Академия наук Белорусской ССР
Редколлегия журнала "Известия АН БССР"
Серия физико-математических наук

№4329-79 Деп.

УДК 513.82

А.М.Сазонова

ТКАНИ КОДАЦЦИ В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

Минск - 1979

I. Будем рассматривать регулярное неизотропное двумерное подмногообразие $V_2 \subset {}^1S_4 \subset {}^1R_5$ / $V_2 \subset {}^2S_4 \subset {}^2R_5$ / на гиперсфере вещественного /мнимого/ радиуса r / ir / псевдоевклидова пространства ${}^1R_5$ / ${}^2R_5$ /. Таким образом, мы рассматриваем двумерные подмногообразия V_2 в пространстве де Ситтера /псевдориманово пространство/ постоянной положительной /отрицательной/ кривизны $K = \frac{1}{r^2}$ / $K = -\frac{1}{r^2}$ /, которое изоморфно гиперсфере ${}^1S_4$ / ${}^2S_4$ /. Относительно некоторого фиксированного репера в ${}^1R_5$ / ${}^2R_5$ / подмногообразие может быть задано вектор-функцией

$$x = x(u, v),$$

где u, v - независимые скалярные переменные, причем вектор-функция удовлетворяет уравнению гиперсферы

$$(x, x) = r^2 \qquad /(x, x) = -r^2/ \qquad /1/$$

Репер, связанный с точкой x подмногообразия V_2, зададим следующим образом: вектор e_0 направим по радиус-вектору точки x, где $(e_0)^2 = (\pm)1$; векторы e_i $/i,j,k,l=1,2/$ определяют касательную площадку $T_x(V_2)$ к подмногообразию V_2 в точке x и ортогональны векторам E_α $/\alpha,\beta,\gamma=3,4.$ $E_3 \perp E_4$ /, которые определяют плоскость $N_x(V_2)$, нормальную к V_2, так что $e_0 \perp e_i$, $e_0 \perp E_\alpha$, $e_i \perp E_\alpha$. Тогда реперы первого порядка двумерного подмногообразия $V_2 \subset {}^1S_4 \subset {}^1R_5$ / $V_2 \subset {}^2S_4 \subset {}^2R_5$ / выделяются системой уравнений:

$$\begin{cases} \omega^0 = 0 \\ \omega^\alpha = 0 \end{cases} \qquad /2/$$

Определим в каждой двумерной плоскости $T_x(V_2)$, $N_x(V_2)$ /псевдо/евклидову метрику с помощью метрических тензоров

$$g_{ij} = (e_i, e_j), \quad \det\|g_{ij}\| = g \neq 0 :$$

$$g_{\alpha\beta} = (E_\alpha, E_\beta), \quad \det\|g_{\alpha\beta}\| \neq 0 :$$

и так как $g_{00} = \underset{(-)}{+} 1$, $g_{\alpha 0} = 0$, $g_{i0} = 0 = g_{i\alpha}$, то основная форма пространства ${}^1R_5$ / ${}^2R_5$ / записывается в виде:

$$dS^2 = g_{ij}\,\omega^i\omega^j + g_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha\omega^\beta \underset{(-)}{+} (\omega^0)^2$$

Формулы инфинитезимального перемещения репера $R(x, e_0, e_i, E_\alpha)$ подмногообразия V_2 будут следующими

$$\begin{cases} dx = \omega^i e_i = r\,de_0 \\ de_i = \omega_i^0 e_0 + \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha E_\alpha \\ dE_\alpha = \qquad\qquad \omega_\alpha^i e_i + \omega_\alpha^\beta E_\beta . \end{cases}$$

Пфаффовы формы $\omega^{\hat i}$, $\omega^{\hat i}_{\hat j}$ /$\hat i, \hat j, \hat k = \overline{0,4}$ / кроме уравнений структуры пространства ${}^1R_5$ / ${}^2R_5$ /

$$\mathcal{D}\omega^{\hat i} = \omega^{\hat j} \wedge \omega^{\hat i}_{\hat j} ,$$

$$\mathcal{D}\omega^{\hat i}_{\hat j} = \omega^{\hat k}_{\hat j} \wedge \omega^{\hat i}_{\hat k} ,$$

удовлетворяют условиям

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki} ,$$

$$dg_{\alpha\beta} = \omega_\alpha^\gamma g_{\gamma\beta} + \omega_\beta^\gamma g_{\alpha\gamma} .$$

Дифференцируя /2/ внешним образом и применяя лемму Картана, получим в репере $R(x, e_0, e_i, E_\alpha)$

$$\omega_i^0 = A^0_{ij}\,\omega^j ,$$

$$\omega_i^\alpha = A^\alpha_{ij}\,\omega^j ,$$

где $A^0_{ij} = \underset{(+)}{-} \frac{1}{r} g_{ij}$. $A^\alpha_{ij} = A^\alpha_{ji}$.

Свяжем с подмногообразием V_2 внутренним образом нормальные векторы

$e_3 = A^{\alpha}_{ij} g^{ij} E_\alpha$, $e_4 = (-1)^\alpha A^{\alpha}_{ij} g^{ij} E_\alpha$

при $A^{\alpha}_{ij} \neq 0$ /$\alpha = 3,4$/.

/ или $e_\alpha = A^{\alpha}_{ij} g^{ij} E_\alpha$ и $e_\beta = E_\beta$, если $A^{\beta}_{ij} = 0$ и $A^{\alpha}_{ij} \neq 0$ /$\alpha \neq \beta$ //.

В случае $A^{\alpha}_{ij} = 0$ для $\alpha = 3,4$ имеем на V_2

$$\omega_i^0 = (\mp) \frac{1}{r} g_{ij} \omega^j ,$$

$$\omega_i^\alpha = 0 .$$

Тогда деривационные формулы репера $R(x, e_0, e_i, E_\alpha)$ подмногообразия V_2 следующие

$$\begin{cases} dx = \omega^i e_i = r\, de_0 \\ de_i = (\mp) \frac{1}{r} g_{ij} \omega^j e_0 + \omega_i^j e_j \\ dE_\alpha = \omega_\alpha^\beta E_\beta . \end{cases}$$

Откуда следует, что соприкасающееся пространство двумерного подмногообразия имеет размерность три, ибо натягивается на векторы e_0 и e_i . Нормальная плоскость $N_x(V_2)$ постоянна.

Исключим такие двумерные подмногообразия из рассмотрения.

Тогда фиксация нормальных векторов e_3 и e_4 приводит к тому, что на подмногообразии $V_2 \subset {}^1S_4 \subset {}^1R_5$ /$V_2 \subset {}^2S_4 \subset {}^2R_5$ /

$$\omega_i^0 = (\mp) \frac{1}{r} g_{ij} \omega^j ,$$

$$\omega_i^\alpha = \overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij} \omega^j ,$$

где $\overset{*}{a}{}^{3}_{ij} = g^{kl} A^{\alpha}_{kl} A^{\beta}_{ij} g_{\alpha\beta}$,

$\overset{*}{a}{}^{4}_{ij} = (-1)^\alpha g^{kl} A^{\alpha}_{kl} A^{\beta}_{ij} g_{\alpha\beta}$,

/ или $\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij} = g^{kl} A^{\alpha}_{kl} A^{\beta}_{ij} g_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{a}{}^{\beta}_{ij} = 0$ /$\alpha \neq \beta$/,

если $A^{\alpha}_{ij} \neq 0$, $A^{\beta}_{ij} = 0$. / и вторые фундаментальные тензоры $\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij}$ соответствуют фиксированным векторным полям направлений e_3 и e_4, а

$$d\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij} = \omega^{k}_{i} a^{\alpha}_{kj} + \omega^{k}_{j}\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ki} - \omega^{\alpha}_{\beta}\overset{*}{a}{}^{\beta}_{ij} + a^{\alpha}_{ijk}\omega^{k},$$

$$da^{\alpha}_{ijk} = \omega^{\ell}_{i} a^{\alpha}_{\ell jk} + \omega^{\ell}_{j} a^{\alpha}_{\ell ik} + \omega^{\ell}_{k} a^{\alpha}_{\ell ij} - \omega^{\alpha}_{\beta} a^{\beta}_{ijk} - (\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\ell j}\overset{*}{a}{}^{\beta}_{ik} + \overset{*}{a}{}^{\alpha}_{i\ell}\overset{*}{a}{}^{\beta}_{jk} + \overset{*}{a}{}^{\alpha}_{k\ell}\overset{*}{a}{}^{\beta}_{ij})\omega^{\ell}_{\beta} + a^{\alpha}_{ijk\ell}\omega^{\ell},$$

где тензоры $\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij}$, a^{α}_{ijk} симметричны по всем нижним индексам. Или в другой форме записи для первого равенства последней системы

$$\nabla\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij} = a^{\alpha}_{ijk}\omega^{k} \qquad /\nabla g_{ij} = 0/,$$

где знак ∇ ковариантного дифференцирования соответствует внутренней связности на V_2.

Таким образом, ковариантные производные т р е х вторых фундаментальных тензоров $\underset{(+)}{-}\frac{1}{2}g_{ij}$, $\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij}$ / $\alpha = 3, 4$ / подмногообразия $V_2 \subset {}^1S_4 \subset {}^1R_5$ / $V_2 \subset {}^2S_4 \subset {}^2R_5$ / порождают однозначно в общем случае /вторые тензоры линейно независимы/ только д в е три-ткани - это решение уравнений

$$a^{\alpha}_{ijk}\omega^{i}\omega^{j}\omega^{k} = 0 . \qquad /*/$$

Будем называть эти три-ткани, по аналогии с евклидовым пространством R_3, т к а н я м и К о д а ц ц и.

Введем обозначения для инвариантов подмногообразия V_2 :

$2H^{\alpha}\sigma(g) = \overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij}g^{ij}$ - средние кривизны V_2, где

$$\sigma(g) = \frac{g}{|g|}$$

$2K^{\alpha}\sigma(g) = \overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij}\tilde{\overset{*}{a}}{}^{\alpha ij}$ - гауссовы кривизны V_2.

тогда

$$2H^{\alpha}_{k}\sigma(g) = a^{\alpha}_{ijk}g^{ij}, \quad 2K^{\alpha}_{k}\sigma(g) = a^{\alpha}_{ijk}\tilde{\overset{*}{a}}{}^{\alpha ij}$$

/знак $\sim$ означает, что поднятие индексов осуществляется с помощью дискриминантного тензора ε_{ij} с одной существенной компонентой $\varepsilon_{12} = +\sqrt{|g|}$ /

$\mathcal{E}^{\alpha} = (H^{\alpha})^2 - K^{\alpha}$ – эйлеровы кривизны.

II. Построим на $V_2 \overset{(2)}{\subset} S_4 \overset{(2)}{\subset} R_5$ два "ортогональных репера" тензоров с одним общим метрическим тензором g_{ij}.

Положим $a^{\alpha}_{ij} = (-\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij} + H^{\alpha} g_{ij})\,\sigma(g)$.

Тогда $a^{\alpha}_{ij} g^{ij} = 0$, то есть выполняется условие аполярности тензоров a^{α}_{ij} по отношению к метрическому тензору g_{ij}. Третий тензор "ортогонального репера" тензоров является векторным произведением g_{ij} и a^{α}_{ij} /для каждого значения α/, а именно:

$$b^{\alpha}_{ij} = \varepsilon^{\ell k} g_{\ell(i} a^{\alpha}_{j)k} = \varepsilon^{\ell k} g_{\ell i} a^{\alpha}_{jk}$$

/скобки означают симметрирование по заключенным в них индексам/.

В случае $a^{\alpha}_{ijk} = 0$ / $\alpha = 3, 4$ / симметрические тензоры $\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij}$ в бинарной области представимы в виде [3/] :

$\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij} = \lambda^{\alpha} g_{ij}$, где λ^{α} – постоянные скаляры. Соприкасающееся пространство для таких V_2 имеет размерность, равную трем. Исключим из рассмотрения такие подмногообразия.

Тогда, как легко видеть, симметричные по трем нижним индексам тензоры a^{α}_{ijk} / $\alpha = 3, 4$ / представимы в виде

$$a^{\alpha}_{ijk} = x^{\alpha}_{(k} g_{ij)} + y^{\alpha}_{(k} a^{\alpha}_{ij)} , \qquad /3/$$

поскольку имеем четыре уравнения / для каждого значения α / с четырьмя переменными x^{α}_k, y^{α}_k и определитель этой системы отличен от нуля. После несложных подсчетов получим

$$x^{\alpha}_k = \frac{1}{2\mathcal{E}^{\alpha}} \left(\mathcal{E}^{\alpha}_{\ell} a^{\alpha}_{km} g^{\ell m} \sigma(g) + 4 H^{\alpha}_k \mathcal{E}^{\alpha} \right),$$

$$y^{\alpha}_k = \frac{1}{\mathcal{E}^{\alpha}} \left(-\mathcal{E}^{\alpha}_k + H^{\alpha}_i g_{kj} \overset{*}{a}{}^{\alpha ij} \sigma(g) \right).$$

Очевидно, что через каждую точку подмногообразия V_2, не особенную относительно тензоров Кодацци, проходят три семейства линий каждой из двух тканей Кодацци. На некоторых подмногообразиях V_2 все три или два из них могут совпадать. Применяя классификацию кубических уравнений /* / по характеру их корней, можно заключить, что существуют подмногообразия, на которых либо все три семейства линий ткани Кодацци /одной или двух/ совпадают, либо два семейства линий ткани /одной или двух/ совпадают при отличном /-ых/ третьем /-их/семействе /-ах/, либо ткани Кодацци имеют три различных семейства линий /общего типа/. Поэтому естественно выяснить, на подмногообразиях V_2 с какими характеристическими признаками возможны те или иные типы пары тканей Кодацци.

III Определение. Будем называть двумерное подмногообразие, несущим сеть сопряженных линий, V_2, если все линейно независимые вторые квадратичные формы приводятся к каноническому виду одновременно:

$$\varphi^0 = (\mp)\frac{1}{2} g_{ij}\omega^i\omega^j = (\mp)\frac{1}{2} g_i(\omega^i)^2,$$

$$\varphi^\alpha = \overset{*}{a}{}^\alpha_{ij}\,\omega^i\omega^j = a^\alpha_i(\omega^i)^2.$$

Два независимых направления назовем системой сопряженных направлений, а огибающая их сеть линий - сетью сопряженных линий.

Отнесем двумерное подмногообразие V_2, не теряя общности рассуждений, к сети сопряженных линий, то есть направим векторы e_i по сопряженным направлениям, тогда среди компонент вторых фундаментальных тензоров появятся нулевые:

$$g_{12} = 0, \ \overset{*}{a}{}^\alpha_{12} = 0.$$

Значит, $e_1 \perp e_2$.

Тензоры a^{α}_{ij} имеют следующий вид:

$$a^{\alpha}_{ij} = \begin{Vmatrix} \left(-a^{\alpha}_1 + \frac{a^{\alpha}_2 g_1}{g_2}\right)\frac{\sigma(g)}{2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{a^{\alpha}_1 g_2}{g_1} - a^{\alpha}_2\right)\frac{\sigma(g)}{2} \end{Vmatrix}.$$

Инварианты же подмногообразий V_2, несущих сеть сопряженных линий, имеют такие выражения:

$$H^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1} + \frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right),$$

$$K^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}_1 a^{\alpha}_2}{g_1 g_2}, \quad \xi^{\alpha} = \frac{1}{4}\left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1} - \frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right)^2. \qquad /*\,*/$$

g_i и a^{α}_i – собственные значения тензоров $\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{ij}$ и g_{ij}. Выражения для тензоров x^{α}_k, y^{α}_k разложения a^{α}_{ijk} /3/ имеют вид:

$$x^{\alpha}_u = \left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1}\right)_u\left(1 - \frac{\sigma(g)}{2}\right) + \left(\frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right)_u\left(1 + \frac{\sigma(g)}{2}\right);$$

$$x^{\alpha}_v = \left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1}\right)_v\left(1 + \frac{\sigma(g)}{2}\right) + \left(\frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right)_v\left(1 - \frac{\sigma(g)}{2}\right);$$

$$y^{\alpha}_u = 2\left(\left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1}\right)_u\left(\frac{\sigma(g)}{2} - 1\right) + \left(\frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right)_u\left(\frac{\sigma(g)}{2} + 1\right)\right)\Big/\left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1} - \frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right);$$

$$y^{\alpha}_v = 2\left(\left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1}\right)_v\left(-\frac{\sigma(g)}{2} - 1\right) + \left(\frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right)_v\left(-\frac{\sigma(g)}{2} + 1\right)\right)\Big/\left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1} - \frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right).$$

Для компонент тензоров Кодацци a^{α}_{ijk} имеем

$$a^{\alpha}_{111} = \frac{g_1}{2}\left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1}\right)_u\left(1 + \sigma(g)\right) + \frac{g_2}{2}\left(\frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right)_u\left(1 - \sigma(g)\right),$$

$$a^{\alpha}_{112} = \frac{g_1}{2}\left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1}\right)_v\left(1 + \sigma(g)\right) + \frac{g_1}{2}\left(\frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right)_v\left(1 - \sigma(g)\right),$$

$$a^{\alpha}_{122} = \frac{g_2}{2}\left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1}\right)_u\left(1 - \sigma(g)\right) + \frac{g_2}{2}\left(\frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right)_u\left(1 + \sigma(g)\right),$$

$$a^{\alpha}_{222} = \frac{g_2}{2}\left(\frac{a^{\alpha}_1}{g_1}\right)_v\left(1 - \sigma(g)\right) + \frac{g_2}{2}\left(\frac{a^{\alpha}_2}{g_2}\right)_v\left(1 + \sigma(g)\right).$$

Из теории алгебраических инвариантов [1/] известно, что необходимым и достаточным условием совпадения трех семейств линий ткани является равенство нулю ее гессиана. Таким образом, для ткани, определяемой уравнением /ж/, имеем систему

$$\begin{cases} 2\left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_u \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_u g_2 - g_1\left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_v^2 (1+\sigma(g)) - g_1\left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_v^2 (1-\sigma(g)) = 0 \\ 2\left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_v \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_v g_1 - g_2\left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_u^2 (1-\sigma(g)) - g_2\left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_u^2 (1+\sigma(g)) = 0 \\ \left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_u \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_v - \left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_v \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_u = 0 \end{cases}.$$

Откуда следует

а/ для $\sigma(g)=1$

$$\frac{a_1^\alpha}{g_1} = const, \quad \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_u = 0 \; ; \qquad /4_1/$$

$$\left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_v = 0, \quad \frac{a_2^\alpha}{g_2} = const; \qquad /4_2/$$

б/ для $\sigma(g)=-1$

$$\left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_u = 0, \quad \frac{a_2^\alpha}{g_2} = const\; ; \qquad /4_1'/$$

$$\frac{a_1^\alpha}{g_1} = const, \quad \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_v = 0 \; . \qquad /4_2'/$$

Дифференциальные уравнения тканей Кодацци /ж/ имеют вид

а/ $\sigma(g)=1$

$/4_1/$: $\left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_v (\omega^2)^3 = 0$;

$/4_2/$: $\left(\frac{a^\alpha}{g_1}\right)_u (\omega^1)^3 = 0$;

б/ $\sigma(g)=-1$

$/4_1'/$: $\left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_v (\omega^2)^3 = 0$;

$/4_2'/$: $\left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_u (\omega^1)^3 = 0$.

Инварианты подмногообразий V_2 в каждом случае $/4_{1,2}/$, $/4'_{1,2}/$являются следующими функциями

$$/4_{1,2}/: \ H^\alpha = H^\alpha(v),\ K^\alpha = K^\alpha(v),\ \tau^\alpha = \tau^\alpha(v);$$

$$/4'_{1,2}/: \ H^\alpha = H^\alpha(u),\ K^\alpha = K^\alpha(u),\ \tau^\alpha = \tau^\alpha(u),$$

явное выражение которых можно найти, используя формулы /* */. Итак, получили

П р е д л о ж е н и е. Необходимым и достаточным условием того, чтобы двумерное подмногообразие $V_2 \subset {}^1S_4 \subset {}^1R_5$ / $V_2 \subset {}^2S_4 \subset {}^2R_5$ /, несущее сеть сопряженных линий, имело вырожденную /-ые/ в одну линию /в две различные линии/ ткань /-и/ Кодацци является выполнение одного из условий $/4^{(1)}_{1,2}/$ при фиксированном значении α /для $\alpha = 3,4$ /, если подмногообразие дефинитной метрики, и выполнение одного из условий $/4'_{1,2}/$ при фиксированном значении α /для $\alpha = 3,4$ /, если подмногообразие индефинитной метрики, где a_i^α и g_i - собственные значения соответственно $\overset{*}{a}{}_j^{\alpha}$ и g_{ij} .

Известно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы у ткани совпали только два семейства линий, а третье было отлично от них, является обращение в нуль дискриминанта кубической формы ткани на подмногообразии и отличие при этом от нуля гессиана ее.

Таким образом, имеем следующее уравнение

$$4\left(g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_u \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_u - \frac{(g_1)^2}{2}\left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_v^2 (1+\sigma(g)) - \frac{(g_1)^2}{2}\left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_v^2 (1-\sigma(g))\right) \times$$

$$\times \left(g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_v \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_v - \left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_u^2 \frac{(g_2)^2}{2}(1-\sigma(g)) - \frac{(g_2)^2}{2}\left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_u^2 (1+\sigma(g))\right) -$$

$$-\left(g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_u \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_v \sigma(g) - g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_v \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_u\right)^2 = 0.$$

Тождественное равенство нулю дискриминанта кубической формы ткани на подмногообразии V_2 предполагает равенство его нулю на каждой координатной линии:

Для $\sigma(g)=1$

$$4\left(g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_u \left(\frac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_u - (g_1)^2 \left(\frac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_v^2\right)\left(g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_v \left(\frac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_v - (g_2)^2 \left(\frac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_u^2\right) -$$

$$- \left(g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_u \left(\frac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_v - g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_v \left(\frac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_u\right)^2 = 0;$$

Для $\sigma(g)=-1$

$$4\left(g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_u \left(\frac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_u - (g_1)^2 \left(\frac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_v^2\right)\left(g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_v \left(\frac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_v - (g_2)^2 \left(\frac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_u^2\right) -$$

$$- \left(- g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_v \left(\frac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_u + g_1 g_2 \left(\frac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_u \left(\frac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_v\right) = 0.$$

Откуда следует, что

1. $\dfrac{a_1^\lambda}{g_1} = const$

или $\qquad\qquad\qquad\qquad$ /5/

2. $\dfrac{a_2^\lambda}{g_2} = const$.

Дифференциальные уравнения тканей Кодацци в этом случае имеют вид: а/ для $\sigma(g)=1$

1./5/: $\left(\dfrac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_u \omega^1(\omega^2)^2 + \left(\dfrac{a_2^\lambda}{g_2}\right)_v (\omega^2)^3 = 0$;

2./5/: $\left(\dfrac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_u (\omega^1)^3 + \left(\dfrac{a_1^\lambda}{g_1}\right)_v (\omega^1)^2 \omega^2 = 0$;

б/ для $\sigma(g)=-1$

$$1.\ /5/:\ \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_u (\omega^1)^3 + \left(\frac{a_2^\alpha}{g_2}\right)_v (\omega^1)^2\omega^2 = 0\ ;$$

$$2.\ /5/:\ \left(\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_u \omega^1(\omega^2)^2 + \left(-\frac{a_1^\alpha}{g_1}\right)_v (\omega^2)^3 = 0\ .$$

Таким образом, имеем

П р е д л о ж е н и е. Двумерное подмногообразие $V_2 \subset {}^1S_4 \subset {}^1R_5$ / $V_2 \subset {}^2S_4 \subset {}^2R_5$ / несущее сеть сопряженных линий, на которых собственные значения матриц тензоров g_{ij} и $\overset{*}{a}{}^\alpha_{ij}$ удовлетворяют одному из условий /5/, характеризуются тем, что две различные ткани Кодацци имеют по два совпавших семейства линий и отличные от них третьи семейства.

Учитывая доказанные предложения, можно составить следующую таблицу выделенных классов двумерных подмногообразий ,несущих сеть сопряженных линий, в пространстве де Ситтера по типу пары тканей Кодацци.

Тип пары тканей Кодацци на V_2	$\overset{*}{a}{}^\alpha_{ij}$	$\overset{*}{a}{}^\beta_{ij}$
	$\alpha \neq \beta$	
I. Подмногообразие V_2 несет вырожденные в линии ткани Кодацци	$\sigma(g)=1$ $a_1^\alpha/g_1=const,\ (a_2^\alpha/g_2)_u=0$ или $(a_1^\alpha/g_1)_v=0,\ a_2^\alpha/g_2=const$ $\sigma(g)=-1$ $a_1^\alpha/g_1=const,\ (a_2^\alpha/g_2)_v=0$ или $(a_1^\alpha/g_1)_u=0,\ a_2^\alpha/g_2=const$	$\sigma(g)=1$ $a_1^\beta/g_1=const,\ (a_2^\beta/g_2)_u=0$ или $(a_1^\beta/g_1)_v=0,\ a_2^\beta/g_2=const$ $\sigma(g)=-1$ $a_1^\beta/g_1=const,\ (a_2^\beta/g_2)_v=0$ или $(a_1^\beta/g_1)_u=0,\ a_2^\beta/g_2=const$
2. На подмногообразии V_2 две ткани Кодацци имеют только по два совпавших семейства линий	$a_1^\alpha/g_1=const$ или $a_2^\alpha/g_2=const$	$a_1^\beta/g_1=const$ или $a_2^\beta/g_2=const$

3. Подмногообразие V_2 несет только одну вырожденную в линию ткань Кодацци. Вторая ткань Кодацци - общего типа	$\sigma(g)=1$ $a^{\alpha}_{1}/g_1=const, (a^{\alpha}_{2}/g_2)_u=0$ или $(a^{\alpha}_{1}/g_1)_v=0, a^{\alpha}_{2}/g_2=const$ $\sigma(g)=-1$ $a^{\alpha}_{1}/g_1=const, (a^{\alpha}_{2}/g_2)_v=0$ или $(a^{\alpha}_{1}/g_1)_u=0, (a^{\alpha}_{2}/g_2)=const$	Невыполнение условий для собственных значений $\overset{*}{a}{}^{\beta}_{i\,j}$ и g_{ij} I.,2.
4. На подмногообразии V_2 одна ткань Кодацци вырождается в линию, а вторая имеет только два совпавших семейства	$\sigma(g)=1$ $a^{\alpha}_{1}/g_1=const, (a^{\alpha}_{2}/g_2)_u=0$ или $(a^{\alpha}_{1}/g_1)_v=0, a^{\alpha}_{2}/g_2=const$ $\sigma(g)=-1$ $a^{\alpha}_{1}/g_1=const, (a^{\alpha}_{2}/g_2)_v=0$ или $a^{\alpha}_{2}/g_2=const, (a^{\alpha}_{1}/g_1)_u=0$	$a^{\beta}_{1}/g_1=const$ или $a^{\beta}_{2}/g_2=const$
5. На подмногообразии у одной ткани Кодацци два совпавших семейства, другая ткань Кодацци - общего типа	$a^{\alpha}_{1}/g_1=const$ или $a^{\alpha}_{2}/g_2=const$	Ни одно из условий I.,2. для собственных значений $\overset{*}{a}{}^{\beta}_{i\,j}$ g_{ij} не выполняется
6. Подмногообразие несет две ткани Кодацци общих типов	Собственные значения матриц тензоров $g_{ij}, \overset{*}{a}{}^{\alpha}_{i\,j}, \overset{*}{a}{}^{\beta}_{i\,j}$ / $\alpha\neq\beta$ / не подчиняются ни одному из условий I.,2.	

Таким образом, двумерные подмногообразия $V_2 \subset {}^1S_4 \subset {}^1R_5$

/$V_2 \subset {}^2S_4 \subset {}^2R_5$ /, несущие сеть сопряженных линий, распались на шесть непересекающихся классов для каждого значения $\sigma(g)=\pm 1$.

Литература.

I/ Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.-Л., 1948.

2/ Дадаян А.А. "Ткань Кодацци", Известия АН БССР, серия физ.мат. наук, № I, 1969.

3/ Каган В.Ф. Основы теории поверхностей, ч. 2, М.-Л., 1948.

4/ Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия, М., 1963.

Печатается в соответствии с решением заседания редколлегии журнала "Известия АН БССР, серия физико-математических наук" от 19 марта 1979 года.

В печать 5.12.79.

Тир. 1 Цена 75 коп. Зак. 32792

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403