно решение.

Из варианта 66.

Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла.



Вписанные в окружность углы, опирающиеся на концы диаметра окружности, прямые.

Построение:

Строим на гипотенузе AB , как на диаметре, окружность. Строим прямую s , перпендикулярную AB . На прямой s откладываем высоту, т. е. $ON = h$. Через точку N строим прямую, параллельную AB . Точки L, M - точки пересечения прямой с окружностью.

Треугольник ALB - исконый.

Задача имеет одно решение если $h \leq \frac{AB}{2}$ и не имеет решений если $h > \frac{AB}{2}$.

Из варианта 69.

Построить окружность с центром в данной на стороне данного угла точке, которая отсекает на другой его стороне хорду данной длины.

Допустим, что окружность построена. Опустим из точки O перпендикуляр на хорду. Тогда $CL = BL$.

Построение:

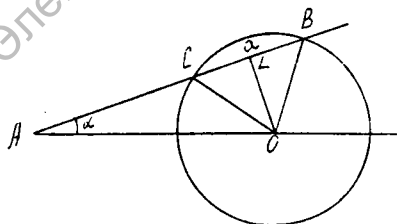
Опускаем перпендикуляр из точки O на вторую сторону угла ($OL \perp AB$). На луче AB от точки L откладываем отрезок

$LB = \frac{a}{2}$. Строим окружность с центром в

точке O и радиусом OB .

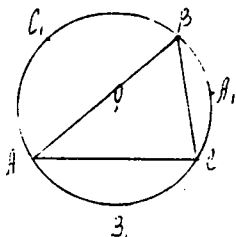
Полученная окружность - исконая.

Задача имеет решение, если $OL \cdot \operatorname{ctg} \alpha > \frac{a}{2}$.



Из варианта 104.

Построить треугольник, зная три точки, в которых продолжения биссектрис пересекают описанную вокруг него окружность.



Предположим, что треугольник ABC построен. Так как точки A_1, B_1, C_1 лежат на биссектрисах углов A, B, C соответственно, то эти точки делят дуги BC, AC, AB пополам соответственно.

По свойству вписанных углов имеем:

$$\angle A_1OC_1 = \angle A + \angle C$$

$$\angle A_1OB_1 = \angle A + \angle B$$

$$\angle B_1OC_1 = \angle B + \angle C$$

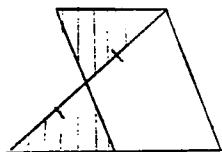
$$\text{откуда } \angle A = \frac{\angle A_1OC_1 + \angle A_1OB_1 - \angle B_1OC_1}{2}$$

Построение:

Строим $\angle A_1OB_1 = \angle A$. получаем точку B. Строим $BC \perp OA_1$, $CA \perp OB_1$.

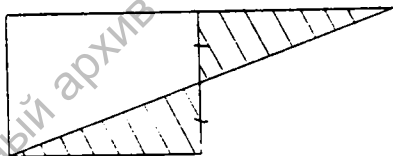
Из варианта 5.

Разрезать данный треугольник на 2 части таким образом, чтоб из них можно было составить параллелограмм.



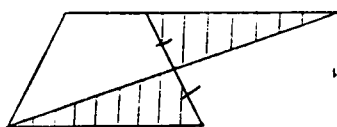
Из варианта 6.

Разрезать данный прямоугольник на две части таким образом, чтобы из них можно было составить прямоугольный треугольник.

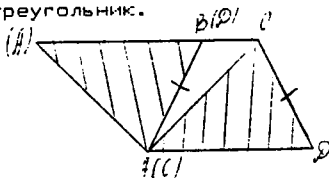


Из варианта 19.

Разрезать равнобокую трапецию на две части таким образом, чтобы из них можно было составить треугольник.



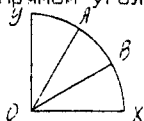
или



разрез по AC трапеции ABCD

Из варианта 41.

Разделить прямой угол на три равных угла с помощью циркуля и линейки.



Строим:

$$UB=XA=OX=OY=r.$$

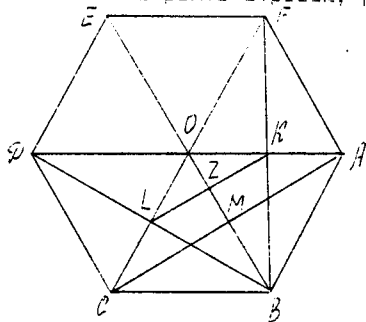
Тогда

$$\angle AOX = \angle YOB = 60^\circ.$$

$$\angle YOA = \angle AOB = \angle BOX = 30^\circ.$$

Из варианта 71.

В окружность вписан правильный шестиугольник. При помощи только линейки построить отрезок, равный $\frac{1}{4}$ радиуса окружности.



Строим:

$$1) AC \cap OB = M$$

$$\text{тогда } OM = MB = \frac{1}{2} OB = \frac{1}{2} r;$$

$$2) BF \cap OA = K; \quad BD \cap OC = L$$

$$\text{тогда } OL = OM = OK = \frac{1}{2} r;$$

$$3) KL \cap OB = Z$$

$$\text{тогда } OZ = \frac{1}{4} OB = \frac{1}{4} r.$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени М.А. Кулешова

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД :

Алгебраический метод состоит в том, что надо вложить отрезок x в отрезок a и отрезок b так, чтобы x был средним пропорциональным между a и b . Тогда $x = \sqrt{ab}$.

$$x = a + b, x = a - b (a > b)$$

$$x = \frac{m}{n} a, m, n \in \mathbb{N}$$

$$x = a\sqrt{n}, n \in \mathbb{N};$$

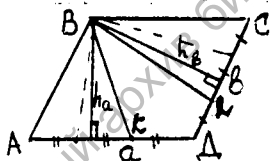
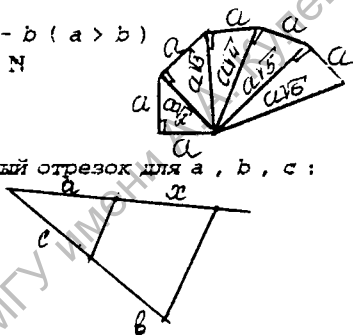
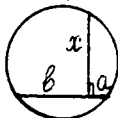
$$x = \frac{ab}{c}$$

(x - четвёртый пропорциональный отрезок для a, b, c :

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}.$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$x = \sqrt{ab}.$$



$ABCD$ - параллелограмм. Обозначим $AD = a$, $CD = b$, высота к AD равна h_a , к CD равна h_d .

$$S_{ABCD} = S, S = bh_d = ah_a, \frac{1}{3}S = \frac{1}{3}bh_d = \frac{1}{3}ah_a.$$

Пусть прямые BK и BL - искомые, тогда $S_{ABK} = \frac{1}{2}h_a AK = \frac{1}{3}ah_a$.

$$\text{Откуда } AK = \frac{2}{3}a.$$

$$\text{Из } S_{BLC} : CL = \frac{2}{3}b.$$

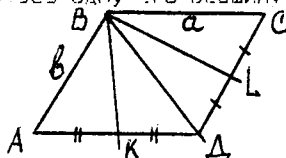
$$S_{BKDL} = S - (S_{ABK} + S_{BLC}) = \frac{1}{3}S.$$

Задача сводится к построению отрезков $AK = \frac{2}{3}a$ и $CL = \frac{2}{3}b$.

Задача имеет единственное решение.

Из варианта N 24 .

Разделить параллелограмм ABCD тремя прямыми, которые проходят через одну его вершину B, на четыре равнозеликие части.



Решение :

ABCD - параллелограмм. Обозначим $AD = a$, $CD = b$, высота к AD равна h_a , к CD равна h_d .

$$S_{ABCD} = S = bh_b = ah_a; \quad \frac{1}{4}S = \frac{1}{4}bh_b = \frac{1}{4}ah_a.$$

BD делит ABCD на треугольник ABD и треугольник CBD,

$$\text{где: } S_{ABD} = S_{CBD} = \frac{1}{2}S.$$

Разделим эти треугольники так, чтобы получились четыре равнозеликие фигуры. Рассмотрим $\triangle ABD$:

$$S_{ABK} = \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{1}{2}h \cdot \frac{1}{2}a =$$

$$\frac{1}{2}a - \text{основание искомого треугольника};$$

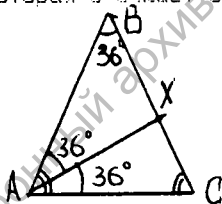
аналогично в $\triangle CBD$: $\frac{1}{2}b$ - основание искомого

треугольника. Искомые прямые: BK, BL, BD.

Задача имеет единственное решение.

Из варианта N 32 .

Угол при вершине B равнобедренного треугольника равен 72° . Провести прямую при основании этого треугольника, параллельную основанию, которая отсекает от данного треугольника фигуру подобную.



Решение :

Проведем биссектрису $\angle A$. Получим треугольник подобный данному.

$$\angle C = \angle A = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

AX - биссектриса.

$$\angle ACX = 72^\circ; \quad \angle XAC = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ; \quad \angle AXC = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ.$$

$\triangle AXC \sim \triangle ABC$.

Задача имеет два решения:

- 1) Проводится биссектриса $\angle A$;
- 2) проводится биссектриса $\angle C$.

из варианта N 90 .

Построить треугольник с наибольшей площадью , если дан его периметр $2p$.

Решение

Воспользуемся формулой Геррона и свойством :
среднее геометрическое трех положительных чисел не больше
среднего арифметического этих чисел .

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} ,$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$; a, b, c - длины сторон .

$$\begin{aligned} (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) &\leq \left(\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right)^3 = \left(\frac{3p - (a+b+c)}{3} \right)^3 = \\ &= \left(\frac{p}{3} \right)^3 . \end{aligned}$$

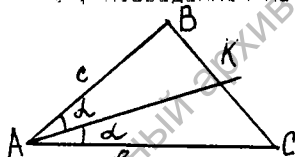
$$\text{Имеем } S \leq \sqrt{p \left(\frac{p}{3} \right)^3} \leq p^2 \sqrt{\left(\frac{1}{3} \right)^3} .$$

$$S_{\max} = p^2 \sqrt{\left(\frac{1}{3} \right)^3} \text{ при } a = b = c = \frac{2p}{3} .$$

Получили равносторонний треугольник со сторонами a, b, c , и периметром $2p$.

из варианта N 92 .

Построить треугольник по двум его сторонам b, c и биссектрисе ℓ , проведенной из вершины угла между ними .



Решение :
Обозначим $AB = c$, $AC = b$, биссектриса угла A : $AK = \ell$.

Предположим $\triangle ABC$ построен , тогда :

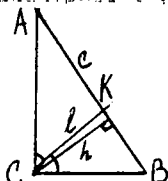
$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ABK} + S_{\triangle ACK} ; S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin 2\alpha ; S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2}c \ell \sin \alpha ; S_{\triangle ACK} = \frac{1}{2}b \ell \sin \alpha \\ bc \sin 2\alpha &= b \ell \sin \alpha + c \ell \sin \alpha = 2bc \sin \alpha \cos \alpha = \ell \sin \alpha (b + c) = \\ \cos \alpha &= \frac{\ell(b + c)}{2bc} = \frac{1}{x} , \text{ где } x = \frac{2bc}{b+c} . \end{aligned}$$

Построение :

- 1) построим отрезок $x = 2 \frac{bc}{b+c}$
 - 2) построим прямоугольный треугольник по гипотенузе ℓ и катету x ;
прилежащий острый угол к которому есть α ;
 - 3) треугольник $\triangle ABC$ строим по углу $\angle A = 2\alpha$ и двум сторонам b и c .
- Задача имеет решение , если $x > \ell$.

Из варианта N 84 .

Построить прямоугольный треугольник по его гипотенузе c и биссектрисе l , проведённой из вершины прямого угла .



Обозначим $AB = c$, биссектриса угла C : $CK = l$.

Предположим, что $\triangle ABC$ построен, тогда :

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACK} + S_{\triangle BCK} ;$$

$$\frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} bl \sin 45^\circ + \frac{1}{2} al \sin 45^\circ \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} b \frac{l}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} a \frac{l}{\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$ch\sqrt{2} = (a + b) l .$$

Из теоремы Пифагора и того, что :

$$S = \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} ab$$

имеем :

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab = c^2 + 2ch = (a + b)^2 = c^2 + 2ch ;$$

$$h = \frac{1(1 + \sqrt{1^2 + 2c^2})}{2c} ;$$

Построение :

1) строим отрезок h

2) на отрезке $AB = c$, как на диаметре строим окружность и точка C есть точка пересечения окружности с прямой, параллельной AB и отстоящей от неё на расстоянии h .

Задача имеет решение при $h \leq \frac{c}{2}$.

Из варианта N 89 .

Построить четырехугольник с наибольшей площадью, вписанный в данную окружность .



$ABCD$ - четырехугольник .

Обозначим его диагонали $BD = d_1$, $AC = d_2$, угол $\angle BOA = \varphi$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ - наибольшее при наибольших всех множителях .

$$d_1 = d_2 = 2r, \sin \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} .$$

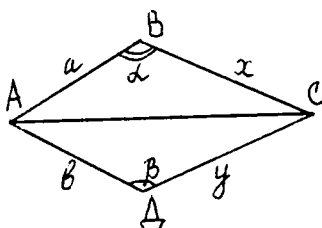
$ABCD$ - квадрат с диагональю $2r$.

Построение :

Строим два взаимно перпендикулярных диаметра $AC \perp BD$.

$ABCD$ - искомый квадрат .

Постройте четырехугольник ABCD, в который можно вписать окружность. Дана длина двух соседних сторон AB и AD и угол D. Постройте диагональ AC.



Решение:

Обозначим в четырехугольнике ABCD :

AB = a , AD = b , BC = x ,
DC = y, угол B = α,
угол D = β.

Так как в ABCD можно вписать окружность , то :

$$a + y = b + x$$

или

$$y = b + x - a \quad (1).$$

Рассмотрим треугольник ABC . Сторона AC равна :

$$AC^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos \alpha ;$$

Рассмотрим треугольник ADC . Сторона AC равна :

$$AC^2 = b^2 + y^2 - 2by \cdot \cos \beta ;$$

$$a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos \alpha = b^2 + (b + x - a)^2 - 2b(b + x - a) \cos \beta$$

откуда:

$$x = \frac{(b - a)(b - b \cos \beta)}{a - a \cos \alpha - b + b \cos \beta} \quad (*)$$

- 1) Строим отрезок x по формуле (*), отрезок y по (1);
- 2) строим ABC по сторонам a , x и углу α ;
- 3) строим ADC по сторонам AC , b , y .

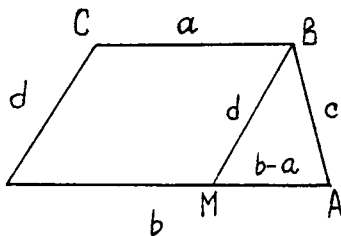
МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЙ :

Суть метода преобразования состоит в том, что фигуру или её часть подвергают некоторому преобразованию с тем, чтобы образовавшуюся фигуру или её элементы можно было построить по данным задачи.

Из варианта N 13 .

Построить трапецию ABCD по четырём её сторонам .

Решение :

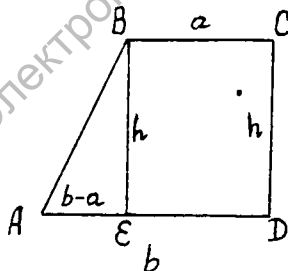


Осуществим параллельный перенос стороны CD на вектор $\vec{CB}$: $T_{\vec{CB}}(CD) = BM$, тогда $BM = CD = d$; $AM = b - a$.
Решение задачи сводится к построению треугольника $\triangle ABM$ по трём сторонам : $AB = c$, $BM = d$, $AM = b - a$.
Затем осуществляем параллельный перенос стороны BM в направлении полупрямой AM на расстояние a. Трапеция ABCD - искомая, исходя из построения треугольника $\triangle ABM$ и свойств параллельного переноса.
Задача имеет единственное решение, если $|c-d| < b-a < c+d$.

Из варианта N 14 .

Построить прямоугольную трапецию ABCD по её основаниям a и b ($b > a$) и высоте h.

Решение :

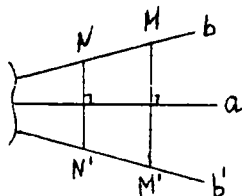


Пусть задача решена и ABCD - искомая трапеция. Осуществим параллельный перенос стороны CD на вектор $\vec{CB}$: $T_{\vec{CB}}(DC) = BE$. Тогда решение нашей задачи сводится к построению треугольника $\triangle BEA$ по двум катетам : $BE = h$ и $EA = b - a$.
Затем переносим BE в направлении луча AE на расстояние a.
Задача имеет единственное решение, так как $\triangle AEB$ всегда можно построить единственным образом по двум катетам.

из варианта N 15 .

Дан угол с недоступной вершиной . Удвойте этот угол .

Решение:



Заметим , что для искомого угла одна из данных сторон является биссектрисой , а значит , осью симметрии .

Отсюда следует и построение .

На одной стороне (b) данного угла $\angle ab$ возьмём две произвольные точки N и M и построим симметричные им точки N' и M' относительно a :

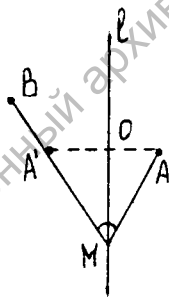
$S_a(N) = N'$, $S_a(M) = M'$.

Проводим прямую $N'M' = b'$, тогда $\angle b'b$ - искомый .

из варианта N 17 .

Даны две точки A и B и прямая l . Постройте точку M на прямой l , так чтобы разность расстояний от M до точек A и B была наибольшей .

Решение :



Пусть задача решена и M - искомая точка , такая , что разность $|BM - AM|$ - макс .

Отобразим симметрично точку A относительно прямой l : $S_l(A) = A'$, $A' \in BM$.

Как известно , для любых трёх точек плоскости , в частности для A' , M , B ,

имеем : $|A'B| \geq |MB - MA|$,

причём $|MB - MA|$ будет тогда наибольшей , когда стоит знак $// = //$.

Тогда задача сводится к проведению прямой через точку B и точку , симметричную A , т.е. A' .

Построение:

1) $S_l(A) = A'$;

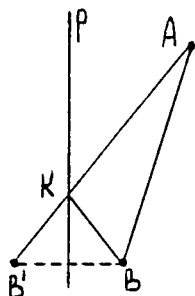
2) $M = BA' \cap l$.

Задача имеет единственное решение , если $A'B \cap l$.

Из варианта N 28 .

Дана прямая p и две точки A и B по одну сторону от нее . Найти на этой прямой такую точку K , чтобы сумма AK и BK была наименьшей .

Решение .



Пусть задача решена и K - искомая точка . Если мы отобразим симметрично точку B относительно прямой p , то легко заметить , что точка $K = AB' \cap p$. Поскольку для любых трёх точек плоскости , в частности для A, K, B , выполняется : $AK + BK \geq AB$, причём $(AK + BK)$ будет наименьшей в случае знака $// = //$, $KB = KB' \rightarrow AK + KB = AB'$, то наша задача сводится к построению точки симметричной B .

Построение :

1) $S_p(B) = B'$;

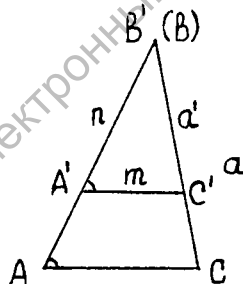
2) $K = AB' \cap p$.

Задача имеет единственное решение :

Из варианта N 35 .

Построить треугольник ABC по стороне a , углу A , и отношению двух других сторон $m : n$.

Решение .



Пусть $\triangle ABC$ - искомый , с отношением двух его сторон $b : c = m : n$, где m, n - заданные отрезки . Тогда наша задача сводится к построению треугольника $\triangle A'B'C'$, подобного данному $\triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k = \frac{a}{a'}$,

где $a' = B'C'$.

Построение :

1) Строим $\triangle A'B'C'$ по углу $\angle A' (= \angle A)$ и двум сторонам : $A'B' = n$ и $A'C' = m$;

2) на полупрямой $B'C'$ откладываем $B'C = a$;

3) $\triangle AB'C \sim \triangle A'B'C'$ с коэффициентом подобия $k = \frac{a}{a'}$.

$\triangle AB'C$ - искомый , $B = B'$.

Аналогично, преобразованием подобия, решаются следующие задачи :

Из варианта N 36 .

Построить прямоугольный треугольник ABC по его периметру $a + b + c$ и отношению катетов $a : c = m : n$, где m, n — данные отрезки.

УКАЗАНИЕ : Построить треугольник $A'B'C'$, подобный треугольнику ABC по двум катетам m и n .

Из варианта N 53 .

Построить треугольник ABC по данным его сумме двух сторон $a + c$, их отношению $b : c = m : n$ и углу A между ними, где m, n — данные отрезки.

УКАЗАНИЕ : Построить треугольник $A'B'C'$, подобный треугольнику ABC по двум сторонам m и n и углу A между ними.

Из варианта N 64 .

Построить треугольник ABC по данным его разности двух сторон $b - c$, их отношению $b : c = m : n$ и углу A между ними, где m и n — данные отрезки.

УКАЗАНИЕ : Построить треугольник $A'B'C'$, подобный треугольнику ABC по двум сторонам m и n и углу A между ними.

Из варианта N 97 .

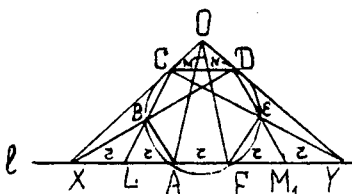
Построить треугольник ABC по его периметру $a + b + c$ и двум углам.

УКАЗАНИЕ : Свести задачу к построению треугольника $A'B'C'$, подобного треугольнику ABC по двум данным углам.

Из варианта N 72 .

В окружность ω вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. При помощи одной линейки построить отрезок MN равный одной пятой радиуса окружности.

Решение :



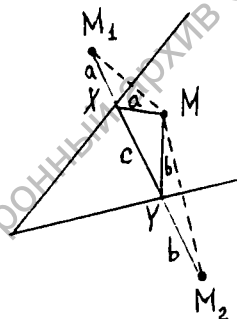
Пусть $ABCDEF$ - правильный шестиугольник ; $AF \in l$
 $X = DE \cap l$; $Y = CE \cap l$; $L = CB \cap l$; $M = DE \cap l$;
 $O = XC \cap YD$, (O - центр гомотетии
отрезков CD и XY) , $XL = LA = AF = FM = MY = r$,
где r - радиус описанной окружности ; $CD = r$,
как сторона правильного шестиугольника .
Легко заметить , что между M и N будет заключа-
ться $\frac{1}{5}$ радиуса окружности .

Тогда задача сводится к $H_o^k(AF) = MN$,
где k - коэффициент гомотетии $k = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}$
с центром в точке O . MN - искомый отрезок .

Из варианта N 76 .

Даны острый угол A и точка M внутри его . Построить треугольник MXU с наименьшим периметром , одной из вершин которого является эта точка , две другие лежат на сторонах угла A .

Решение :



Пусть $\triangle MXU$ - искомый . Обозначим :
 $MX = a$, $MY = b$, $XY = c$.
Сумма $(a + b + c)$ - минимальная .
Осуществим симметрию точки M
относительно сторон нашего угла :
 $S_{AB}(M) = M_1$, $S_{AC}(M) = M_2$.
 $M_1X = a$, $M_2Y = b$.
 $M_1M_2 = (a + b + c)$ - min , поскольку
точки M_1 , X , Y , M_2 - лежат на одной
прямой . Отсюда следует и построение :
1) $S_{AB}(M) = M_1$; $S_{AC}(M) = M_2$;
2) $M_1M_2 \cap AB = X$; $M_1M_2 \cap AC = Y$;
3) $\triangle MXU$ - искомый .

Решение :

Пусть ABC - искомый треугольник.
Обозначим высоты треугольника :
 $AA' = h_a$; $BB' = h_b$; $CC' = h_c$;
 $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$.
Найдём связь между h_a , h_b , h_c и a , b , c :
 $2S = ah_a = bh_b = ch_c$;
 $\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_c}$;
 $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{h_b} = \frac{1}{h_c}$;
 $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{h_c}$;
 $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{m}$,
где отрезок $m = \frac{h_a h_b}{h_c}$ можно построить как четвёртый пропорциональный для отрезков h_a , h_b , h_c : $\frac{m}{h_c} = \frac{h_b}{h_a}$.

Построение :

- 1) $\angle A'$ - произвольный, острый;
- 2) $A'M = h_b$, $A'MEA'C$;
- 3) $A'F = h_c$; $FE = h_a$, $A'E \perp A'B$;
- 4) $EX \perp FM$, $Y = EX \cap A'C$; $MY = m$.

Таким образом , наша задача сводится к построению треугольника с известными сторонами h_b , h_a , m , подобного $\triangle ABC$.

Построение :

- 1) $\triangle DEF$ по трём сторонам $ED = m$, $EF = h_b$, $DF = h_a$;
- 2) $FM \perp ED$, $MC = h_c$;
- 3) $BC \parallel EF$, $AC \parallel FD$; $\triangle EFD \sim \triangle BCA$.

Построить треугольник ABC по трём заданным его высотам.

ಗೃಹಪಾಲನೆ :

Пусть ABC - искомый треугольник.

Обозначим высоты треугольника :

$$AA' = h_a ; BB' = h_b ; CC' = h_c ;$$
$$AB = c ; BC = a ; AC = b .$$

Найдём связь между h_a , h_b , h_c и

 $a, b, c:$
$$2S = ah_a = bh_b = ch_c;$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} ;$$

$$\frac{1}{h_a} \quad \frac{1}{h_b} \quad \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}};$$

$$\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_c}$$

где отрезок $m = \frac{h_a h_b}{h_c}$ можно построить как

четвёртый пропорциональный для

отрезков h_a, h_b, h_c : $\frac{m}{h_a} = \frac{h_b}{h_c}$.

Построение :

- 1) $\angle A'$ - произвольный, острый;

- $$2) A'M = h_b, A'M \in A'C;$$

- 3) $A'F = h_-$; $FE = h_-$, $A'E \in A'B$;

- 4) $EX \parallel FM$, $Y = EX \cap A'C$, $MY = m$.

Таким образом, наша задача сводится к построению треугольника с известными сторонами h_b , h_c , m , подобного $\triangle ABC$.

Построение :

- 1) $\triangle DEF$ по трём сторонам $ED = m$,

- $$EF = h_p, \quad DF = h_s;$$

- 2) $FM \perp ED$, $MC = h_a$;

- 3) $BC \parallel EF$, $AC \parallel FD$; $\Delta EFD \sim \Delta BCA$.

Из варианта N 77 .

Дана окружность и проведены её два радиуса . Провести хорду окружности , которая делится этими радиусами на три равных отрезка .

Решение :

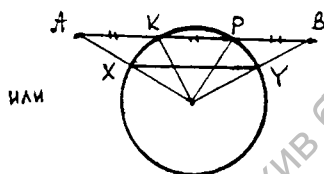
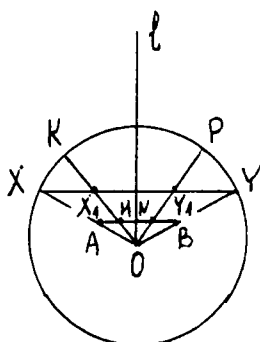
Пусть XU - искомая хорда окружности $\omega(O, OK)$ и $X_1 = OK \cap XU$, $Y_1 = OR \cap XU$. Проведём $AB \parallel XU$, $O \in AB$. $AM = MN = NB$, где $M = OK \cap AB$; $N = OR \cap AB$. Заметим, что O - центр гомотетии для отрезков XU и AB . Тогда данная задача сводится к построению отрезка AB , гомотетичного искомому. Построение :

- 1) $AB \perp l$ (l - биссектриса $\angle KOR$); $O \in AB$;
- 2) $OK \cap AB = M$, $OR \cap AB = N$;
 $AM = MN = NB$;
- 3) $H_o^k(AB) = XU$,

где k - коэффициент гомотетии, $k = \frac{OX}{OA}$;

- 4) XU - искомая хорда.

Задача имеет единственное решение .



Из варианта N 78 .

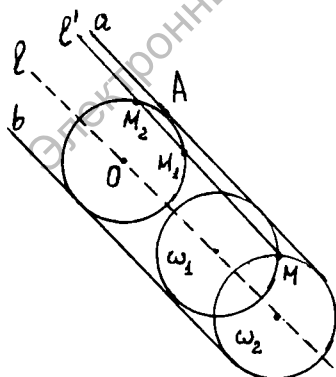
Построить окружность , которая касается двух параллельных прямых a и b и проходит через данную точку M .

Решение :

Поскольку центры всех окружностей , касающихся двух данных параллельных прямых , лежат на одной прямой , то наша задача сводится к параллельному переносу окружности $\omega(O, OA)$, где $O \in l$, прямая l равноудалена от прямых a и b , $AO \perp a$. Пусть $l' \parallel a \parallel b$.

M_1 и M_2 - точки пересечения l' с $\omega(O, OA)$. Тогда наша задача будет иметь два решения :

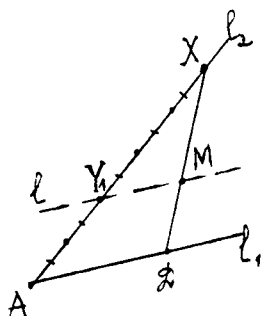
- 1) $\omega_1 = T_{M_1}(\omega)$;
- 2) $\omega_2 = T_{M_2}(\omega)$.



Из варианта N 78 .

Даны угол A и точка M внутри его . Провести через эту точку прямую, которая пересекает стороны угла таким образом , чтобы её отрезок XZ , заключенный между сторонами угла , был разделен данной точкой в отношении $2 : 3$.

Решение :



Предположим , что задача решена ,
то есть $MZ : MX = 3 : 2$. Проведём $l \parallel AZ$;
 $M \in l$; $Y = AX \cap l$; $YA : YX = MZ : MX = 3 : 2$.

Тогда наша задача сводится к
следующему построению :

1) l параллельна одной из сторон угла ,
например l_1 , через точку M ; $Y = l \cap l_1$,
где l_1 - вторая сторона угла ;

2) AU делим на две (одно решение)
либо на три (второе решение)
равные части и на продолжении стороны
откладываем три либо дв. таких части
соответственно , тем самым получим
точку $X \in l_2$:

$$\frac{AY}{YX} = \frac{3}{2} \text{ (одно решение) и}$$

$$\frac{AY}{YX} = \frac{2}{3} \text{ (второе решение) ;}$$

3) $Z = XM \cap l_1$;

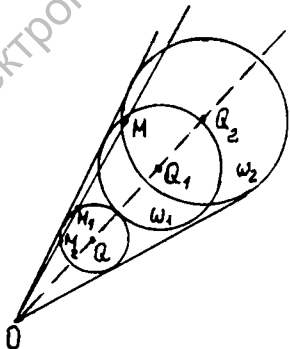
XZ - искомая прямая .

Задача имеет два решения .

Из варианта N 80 .

Построить окружность , которая касается сторон данного угла O и
проходит через данную точку M .

Решение :



Поскольку центры всех окружностей ,
касающихся сторон данного угла
лежат на одной прямой - биссектрисе
этого угла ,
то наша задача сводится к построению
произвольной окружности ω (Q , $QM_1 = QM_2$) ,
гомотетичной искомой окружности ,
где $M_1 = OM \cap \omega$, $M_2 = OM \cap \omega$.

Таким образом , наша задача имеет
два решения :

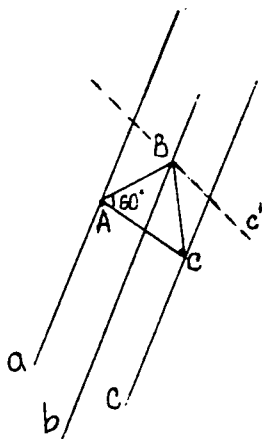
$$1) \omega_1 = H_0^{k_1}(\omega) , \text{ где } k_1 = \frac{OM}{OM_1} ;$$

$$2) \omega_2 = H_0^{k_2}(\omega) , \text{ где } k_2 = \frac{OM}{OM_2} .$$

Из варианта N 91 .

Построить равносторонний треугольник ABC , вершины которого находятся на трёх данных параллельных прямых a , b , c .

Решение :



Предположим, что задача решена и $\triangle ABC$ - искомый. Нетрудно заметить, что если мы совершим поворот вершины C вокруг A на 60° , то получим вершину B . Но мы можем вращать не саму вершину C , а прямую c , которой она принадлежит, зная, что она после поворота (c') пересечёт другую (b) в одной из вершин (B) треугольника. Таким образом, задача сводится к повороту на 60° прямой c вокруг произвольно выбранной на a точки A .

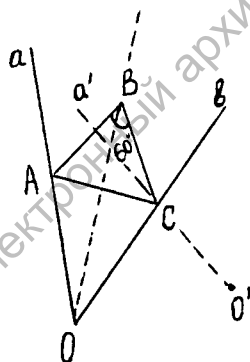
Построение :

- 1) $P_{A, 60^\circ}(c) = c'$; $c' \cap b = B$;
- 2) $P_{A, 60^\circ}(B) = C$;
- 3) $\triangle ABC$ - искомый равносторонний треугольник.

Из варианта N 92 .

Построить равносторонний треугольник ABC , две вершины которого находятся в сторонах данного угла a и b , а точка B - внутри угла.

Решение :



Предположим, что задача решена и $\triangle ABC$ - искомый. Легко видеть, что $P_{B, 60^\circ}(A) = C$, где C - третья вершина треугольника. Но можно поворачивать вокруг точки B не вершину A , а весь луч (a) на котором она находится, зная, что он после поворота (a') пересечёт вторую сторону угла (b) в другой вершине C треугольника, причём обратим внимание на то, что поворачиваем именно луч, а не прямую. Таким образом, задача сводится к повороту одной из сторон угла на 60° .

Построение :

- 1) $P_{B, 60^\circ}(a) = a'$; $a' \cap b = C$;
- 2) $P_{B, 60^\circ}(C) = A$;
- 3) $\triangle ABC$ - искомый.

Из варианта N 93 .

Построить четырёхугольник $ABCD$, у которого диагональ является биссектрисой угла A , зная длины его сторон .

Решение :

Пусть задача решена и четырёхугольник $ABCD$ - искомый . Обозначим :

$AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $AD = a$, ($a > b$) .
 $\angle BAC = \angle DAC$. Заметим , что диагональ AC является осью симметрии .

Осуществим следующую симметрию :

$S_{AC}(B) = B'$, $B' \in AD$.

$AB' = AB = b$; $CB' = CB = c$.

$B'D = AD - AB' = a - b$.

Таким образом, наша задача сводится

к построению треугольника $B'DC$ по трём сторонам : c , d , $a - b$.

Построение :

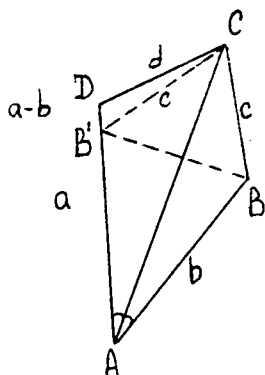
1) $\triangle B'DC$ такой ,
 что $B'C = c$, $B'D = a - b$, $CD = d$;

2) на луче DB' : $DA = a$;

3) $S_{AC}(B') = B$;

4) $ABCD$ - искомый .

Задача имеет единственное решение , если для сторон c , d , $a - b$ $\triangle B'DC$ выполняется неравенство треугольника .



Из варианта N 95 .

Для заданного треугольника ABC . Построить точки X и Y на сторонах AB и BC так , чтобы $AX = XY = YC$.

Решение :

Пусть задача решена и X , Y - искомые

точки на сторонах AB и BC такие ,

что : $AX = XY = YC$.

Выберем на AX произвольно точку M ,

$AM = a$. И пусть $K \in BC$ такая ,

что : $CK = AM = a$.

Проведём $\omega(M, a)$ и $a \parallel AC$ через

точку K . $D = \omega \cap a$; $AM = MD = DK = a$.

Таким образом, получили подобный

$AMDF$ искомому четырёхугольнику $AXYC$.

Тогда наша задача сводится

к построению $AMDF \sim AXYC$

с коэффициентом подобия $k = \frac{XA}{MA}$.

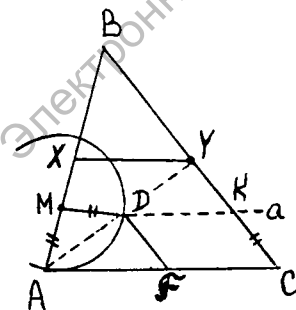
Построение :

1) $AMDF$ описанным выше способом ;

2) $H_A^*(D) = Y$, $Y \in BC$;

3) $H_A^*(M) = X$; X , Y - искомые точки .

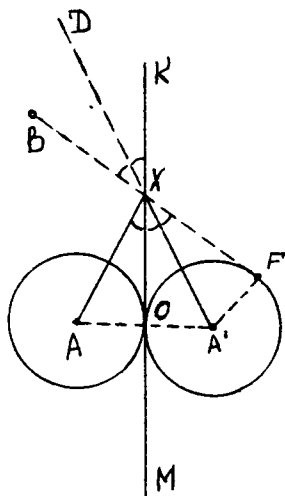
Задача имеет единственное решение .



Из варианта N 110 .

Дана прямая MK и две точки A и B с одной стороны от неё .
 Построить на прямой MK точку X таким образом , чтобы угол AXM был в два раза меньше угла BXK .

Решение .



Пусть наша задача решена и X - искомая точка . Отразим симметрично точку A относительно прямой MK , получим точку A' . $O = AA' \cap MK$.
 Построим окружность ω (A' , OA') ;
 KF - касательная к ω .
 $\triangle XO A' = \triangle X F A'$ по катету ($OA' = FA'$) и гипотенузе (XA') $\rightarrow$
 $\angle O X A' = \angle F X A' = \alpha$.
 $\triangle A X O = \triangle A' X O$ по двум катетам $AO = OA'$, XO - общий $\rightarrow$
 $\angle A X O = \angle A' X O = \alpha$.
 $\angle B X D = \angle F X A' = \angle O X A' = \angle K X D = \alpha$ (как вертикальные) .
 $\angle B X K = 2\alpha$; $\angle A X O = \alpha$, т.е. BF - касательная к ω . Таким образом, наша задача сводится к построению касательной BF к ω (A' , OA') . Построение :

- 1) $S_{MK}(A) = A'$;
- 2) $\omega(A'$, OA') ;
- 3) BF - касательная к ω ;
- 4) $X = MK \cap BF$.

Задача имеет единственное решение .