МІНІСТЭРСТВА АДУКАЦЫІ РЭСПУБЛІКІ БЕЛАРУСЬ
МАГІЛЁЎСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ
імя А.А.КУЛЯШОВА

Л.А.Бондарава, Л.В.Лешчанка

МЕТАДЫЧНЫЯ РЭКАМЕНДАЦЫІ ДА ПРАКТЫЧНЫХ ЗАНЯТКАЎ ПА МАТЭМАТЫЦЫ

Для студэнтаў педагагічнага факультэта

Вучэбна-метадычны дапаможнік

МАГІЛЁЎ 2000

УДК 510.22(076.1)
Б 81

Друкуецца па рашэнні рэдакцыйна-выдавецкага
і экспертнага савета МДУ імя А.А. Куляшова

Рэцэнзент
кандыдат фізіка-матэматычных навук дацэнт В.Г. Іваноў

Бондарава Л.А., Лешчанка Л.В.

Б 81 Метадычныя рэкамендацыі да практычных заняткаў па матэматыцы: Вучэбна-метадычны дапаможнік. — Магілёў: МДУ імя А.А.Куляшова, 2000 — 28 с.

Дадзены дапаможнік змяшчае кароткія тэарэтычныя звесткі і практычныя заданні па раздзелах матэматыкі «Адпаведнасць», «Дачыненне», «Функцыя». Да некаторых заданняў прыведзены ўзоры рашэння і афармлення. Дапаможнік прызначаны для правядзення практычных заняткаў студэнтамі дзённага і завочнага аддзялення педагагічнага факультэта, можа быць выкарыстаны для арганізацыі самастойнай работы.

1. АДПАВЕДНАСЦЬ

1.1. Адпаведнасці і спосабы іх задання

Бінарнай ***адпаведнасцю*** паміж элементамі двух мностваў (паміж двумя мноствамі) A і B называецца ўсякае падмноства дэкартавага здабытку A х B.

Абазначэнне: $P, R, S, T, ...$

Запіс xPy чытаецца так:

«элементу x адпавядае элемент y»,

«элементы x і y знаходзяцца ў адпаведнасці P»

P – мноства пар выгляду (x, y) такіх, што $x \in A$, $y \in B$ і $P \subseteq A \times B$.

У пары (x, y) элемент x – ***праваобраз*** элемента y, y– ***вобраз*** элемента x.

Спосабы задання адпаведнасцей:

1) указаннем адметнай уласцівасці пар, звязаных дадзенай адпаведнасцю;
2) пералічэннем усіх пар (x, y) (для канечных мностваў A і B);
3) з дапамогай табліцы (для канечных мностваў A і B);
4) з дапамогай графа (для канечных мностваў A і B);
5) з дапамогай графіка на каардынатнай плоскасці (для лікавых мностваў A і B).

Калі паміж мноствамі A і B зададзена нейкая адпаведнасць P, то:

- A – мноства ***адпраўлення*** адпаведнасці;
- B – мноства ***прыбыцця*** адпаведнасці;
- мноства першых кампанентаў пар, што задаюць адпаведнасць, – ***вобласць вызначэння*** адпаведнасці (падмноства мноства адпраўлення A, якія маюць непустыя вобразы);
- мноства другіх кампанентаў пар, што задаюць адпаведнасць, – ***вобласць (мноства) значэнняў*** адпаведнасці (падмноства мноства прыбыцця B, якія маюць непустыя праваобразы).

Калі памяняць месцамі вобласць адпраўлення і вобласць прыбыцця, вобласць вызначэння і вобласць значэнняў дадзенай адпаведнасці P паміж мноствамі A і B, то атрымаецца ***адваротная*** адпаведнасць P^{-1} паміж мноствамі B і A.

Адпаведнасцю, адваротнай адпаведнасці P, называецца адпаведнасціі P^{-1} паміж мноствамі A і B такая, што $yP^{-1}x$ тады і толькі тады, калі xPy.

Адпаведнасці P і P^{-1} – ***узаемна адваротныя***.

Прыклад 1. Дадзены мноствы:

а) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 4, 10, 25, 26, 326\}$.

Якія адпаведнасці можна устанавіць паміж мноствамі A і B?

Рашэнне. Мноствы A і B – лікавыя, канечныя. Паміж іх элементамі можна устанавіць, напрыклад, такія адпаведнасці ($x \in A$, $y \in B$):

P: «лічба x ёсць у запісе ліку y»; R: «лік x менш ліку y»;
S: «лік x – дзельнік ліку y»; T: «квадрат ліку x роўны ліку y».
K: «у запісе ліку x столькі ж лічбаў, што і ў запісе ліку y»;
M: «лік x пры дзяленні на 3 дае тую ж астачу, што і лік y».
Магчыма шмат іншых варыянтаў.

Прыклад 2. Дадзены мноствы:
а) $A = \{13, 21, 32, 45\}$ і $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$;
б) A = {кніга, ручка, стол} і B = {а, к, р, ш};
в) $A = B = N$.

Паміж мноствамі A і B зададзена адпаведнасць P ($x \in A$, $y \in B$):
а) P: «сума лічбаў ліку x роўна ліку y»;
б) P: «слова x пачынаецца з літары y»;
в) P: «лік x дзеліцца на лік y».

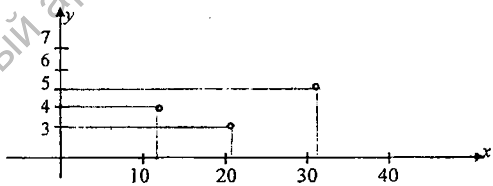
Задайце адпаведнасць P рознымі спосабамі. Укажыце вобласць вызначэння, вобласць значэнняў адпаведнасці.

Рашэнне. а). Мноствы A і B – лікавыя, канечныя. Адпаведнасць P паміж гэтымі мноствамі магчыма задаць усімі пералічанымі вышэй спосабамі:

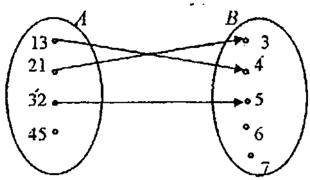
1) $P = \{(13, 4), (21, 3), (32, 5)\}$;
2) $P = \{(x, y) \,/\, x \in A, y \notin B$ і сума лічбаў ліку x роўна ліку $y\}$;
3) Табліца:

A \ B	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
13					
21					
32					
45					

4) Графік адпаведнасці на плоскасці прадстаўлены трыма пунктамі:



5) Граф:



{13, 21, 32} – вобласць вызначэння P,

{3, 4, 5} – вобласць значэнняў P.

13 – правобраз ліку 5, лік 5 – вобраз ліку 13 у дадзенай адпаведнасці.

б). Мноствы A і B – канечныя, але нялікавыя.. Адпаведнасць P паміж гэтымі мноствамі магчыма задаць усімі пералічанымі вышэй способамі, акрамя графіка на каардынатнай плоскасці.

A = {кніга, ручка} – вобласць вызначэння P,

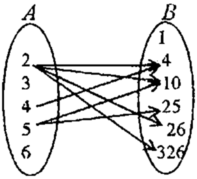
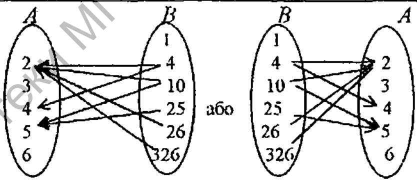
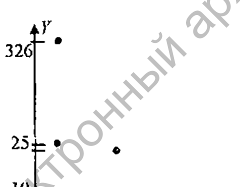
B = {к, р} – вобласць значэнняў P.

в). Мноствы A і B – лікавыя, бесканечныя. Адпаведнасць P паміж гэтымі мноствамі магчыма задаць толькі спосабам 1.

Вобласць вызначэння і вобласць значэнняў адпаведнасці P – мноства натуральных лікаў.

Прыклад 3. Сфармуляваць адпаведнасць S^{-1}, адваротную адпаведнасці S (гл. прыклад 1). Пабудаваць граф і графік адпаведнасцей S і S^{-1}. Параўнаць іх.

Рашэнне. $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 4, 10, 25, 26, 326\}$ ($x \in A$, $y \in B$)

S: «лік x – дзельнік ліку y»	S^{-1}: «лік y дзеліцца на лік x»
	
$S = \{(2, 4), (2, 10), (2, 26), (2, 326), (4, 4), (5, 10), (5, 25)\}$	$S^{-1} = \{(4, 2), (4, 4), (10, 2), (10, 5), (25, 5), (26, 2), (326, 2)\}$
	

Параўнанне графаў адпаведнасцей S і S^{-1} паказвае, што для пабудавання графа адпаведнасці S^{-1} дастаткова памяняць напрамкі стрэлак на графе адпаведнасці S

Пры пабудаванні графіка адпаведнасці S^{-1} элементы мноства A адзначаюцца на восі Oy, а мноства B – на восі Ox.. Графікі ўзаемна адваротных адпаведнасцей S і S^{-1} сіметрычныя адносна бісектрысы I і III каардынатных вуглоў.

З а д а н н і

1. Паміж элементамі мностваў A і B зададзена адпаведнасць R. Укажыце праўдзівыя запісы:

а) $R \subseteq A$ г) $(A \times B) \cap R = R$, ж) $(A \times B) \cup R = R$,

б) $R \subseteq B$, д) $(A \times B) \cap R = \varnothing$, з) $(A \times B) \cup R = \varnothing$,

в) $R \subseteq A \times B$, е) $(A \times B) \cap R \neq \varnothing$, к) $(A \times B) \cup R = A \times B$.

2. Элементы x і y мностваў A і B знаходзяцца ў адпаведнасці S. Укажыце праўдзівыя запісы:

а) $x \subset A$ г) $x \in A$, ж) $(x, y) \in S$,

б) $S \subset A \times B$, д) $x \notin B$, з) $(x, y) \subset S$,

в) $(x, y) \subset A \times B$, е) $(x, y) \in A \times B$, к) $S \in A \times B$.

3. Укажыце мноствы X і Y, элементы якіх знаходзяцца ў адпаведнасці R , калі::

а) R: "горад x – сталіца краіны y";

б) R: "оперу x стварыў кампазітар y";

в) R: "рака x упадае ў мора y";

г) R: "$x + y = 5$"

4. Сфармулюйце некалькі адпаведнасцей, якія можна устанавіць паміж элементамі мностваў A і B, калі:

а) $A = \{12, 34, 56\}$, $B = \{10, 25, 26, 32\}$;

б) A = {а, б, в, г, о, к}, B = {кот, стол, вуліца};

в) A = {Днепр, Бярэзіна}, B = {Магілёў, Кіеў, Мінск, Бабруйск};

г) A = {Маша, Каця, Юля}, B = {мяч, кніга, кукла};

д) A – мноства людзей, B – мноства гарадоў;

е) $A = B$ – мноства натуральных лікаў (N);

ж) A – мноства пунктаў плоскасці; B – мноства кругоў.

5. Дадзены мноствы $X = \{2, 3, 5\}$ і $Y = \{3, 6\}$. Запішыце мноства $X \times Y$.

а). Утварыце ўсе падмноствы мноства $X \times Y$.

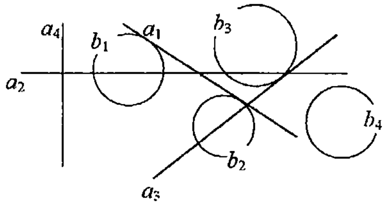
б). Якое з атрыманых падмностваў задае адпаведнасць

P: «x больш y», R : «x менш y», S: «x роўна y», T: «x дзельнік y» ?

в). Задайце адпаведнасці P, R, S, T з дапамогай графіка, графа.

г). Укажыце вобласць вызначэння і вобласць значэнняў адпаведнасцей P, R, S, T.

6. На рысунку дадзена мноства прамых $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ і мноства акружнасцей $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

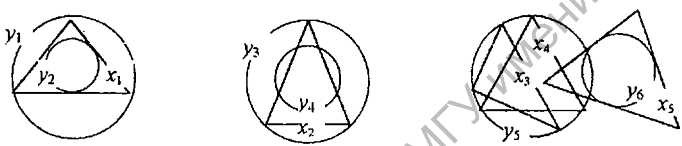


Задайце з дапамогай графа і графіка адпаведнасці:

P : "прамая x датыкаецца да акружнасці y";

R: "прамая x перасякае акружнасць y у двух пунктах".

7. На рысунках зададзена мноства трохвугольнікаў A і мноства акружнасцей B.



а) б) в)

Задайце з дапамогай графа і графіка адпаведнасці:

P : "трохвугольнік x умежаны ў акружнасць y";

R: "трохвугольнік x апісаны каля акружнасці y".

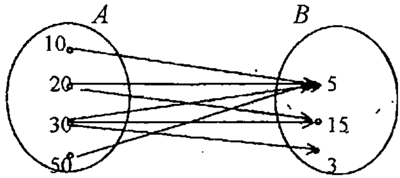
8. Пабудуйце чатырохвугольнік па каардынатах яго вяршынь $A(0, 6)$, $B(5, 0)$, $C(0, -3)$, $D(-8, 0)$. Гэты чатырохвугольнік (разам з унутранай вобласцю) з'яўляецца графікам адпаведнасці паміж мноствамі X і Y. Знайдзіце мноствы X і Y. Укажыце пры дапамозе няроўнасці мноства значэнняў y, якія адпавядаюць значэнню $x = -3,5$.

9. Табліца ўяўляе сабой расклад заняткаў гурткоў:

Дні тыдня / Назвы гурткоў	Пан.	Аўт.	Сер.	Чац.	Пят.	Суб.	Нядз.
Матэматычны							
Драматычны							
Харавы							
Валейбольны							
Баскетбольны							
Гімнастычны							

Адпаведнасць паміж якімі мноствамі ўстанаўлівае гэта табліца? Якія кружкі і секцыі займаюцца ў пятніцу?

10. Адпаведнасць P зададзена графам:



а). Запішыце ўсе пары лікаў, якія знаходзяцца ў гэтай адпаведнасці.

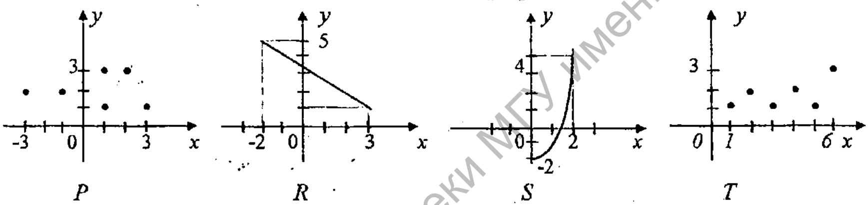
б). Пабудуйце графік адпаведнасці на каардынатнай плоскасці.

в). Параўнайце вобласць адпраўлення адпаведнасці і вобласць вызначэння, вобласць прыбыцця і вобласць значэнняў адпаведнасці.

г). Назавіце вобраз ліку 30, правобраз ліку 5.

11. Сфармулюйце адпаведнасці, адваротныя адпаведнасцям P, R, T, K, M (гл. прыклад 1). Пабудуйце граф і графік кожнай адпаведнасці.

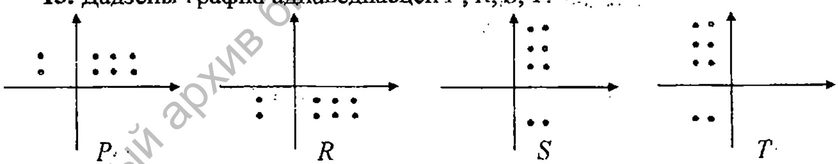
12. Адпаведнасці P, R, S зададзены графікамі.



а). Укажыце вобласць вызначэння і вобласць значэнняў адпаведнасцей.

б). Пабудуйце графікі адваротных адпаведнасцей.

13. Дадзены графікі адпаведнасцей P, R, S, T.



Укажыце пары ўзаемна адваротных адпаведнасцей.

14. Прывядзіце прыклады адпаведнасцей, якія разглядаюцца ў пачатковым курсе матэматыкі паміж:

а) лікавымі мноствамі;

б) мноствам пунктаў і мноствам прамых;

в) мноствам многавугольнікаў і мноствам натуральных лікаў;

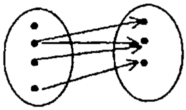
г) мноствам ураўненняў і мноствам натуральных лікаў.

15. У пачатковым курсе матэматыкі разглядваюцца адпаведнасці, якія выражаюцца словамі: "лягчэй", "вышэй", "карацей", "настае за", "даўжэй у 2 разы", "танней", "менш на 5". Сфармулюйце адпаведнасці, адваротныя дадзеным.

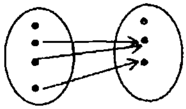
1.2. Віды адпаведнасцей

Адпаведнасць паміж мноствамі A і B называецца ***функцыянальнай*** (функцыяй), калі кожнаму элементу $x \in A$ адпавядае не больш аднаго элемента $y \in B$.

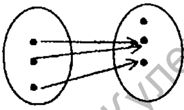
Адпаведнасць (функцыя) паміж мноствамі A і B называецца ***адлюстраваннем***, калі кожнаму элементу $x \in A$ адпавядае дакладна адзін элемент $y \in B$.



няфункцыя



функцыя
неадлюстраванне

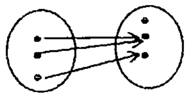


функцыя
адлюстраванне

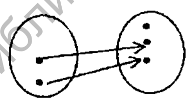
Адлюстраванне, пры якім кожны элемент $y \in B$ з'яўляецца вобразам не больш аднаго элемента $x \in A$, называецца адлюстраваннем мноства A ў мноства B або ***ін'екцыяй*** (ін'ектыўнае адлюстраванне).

Адлюстраванне, пры якім кожны элемент $y \in B$ з'яўляецца вобразам хоць аднаго элемента $x \in A$, называецца адлюстраваннем мноства A ***на*** мноства B або ***сур'екцыяй*** (сур'ектыўнае адлюстраванне).

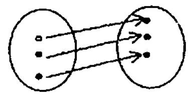
Адлюстраванне, пры якім кожны элемент $y \in B$ з'яўляецца вобразам аднаго і толькі аднаго элемента $x \in A$, называецца ***біекцыяй*** (біектыўнае адлюстраванне або ўзаемна адназначная адпаведнасць).



сур'екцыя
(неін'екцыя)



ін'екцыя
(несур'екцыя)



біекцыя
(сур'екцыя + ін'екцыя)

Пры біектыўным адлюстраванні кожнаму элементу $x \in A$ адпавядае дакладна адзін элемент $y \in B$ і кожны элемент $y \in B$ адпавядае дакладна аднаму элементу $x \in A$.

Прыклад 4. Чырвоны, жоўты і сіні алоўкі ляжаць у трох каробках па аднаму. Колер алоўка адрозніваецца ад колеру каробкі, у якой ён ляжыць. У якой каробцы ляжыць сіні аловак, калі у сіняй каробцы – жоўты аловак?

Рашэнне. Гэта задача адносіцца да разраду «лагічных» задач. Мы разгледзім рашэнне гэтай задачы з пункту гледжання тэорыі мностваў. Спачатку перафармулюем задачу.

Дадзены два мноствы: A – мноства алоўкаў (чырвоны, жоўты, сіні) і B – мноства каробак (чырвоная, жоўтая сіняя). Для зручнасці абазначым іх так: $A = \{Ч, Ж, С\}$, $B = \{ч, ж, с\}$. Паміж элементамі мностваў A і B трэба устанавіць узаемна адназначную адпаведнасць «аловак x ляжыць у каробцы y», якая сфармулявана ў выглядзе патрабаванняў:

1) колер алоўка адрозніваецца ад колеру каробкі;

2) у сіняй каробцы жоўты аловак.

Першую ўмову можна разбіць на некалькі прасцейшых умоў. Атрымаем:

1) чырвоны аловак не ляжыць у чырвонай каробцы;

2) сіні аловак не ляжыць у сіняй каробцы;

3) жоўты аловак не ляжыць у жоўтай каробцы;

4) жоўты аловак ляжыць у сіняй каробцы.

Рашэнне задачы аформім двумя спосабамі: у выглядзе табліцы і з дапамогай графа.

С п о с а б 1. Пры пабудаванні табліцы знакам «+» будзем адзначаць клетачку табліцы, якая задае пару адваведнасці «аловак x ляжыць у каробцы y», і знакам «–» – тую клетачку, якая не ўваходзіць у адпаведнасць. Умова задачы будзе прадстаўлена табліцай 1:

Табліца 1

B / A	ч	ж	с
Ч	–		
Ж		–	+
С			–

Табліца 2

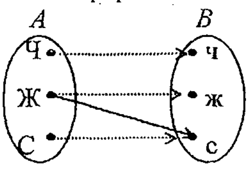
B / A	ч	ж	с
Ч	–	+	–
Ж	–	–	+
С	+	–	–

Далей запаўняем табліцу наступным чынам: у кожным радку і ў кожным слупку павінен быць толькі адзін знак «+» (кожны аловак ляжыць толькі ў адной каробцы і кожная каробка змяшчае толькі адзін аловак – сэнс узаемна адназначнай адпаведнасці). У выніку атрымаем табліцу 2, якая дае адказ на пытанне задачы.

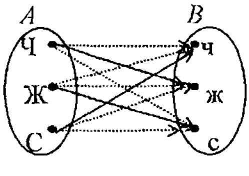
С п о с а б 2. Пабудуем граф адпаведнасці паміж мноствамі A і B.

Умове задачы адпавядаем граф 1 (суцэльная стрэлка – «ляжыць» пункцірная стрэлка – «не ляжыць»).

Граф 1



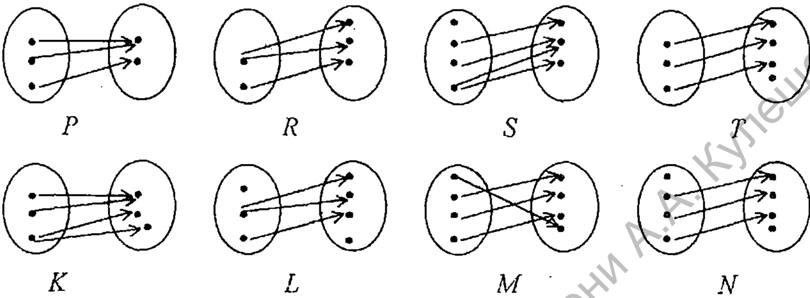
Граф 2



Дабудоўваем граф 2, улічваючы, што з кожнага пункта мноства A усяго можа выходзіць тры стрэлкі: адна суцэльная і дзве пункцірныя і ў кожны пункт мноства B можа ўваходзіць таксама тры стрэлкі: адна суцэльная і дзве пункцірныя. Суцэльная стрэлкі на графе 2 вызначаюць узаемна адназначную адпаведнасць паміж мноствамі A і B і даюць адказ на пытанне задачы.

З а д а н н і

16. Адпаведнасці зададзены графамі:



а). Вызначце від адпаведнасцей.

б). Укажыце адпаведнасці, якія з'яўляюцца функцыямі.

в). Пабудуйце графы адваротных адпаведнасцей і вызначце іх від.

г). Укажыце адваротныя адпаведнасці, якія з'яўляюцца функцыямі.

17. Адпаведнасці зададзены графікамі (гл. заданне 12). Укажыце функцыі. Ці з'яўляюцца функцыямі адпаведнасці, адваротныя дадзеным?.

18. Паміж мноствамі $A = \{2, 4, 6, 7, 9\}$. і $B = \{a, b, c, d, e\}$зададзены адпаведнасці P, R, S:

$P = \{(2, a), (4, e), (6, b), (7, d), (9, c)\}$;

$R = \{(4, d), (6, b), (4, b), (7, a), (2, c)\}$;

$S = \{(2, c), (4, b), (9, b), (7, b)\}$.

а). Вызначце від адпаведнасцей.

б) Укажыце вобласці вызначэння і вобласці значэнняў функцый.

19. Паміж мноствамі $A = \{a \mid a \in N, 1 \le a \le 20\}$ і $B = \{3, 5\}$ устаноўлена адпаведнасць: калі a – просты лік, то яму адпавядае $b = 5$, калі a – састаўны лік, то $b = 3$. Запішыце мноства пар (a, b), дзе $a \in A$, $b \in B$, якія належаць графіку дадзенай адпаведнасці. Пабудуйце граф адпаведнасці. Ці з'яўляецца адпаведнасць функцыяй? Укажыце вобласць вызначэння.

20. Вызначце від адпаведнасці P, зададзенай паміж мноствамі A і B:

а) A – мноства суджэнняў,

B – мноства значэнняў праўдзівасці: $B = \{П, Н\}$,

P: "Суджэнне x мае значэнне праўдзівасці y";

б) A – мноства дзяржаў, B – мноства гарадоў,

P: "Дзяржава x мае сталіцу y";

в) A – мноства факультэтаў універсітэта,

B – мноства студэнтаў універсітэта,

P: "На факультэце x вучыцца студэнт y";

в) A – мноства галосных літар беларускага алфавіта,

B – мноства зычных літар,

P: "Літара x стаіць у алфавіце непасрэдна пасля літары y".

21. Паміж мноствамі $A = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,5), (1,5), (2,2), (3,3)\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ устаноўлена адпаведнасць

P: "Кожнай пары $(x, y) \in A$, адпавядае лік $z \in B$ такі, што $z = x + y$".

а). Пабудуйце граф адпаведнасці P.

б). Вызначце від адпаведнасці.

в). Які від адпаведнасці P, калі $A = N_0 \times N_0$, $B = N_0$?

21. Дадзены мноствы $A = \{k, l, m, n, p\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Устанавіце тры розныя ўзаемна адназначныя адпаведнасці паміж дадзенымі мноствамі. Колькі ўсяго такіх адпаведнасцей можна устанавіць?

22. У маці трое дзяцей: Таня, Коля, Саша. Яна купіла мячык, цукерку, грушу і дала кожнаму з дзяцей па аднаму прадмету. Пакажыце пры дапамозе графа, як гэта можна зрабіць. Колькі спосабаў? Укажыце від адпаведнасці.

23. Прывядзіце прыклады мностваў, паміж якімі можна ўстанавіць узаемна адназначную адпаведнасць.

24. Рашыце наступныя задачы з дапамогай табліц і графаў.

а). Тры дзяўчынкі: Бярозкіна, Вярбіцкая і Сасноўская пасадзілі тры дрэвы: бярозу, вербу і сасну. Кожная з іх не пасадзіла дрэва, ад назвы якога ўтворана яе прозвішча. Якое дрэва пасадзіла кожная з дзяўчынак, калі вядома, што Бярозкіна пасадзіла сасну?

б). Ёсць тры каробкі і тры шарыкі чырвонага, сіняга і зялёнага колеру. Трэба раскласці шарыкі ў каробкі так, каб колер шарыка адрозніваўся ад колеру каробкі.

в). Чарапаха Тарціла дала Бурацiну 3 каробачкі: чырвоную, сінюю і зялёную. На чырвонай было напісана «Тут ляжыць Залаты ключык», на сіняй – «Зялёная каробачка пустая», а на зялёнай – «Тут сядзіць гадзюка». Тарціла сказала: «Сапраўды, у адной каробачцы ляжыць Залаты ключык, у другой – гадзюка, трэцяя – пустая. Але ўсе надпісы на каробачках няправільныя». Дзе ляжыць Залаты ключык?

г). На навагодні бал-маскарад Маша, Света, Коля і Андрэй адзелі касцюмя Мядзведзя, Зайца, Лісы і Воўка. У касцюме Зайца была адна з дзяўчынак, але не Света. Андрэй – не Воўк і не Ліса. Коля таксама не Воўк. Які касцюм у кожнага з дзяцей?

1.3. Роўнамагутныя мноствы

Два мноствы называюцца ***роўнамагутнымі***, калі паміж імі можна ўстанавіць узаемна адназначную адпаведнасць (біекцыю).

Абазначэнне: $A \sim B$.

Канечныя мноствы A і B з'яўляюцца роўнамагутнымі тады і толькі тады, калі яны маюць аднолькавую колькасць элементаў:

$$A \sim B \equiv m(A) = m(B).$$

Бесканечнае мноства A, роўнамагутнае мноству натуральных лікаў N, называецца ***лічыльным***.

Элементы лічыльнага мноства можна ***занумараваць***.

Мноства пунктаў адвольнага адрэзка не з'яўляецца лічыльным, яго пункты нельга занумараваць і ўстанавіць узаемна адназначную адпаведнасць з мноствам натуральных лікаў.

Мноства пунктаў адвольнага адрэзка роўнамагутнае мноству сапраўдных лікаў R, якое мае магутнасць ***кантынуум***.

Прыклад 5. Даказаць, што мноства A квадратаў натуральных лікаў – лічыльнае.

Рашэнне. Мноства A – $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, ..., n^2, ...\}$ – бесканечнае. Пры гэтым $A \subset N$ (мноства A – падмноства, частка мноства N).

Паставім у адпаведнасць кожнаму натуральнаму ліку яго квадрат:

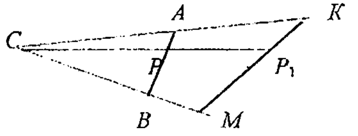
$$\begin{array}{ccccccccc} N & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ A & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \ldots & n^2 & \ldots \end{array}$$

Гэта адпаведнасць узаемна адназначная: кожнаму натуральнаму ліку адпавядае толькі адзін лік – яго квадрат і кожнаму квадрату адпавядае адзіны натуральны лік, квадратам якога ён з'яўляецца.

Значыць, $A \sim N$ (мноства N роўнамагутнае свайму падмноству A) і мноства A – лічыльнае.

Прыклад 6. Даказаць, што мноствы пунктаў двух адрэзкаў рознай даўжыні роўнамагутныя.

Рашэнне. Няхай дадзены два адвольныя адрэзкі рознай даўжыні: AB і KM. Праз пункты A і K, B і M правядзём прамыя, якія перасякуцца ў пункце C. Кожнаму пункту P адрэзка AB паставім у адпаведнасць пункт P_1 адрэзка KM, які ляжыць на прамой CP.



Устаноўленая такім чынам адпаведнасць – узаемна адназначная. Значыць, мноствы пунктаў адрэзкаў AB і KM роўнамагутныя.

З а д а н н і

25. Прывядзіце прыклады мностваў, роўнамагутных мноству:
а) дзён тыдня; б) пальцаў на руцэ; в) {а, к, л, т}.
26. Дакажыце роўнамагутнасць мностваў A і B, калі:
а) A – мноства каранёў ураўнення $x^2 - 5x + 6 = 0$,
B – мноства дыяганалей 4-вугольніка;
б) A – мноства дзён тыдня,
B – мноства натуральных дзельнікаў ліку 64;
в) A – мноства элементаў у дэкартавым здабытку $X \times Y$;
B – мноства элементаў у дэкартавым здабытку $Y \times X$
($X = \{2,4,6\}$, $Y = \{a,b,c\}$);
27. Пастаўце паміж мноствамі A і B знак «=» або знак «~», калі:
а) A – мноства старон квадрата, B – мноства вуглоў квадрата;
а) A – мноства літар у слове «мір», B = {і, м, р};
а) A – мноства каэфіцыентаў мнагачлена $2x^2 + 3x + 1$, B = {і, м, р}.
28. Дадзены мноствы: A = {і, м, р, о, т}, B = {к, л, б}, A_1 = {і, м, р}.
Якое сцвярджэнне правільнае: а) $A \sim B$; б) $B \sim A_1$?
Назавіце ўсе падмноствы мноства A, роўнамагутныя мноству B.
29. Дакажыце, што $A \sim B$, калі:
а) A – мноства цотных натуральных лікаў,
B – мноства няцотных натуральных лікаў;
б) A – мноства натуральных лікаў, кратных 3,
B – мноства натуральных лікаў; кратных 6.
30. Дадзены мноствы:
A – мноства натуральных лікаў, кратных 3;
B – мноства дробаў выгляду $\frac{1}{3n}$, $n \in N$;
C – мноства дробаў выгляду $\frac{1}{n}$, $n \in N$;
D – мноства лікаў выгляду, 3^n, $n \in N$.
Назавіце пары роўнамагутных мностваў.
31. Дакажыце лічыльнасць наступных мностваў:
а) цотных натуральных лікаў; б) няцотных натуральных лікаў;
в) натуральных лікаў, кратных 5; г) натуральных лікаў выгляду 2^n.
д) цэлых неадмоўных лікаў;
е) пунктаў плоскасці, абедзве каардынаты якіх – натуральныя лікі.
33. Дакажыце роўнамагутнасць мностваў:
а) пунктаў паўакружнасці і пунктаў яе дыяметра;
б) пунктаў праменя OA і пунктаў праменя OB;
в) пунктаў дзвюх канцэнтрычных акружнасцей розных радыусаў;
г) пунктаў мяжы квадрата і пунктаў акружнасці.
д) няроўных адрэзкаў плоскасці і дадатных сапраўдных лікаў.

2. ДАЧЫНЕННЕ

2.1. Дачыненні на мностве і спосабы іх задання

Бінарнае дачыненне на мностве (дачыненне паміж двумя элементамі аднаго мноства) – прыватны выпадак адпаведнасці, калі мноствы A і B супадаюць: $A = B$

Дачыненнем на мностве A называецца ўсякае падмноства дэкартавага здабытку $A \times A$.

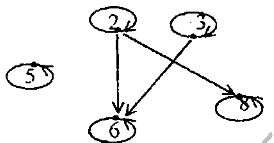
Абазначэнне, спосабы задання дачынення тыя ж, што і для адпаведнасці паміж элементамі двух мностваў (гл. п.1.1.), але граф дачынення мае свае асаблівасці.

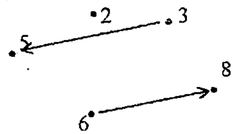
Прыклад 7. На мностве $A = \{2, 3, 5, 6, 8\}$ зададзены дачыненні

P: «лік x – дзельнік ліку y» і R: «лік x менш за y на 2».

Пабудаваць графы дачыненняў.

Рашэнне. Граф складаецца з ***вяршынь*** (пунктаў, якія абазначаюць элементы мноства), стрэлак, што злучаюць дзве розныя вяршыні, якія знаходзяцца ў дачыненні, і стрэлак, пачатак і канец якіх супадаць, – ***петляў***. Пятля абазначае, што элемент знаходзіцца ў дадзеным дачыненні з самім сабой, напрыклад, «лік 3 – дзельнік ліку 3».





$P = \{(2,6), (2,8), (3,6), (5,5),$
$(2,2), (3,3), (8,8), (6,6)\}$

$R: = \{(3,5), (6,8)\}$

Дачыненне R можна задаць у выглядзе роўнасці: $y = x + 2$.

З а д а н н і

34. Прывядзіце прыклады дачыненняў на мностве:

а) натуральных лікаў; б) прамых на плоскасці;

в) трохвугольнікаў; г) адрэзкаў; д) мностваў.

35. На мностве $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ зададзены дачыненні:

P: «x больш за y у 3 разы» і R: « x больш за y на 3».

Пабудуйце графы і графікі дачыненняў.

Запішыце дачыненні ў выглядзе роўнасцей.

36. Пабудуйце графы дачыненняў, зададзеных на мностве $A = \{2, 4, 6, 8\}$:

P: «лік x больш, чым лік y», Q: «лік x дзеліцца на лік y»,

R: «лік x дзельнік ліку y», S: «лік x не больш, чым лік y».

37. Запішыце ў выглядзе роўнасцей дачыненні:

а) «x больш за y у 7 разоў», б) «x менш за y у 7 разоў»,

в) «x больш за y на 7», г) «x менш за y на 7».

38. На каардынатнай плоскасці пабудуйце графікі дачыненняў, зададзеных на мностве сапраўдных лікаў $\boldsymbol{R}$:

а) $y = x + 1$; б) $x^2 + y^2 = 9$; в) $x \geq 0 \ \wedge \ y \leq 0$;

г) $y = x^2 \wedge x > 0$; д) $x^2 + y^2 \leq 9$; е) $y \leq 1 - x \ \wedge \ x \geq 0$.

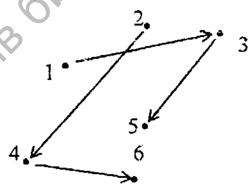
39. Дачыненне “x выйграў у y” на мностве ўдзельнікаў шахматнага турніру зададзена пры дапамозе табліцы.

	Міхайлаў	Пятроў	Паўлаў	Краўцоў	Нікалаеў	Зайцаў
Міхайлаў						
Пятроў						
Паўлаў						
Краўцоў						
Нікалаеў						
Зайцаў						

Хто з’яўляецца пераможцай турніру? Хто на апошнім месцы? Выпішыце ўсе пары шахматыстаў, якія знаходзяцца ў дачыненні “x згуляў у нічыю з y”.

40. Мноства М членаў сям’і Волкавых складаецца з бацькі Міхайла Пятровіча, маці Веры Іванаўны і дзяцей: Толі, Каці, Пеці і Вольгі. Пабудуйце графы дачыненняў: а) «быць дачкой», б) «быць братам», в) «быць маці».

41. Дачыненне P зададзена на мностве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ графам:



а) Задайце дачыненне P з дапамогай адметнай уласцівасці (роўнасці), мноства пар, графіка.

б) Назавіце вобласць вызначэння і вобласць значэнняў дачынення.

в) Сфармулюйце і пабудуйце граф адваротнага дачынення P^{-1}.

42. На мностве ўсіх людзей зададзены дачыненні:

P: «быць сынам», R: «быць братам», S : «быць сябрам»,

T: «быць сваяком», K: «быць аднафамільцам», L: «быць старэйшым».

Сфармулюйце адваротныя дачыненні.

2.2. Уласцівасці дачыненняў

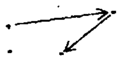
Дачыненне P на мностве A называецца ***рэфлексіўным***, калі аб кожным элеменце мноства А можна сказаць, што ён знаходзіцца ў дачыненні P з самім сабой.

Сімвалічны запіс рэфлексіўнасці: $\forall x \in A\ (xPx)$.

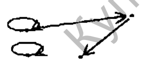
Дачыненне P на мностве A называецца ***антырэфлексіўным***, калі аб кожным элеменце мноства A можна сказаць, што ён не знаходзіцца ў дачыненні P з самім сабой.

Сімвалічны запіс антырэфлексіўнасці: $\forall x \in A \neg (xPx)$ або $\neg \exists x \in A\ (xPx)$.

рэфлексіўнае



антырэфлексіўнае



нерэфлексіўнае (неантырэфлексіўнае)

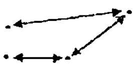
Дачыненне P на мностве A называецца ***сіметрычным***, калі для любых элементаў x і y з мноства A з таго, што x знаходзіцца ў дачыненні P з элементам y, вынікае, што y знаходзіцца ў дачыненні P з элементам x.

Сімвалічны запіс сіметрычнасці: $\forall x,y \in A\ \ (xPy \supset yPx)$.

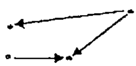
Дачыненне P на мностве A называецца ***антысіметрычным***, калі для любых розных элементаў x і y ($x \neq y$) з мноства A з таго, што x знаходзіцца ў дачыненні P з элементам y, вынікае, што y не знаходзіцца ў дачыненні P з элементам x.

Сімвалічны запіс антысіметрычнасці:

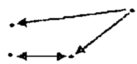
$\forall x,y \in A\ (x \neq y \wedge xPy \supset \neg (yPx))$ або $\neg \exists\ x,y \in A\ (x \neq y)$: $xPy \supset\ yPx$.



сіметрычнае



антысіметрычнае

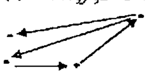


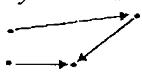
несіметрычнае (неантысіметрычнае)

Дачыненне P на мностве A называецца ***транзітыўным***, калі для любых элементаў x, y і z з мноства A з таго, што x знаходзіцца ў дачыненні P з элементам y, а y знаходзіцца ў дачыненні P з элементам z, вынікае, што x знаходзіцца ў дачыненні P з элементам z.

Сімвалічны запіс транзітыўнасці: $\forall x,y,z \in A : xPy \wedge yP\, z\ \supset xP\, z$.

транзітыўнае





нетранзітыўныя

З а д а н н і

43. Укажыце правільныя суджэнні:

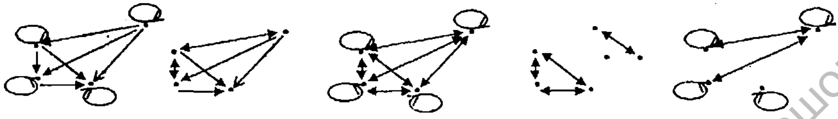
а) дачыненне «больш у 3 разы» антысіметрычнае, бо з таго, што x

больш за y у 3 разы, не вынікае, што y больш за x у 3 разы;

б) дачыненне «больш у 3 разы» антысіметрычнае, бо з таго, што лік x больш за лік y у 3 разы, вынікае, што y не больш за x у 3 разы;

в) дачыненне «больш у 3 разы» антысіметрычнае, так як калі x больш за y у 3 разы, то y менш за x у 3 разы.

44. Вызначце ўласцівасці дачыненняў, зададзеных графамі:



а) б) в) г) д)

45. Укажыце ўласцівасці дачыненняў T, P, S, R, Q, M, зададзеных на мностве $A = \{3, 6, 9, 12\}$ пералічэннем пар:

$T = \{(3, 3), (6, 3) (9, 3), (12, 3), (12, 6), (6, 6), (9, 9), (12, 12)\}$;

$P = \{(6, 3) (9, 6), (3, 6), (12, 9)\}$;

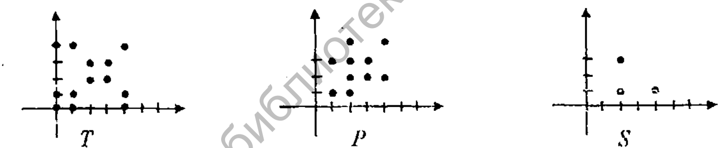
$S = \{(3, 3), (6, 6) (9, 9), (9, 6), (6, 3), (6, 9), (9, 3), (3, 6), (3, 9), (12, 12)\}$;

$R = \{(3, 9), (3, 12) (3, 6), (9, 12), (6, 12)\}$;

$Q = \{(3, 3), (6, 6) (3, 12), (12, 3), (9, 9), (3, 9), (9, 3)\}$;

$M = \{(3, 9), (3, 6) (3, 12), (6, 9), (6, 12), (9, 12)\}$.

46. Дачыненні T, P, S на мностве $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ зададзены пры дапамозе графікаў:



Якія з іх з'яўляюцца рэфлексіўнымі, сіметрычнымі?

47. На мностве $A = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ зададзены дачыненні P: «x больш y» і R: «x кратна y». Пабудуйце графы гэтых дачыненняў і ўкажыце ўласцівасці.

48. Укажыце ўласцівасці дачыненняў:

а) «x роўна y» (на мностве сапраўдных лікаў»;

б) «x падобная y» (на мностве геаметрычных фігур);

в) «x роўнавялікая y» (на мностве геаметрычных фігур);

г) «x – бацька y» (на мностве людзей адной сям'і);

д) «x дзеліцца на y» (на мностве натуральных лікаў);

е) «x менш чым y» (на мностве рацыянальных лікаў);

ж) «x не менш чым y» (на мностве цэлых лікаў);

з) «x сваяк y» (на мностве людзей);

і) «x перпендыкулярна y» (на мностве прамых плоскасці);

к) «x сябар y» (на мностве людзей);

л) «x мае столькі ж літар, колькі y» (на мностве слоў);

м) «x дае такі ж астатак пры дзяленні на 5, што і y» (на мностве натуральных лікаў);

н) «x больш чым y на 3» (на мностве цэлых лікаў);

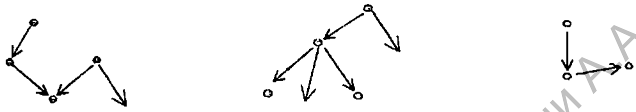
о) «x знаёмы y» (на мностве людзей);

п) «x прыток y» (на мностве рэк Беларусі);

р) «x карацей y» (на мностве адрэзкаў).

49. Назавіце дачыненні, якія могуць існаваць паміж двумя мноствамі. Укажыце ўласцівасці гэтых дачыненняў.

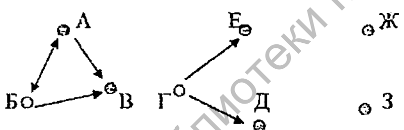
50. Вызначце, які граф задае дачыненне «быць бацькам», і які дачыненне «быць дзедам»



а) б) в)

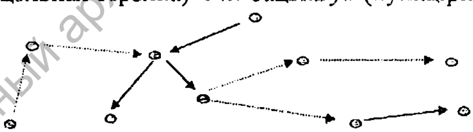
Назавіце ўласцівасці гэтых дачыненняў.

51. На мностве A = {А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З} зададзена дачыненне «быць братам» з дапамогай графа:



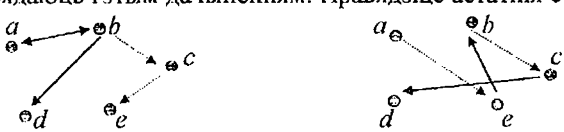
Хто з'яўляецца мужчынам і хто – жанчынай? Пра каго па графу нічога нельга сказаць?

52. На некаторым мностве людзей графам зададзены дачыненні «x маці y» (суцэльная стрэлка) і «x бацька y» (пунктірная стрэлка):



Правядзіце стрэлкі, якія задаюць дачыненне «x дзед y».

53. На мностве прамых плоскасці $M = \{a, b, c, d, e\}$ зададзены дачыненні «x паралельна y» (суцэльная стрэлка) і «x перпендыкулярна y» (пунктірная стрэлка). На графах праведзены не ўсе стрэлкі, што адпавядаюць гэтым дачыненням. Правядзіце астатнія стрэлкі:



а) б)

54. Нарысуйце граф з пяццю вяршынямі так, каб ён задаваў дачыненне:

а) рэфлексіўнае, сіметрычнае, транзітыўнае;

б) антырэфлексіўнае, сіметрычнае, нетранзітыўнае;

в) антырэфлексіўнае, антысіметрычнае, транзітыўнае;

г) антырэфлексіўнае, антысіметрычнае, нетранзітыўнае;

д) рэфлексіўнае, антысіметрычнае, транзітыўнае;

е) нерэфлексіўнае, несіметрычнае, нетранзітыўнае;

2.3. Дачыненне эквівалентнасці

Дачыненне P на мностве A называецца дачыненнем ***эквівалентнасці***, калі яно рэфлексіўнае, сіметрычнае і транзітыўнае.

Усякае дачыненне эквівалентнасці, зададзенае на мностве A, раздзяляе мноства A на падмноствы, якія папарна не перасякаюцца (***класы эквівалентнасці***) і наадварот: калі дачыненне, зададзенае на мностве A, вызначае раздзяленне гэтага мноства на класы, то гэта дачыненне ёсць дачыненне эквівалентнасці.

Прыклад 8. На мностве $A = \{12;\ 17,\ 28,\ 34,\ 56,\ 7\}$ зададзена дачыненне P: «лікі x і y маюць адзін і той жа астатак пры дзяленні на 3». Вызначыць уласцівасці. Пабудаваць граф дачынення. Запісаць класы эквівалентнасці.

Рашэнне. Перш за ўсё вызначым, якія астаткі пры дзяленні на 3 маюць лікі – элементы мноства A.

12 : 3 = 4 (аст. 0), 17 : 3 = 5 (аст. 2), 28 : 3 = 9 (аст. 1),

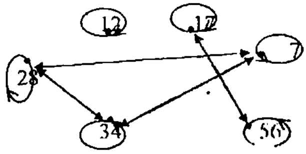
34 : 3 = 11 (аст. 1), 56 : 3 = 18 (аст. 2), 7 : 3 = 2 (аст. 1).

Дачыненне P – рэфлексіўнае: можна лічыць, што кожны лік мае такі ж астатак пры дзяленні на 3 , як ён сам.

Дачыненне P – сіметрычнае: калі лік x мае такі ж астатак пры дзяленні на 3, як лік y, то лік y мае такі ж астатак пры дзяленні на 3,як лік x.

Дачыненне P – транзітыўнае: калі лік x мае такі ж астатак пры дзяленні на 3, як лік y, а лік y мае такі ж астатак пры дзяленні на 3, як лік z, то лік x мае такі ж астатак пры дзяленні на 3, як лік z.

Граф дачынення:



Дачыненне P разбівае мноства A на класы эквівалентнасці:

$A = \{28, 34, 7\} \cup \{17, 56\} \cup \{12\}$

Прыклад 9. У Марыны, Каці, Соні, Ніны, Лізы і Тані было 2 сабакі і 4 кошкі. У Соні і Лізы былі аднолькавыя жывёлы, у Лізы і Марыны – розныя, у Каці і Соні – аднолькавыя, у Соні і Ніны – розныя. У каго з дзяцей кошка, у каго – сабака?

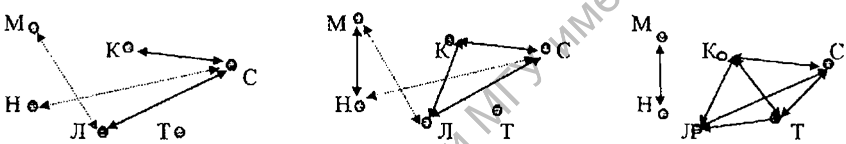
Рашэнне. Рашэнне задачы заключаецца ў тым, каб разбіць мноства дзяцей A = {М, К, С, Н, Л, Т} на класы пры дапамозе дачынення эквівалентнасці «мець адну і тую ж жывёлу». Такіх класаў будзе два: дзеці, у якіх ёсць кошкі; і дзеці, у якіх ёсць сабакі. У адным класе эквівалентнасці павінна быць двое дзяцей, у другім – чатыры (па колькасці сабак і кошак).

Пабудуем граф дачынення «мець адну і тую ж жывёлу», улічваючы ўмовы задачы (граф 1):

1. У Соні і Лізы былі аднолькавыя жывёлы. Гэта значыць, Соня і Ліза належаць аднаму класу. Злучым іх суцэльнай лініяй (стрэлкай).

2. У Лізы і Марыны – розныя жывёлы. Ліза і Марына не належаць аднаму класу. Злучым іх пункцірнай лініяй (стрэлкай).

Граф 1 Граф 2 Граф 3



3. У Каці і Соні – аднолькавыя жывёлы. Каця і Соня належаць аднаму класу.

4. У Соні і Ніны – розныя жывёлы. Соня і Ніна не належаць аднаму класу.

Дабудуем граф, улічваючы ўласцівасці дачынення: Ліза, Соня і Каця належаць аднаму класу. Марына і Ніна не належаць гэтаму класу, але яны абедзве належаць другому класу (граф 2).

Застаецца высветліць, да якога класу адносіцца Таня. Відавочна, што Марына і Ніна ўтвараюць клас дзяцей, у якіх сабакі (іх усяго два). Значыць, Таня належыць да класу дзяцей, у якіх кошкі (граф 3).

Адказ: у Марыны і Ніны – сабакі, у Каці, Лізы, Соні, Тані – кошкі.

З а д а н н і

55. Якія з дачыненняў (гл. заданне 48) з'яўляюцца дачыненнямі эквівалентнасці?

56. На мностве A = {17, 21, 35, 46, 15, 26, 37, 42} зададзены дачыненні:

P: «мець аднолькавы астатак пры дзяленні на 5»,

Q: «заканчвацца адной і той жа лічбай»,

R: «мець у запісе аднолькавыя лічбы»,

S: «быць большым».

Пабудуйце графы дачыненняў. Назавіце ўласцівасці. Выдзеліце дачыненні эквівалентнасці. Запішыце для іх класы эквівалентнасці.

57. Мноства $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ разбілі на класы такім чынам: $A = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 7\} \cup \{5, 6\}$. Пабудуйце граф і графік адпаведнага дачынення эквівалентнасці.

58. Мноства Z раздзелена на класы наступным чынам:

$Z = \{0\} \cup \{-1, 1\} \cup \{-2, 2\}, \ldots$

Сфармулюйце адметную ўласцівасцьдачынення, па якому атрымана гэта дзяленне мноства на класы. Пабудуйце граф гэтага дачынення на мностве $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

59. Дадзены мноствы: $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $C = \{e, f\}$, $D = \{a, b, d\}$, $E = \{d, k, l, m, n\}$, $F = \{k, l, m, n,\}$, $M = \{k, n\}$.

Пабудуйце графы дачыненняў:

P: «x – падмноства мноства y»,

Q: «x – уласнае падмноства мноства y»,

Назавіце ўласцівасці гэтых дачыненняў.

60. На мностве цэлых лікаў ад 0 да 9999 зададзена дачыненне P: «мець у запісе адну і тую ж колькасць лічбаў». Дакажыце, што P – дачыненне эквівалентнасці. На колькі класаў дачыненне P разбівае дадзенае мноства лікаў? Назавіце найбольшы і найменшы элементы кожнага класа.

61. Колькі класаў эквівалентнасці вызначае на мностве натуральных лікаў дачыненне «заканчвацца адной і той жа лічбай»? Назавіце па аднаму прадстаўніку кожнага класа.

62. Нарысуйце граф з 9 вяршынямі, каб ён задаваў дачыненне эквівалентнасці, якое разбівае дадзенае мноства на 3 класы эквівалентнасці.

63. На мностве $A = \{3, 4, 5, 8\}$ зададзена дачыненне P пералічэннем пар: $P = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 8), (8, 5), (8, 8)\}$.

а) Дакажыце, што P – дачыненне эквівалентнасці.

б) Пабудуйце графік дачынення Р на каардынатнай плоскасці. Якія яго асаблівасці?

64. Рашыце задачы, пабудаваўшы графы:

а). У Тані, Машы, Каці, Валі і Галі 3 лялькі і 2 мячыкі. У каго з дзяцей якая цацка, калі у Тані і Машы – неаднолькавыя цацкі, у Каці і Тані – аднолькавыя, у Валі і Машы – розныя?

б). Света, Лена, Таня, Галя і Наташа купілі 3 порцыі марожанага і 2 піражных. Галя і Света купілі адно і тое ж, Таня і Света – рознае, Света і Лена – аднолькавае. Што купіла кожная з дзяўчынак?

в). У Вовы, Мішы, Косці, Адрэя і Сярожы былі 4 мячыкі і 1 набор шашак. Што было ў кожнага хлопчыка, калі ў Косці і Мішы, а таксама ў Косці і Сярожы – розныя цацкі?

2.4. Дачыненне парадку

Дачыненне P на мностве A называецца дачыненнем ***строгага парадку***, калі яно антырэфлексіўнае, антысіметрычнае і транзітыўнае.

Дачыненне P на мностве A называецца дачыненнем ***нястрогага парадку***, калі яно рэфлексіўнае, антысіметрычнае і транзітыўнае.

Усякае дачыненне парадку, зададзенае на мностве A, ***упарадкоўвае*** мноства A (мноства А называецца ***упарадкаваным***).

Дачыненне парадку P на мностве A называецца дачыненнем ***лінейнага парадку***, калі кожныя два розныя элементы мноства А знаходзяцца ў дачыненні P (xPy або yPx).

Дачыненне парадку P, зададзенае на мностве A, называецца дачыненнем ***частковага*** (нелінейнага) парадку, калі ў мностве A ёсць элементы, якія не знаходзяцца ў дадзеным дачыненні.

Мноства А з зададзеным на ім дачыненнем лінейнага парадку называецца ***лінейна ўпарадкаваным***.

Прыклад 10. Мноства A складаецца з жывёл: A = {сабака, заяц, ліса, воўк}. Пабудаваць граф дачынення «x лягчэй за y», калі вядома, што заяц лягчэй сабакі, а ліса цяжэй сабакі, але лягчэй ваўка. Вызначыць, хто самы лёгкі, хто самы цяжкі.

Рашэнне. Вызначым уласцівасці дачынення «x лягчэй за y»: яно антырэфлексіўнае (ні адна жывёла не можа быць лягчэй за сябе), антысіметрычнае (калі x лягчэй за y, то не можа y быць лягчэй за x), транзітыўнае (калі x лягчэй за y, а y лягчэй за z, то заўсёды y лягчэй за z).

Дачыненне вызначаюць умовы:

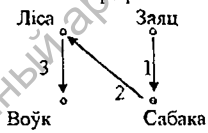
1) заяц лягчэй сабакі; 2) ліса цяжэй сабакі: 3) ліса лягчэй ваўка.

Сфармулюем іх усе ў выглядзе «лягчэй»:

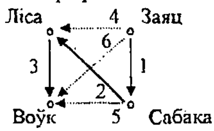
1) заяц лягчэй сабакі; 2) сабака лягчэй лісы: 3) ліса лягчэй ваўка.

Гэтым тром умовам адпавядае граф 1:

Граф 1



Граф 2



Улічваючы транзітыўнасць дачынення «лягчэй», дапаўняем граф стрэлкамі: са стрэлак 1 і 2 вынікае стрэлка 4, са стрэлак 2 і 3 – стрэлка 5, са стрэлак 1 і 5 (або 4 і 3) – стрэлка 6 (граф 2).

Дачыненне «лягчэй» – дачыненне строгага лінейнага парадку (кожныя два элементы звязаны гэтым дачыненнем – злучаны стрэлкай). Яно лінейна ўпарадкоўвае мноства A: лягчэй за ўсіх заяц (ад яго адыходзяць 3 стрэлкі і ні адна не ўваходзіць), затым ідзе сабака (адыходзяць 2 стрэлкі, адна ўваходзіць), ліса і воўк

З а д а н н і

65. Якія з дачыненняў (гл. заданне 48) з'яўляюцца дачыненнямі нястрогага парадку, строгага парадку, лінейнага парадку?

66. На мностве А = {3, 6, 9, 12, 15} зададзены дачыненні «*x* – дзельнік *y*» і «*x* больш *y*». Пабудуйце графы гэтых дачыненняў. Назавіце іх уласцівасці. Чым адрозніваюцца парадакі ў мностве *A*, якія ўстанаўліваюцца пры дапамозе гэтых дачыненняў?

67. Дакажыце, што мноства цэлых лікаў з'яўляецца лінейна ўпарадкаваным дачыненнем «менш».

68. Пабудуйце граф дачынення «быць старэйшым па ўзросту» на мностве дзяцей: Вольга (7 г.), Коля (8 г.), Толя (8 г.), Валя (9 г.), Света (7 г.), Пеця (10 г.). Ці з'яўляецца гэта дачыненне дачыненнем парадку?

69. Мноства *M* складаецца з членаў адной сям'і: маці Ніна Іванаўна (35 г.), бацька Аляксей Пятровіч (38 г.), сын Юра (12 г.), дочкі Каця (6 г.) і Надзя (10 г.). Якія з дачыненняў «быць старэйшым», «быць бацькам», «быць братам» упарадкоўваюць мноства М?

70. Рашыце задачы з дапамогай графаў:

а). Назавіце самы блізкі і самы далёкі ад Мінска абласны цэнтр, калі вядома, што Гомель далей ад Мінска, чым Гродна, але бліжэй, чым Брэст, Віцебск – далей, чым Магілёў, але бліжэй, чым Гродна.

б). Чатыры студэнты ўдзельнічалі ў спаборніцтвах. Вядома, што першы студэнт выйграў у чацвёртага, чацвёрты прайграў трэцяму, але выйграў у другога, першы прайграў трэцяму. Як размеркаваліся месцы?

в). Шэсць рабочых А, Б, В, Г, Д, Е атрымалі прэмію і раздзялілі яе так, што А атрымаў больш В, але менш, чым Д, Г атрымаў больш, чым Е, але менш, чым Б, Е атрымаў больш, чым Д. Хто з рабочых атрымаў найменшую прэмію, хто – найбольшую?

г). На нараду сабраліся 7 вайскоўцаў (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), сярод якіх былі генерал, палкоўнік, падпалкоўнік, маёр, капітан, лейтэнант і сяржант. Якое званне меў кожны вайсковец, калі 1 – старэйшы па званню 5, але малодшы 3, 6 – старэйшы 7, але малодшы 2, 5 – старэйшы 2 і 7 – старэйшы 4?

д). З лагера выйшлі 5 турыстаў: Вася, Галя, Толя, Лена, Міша. Толя ідзе ўперадзе Мішы, Лена – уперадзе Васі, але пасля Мішы, Галя – уперадзе Толі. Хто ідзе першым, хто апошнім?

е). У нашым лесе кожны займаецца сваёй справай і гэтай справе навучае іншых: адны плятуць кошыкі, другія ловяць рыбу. Вядома, што Кот навучыўся ад Выдры, Вожык – ад Зайца, Ліса – ад Ваўка, Мыш – ад Вожыка. Бабёр быў вучнем Мядзведзя, а Вожык – настаўнікам Дзятла. Лепш за ўсіх плёў кошыкі Вожык. Чым займаецца Заяц, Дзяцел, Воўк і Ліса? Хто раней за ўсіх навучыўся лавіць рыбу і хто – плесці кошыкі.

3. ФУНКЦЫЯ

3.1. Лікавая функцыя

Функцыя – гэта такая адпаведнасць паміж элементамі множстваў A і B, пры якой кожнаму элементу $x \in A$ адпавядае не больш аднаго элемента $y \in B$ (гл. п.1.1, п.1.2)

Функцыя называецца ***лікавай***, калі множствы A і B – лікавыя.

Абазначэнне: $f, g, h, \ldots$.

Множства $X \subseteq A$, <u>кожнаму</u> элементу якога ёсць <u>адзіны</u> адпаведнік у множстве В, называецца ***вобласцю вызначэння*** функцыі.

Лікавая функцыя апісвае залежнасць паміж велічынямі, пры якой, ведаючы лікавае значэнне адной велічыні, можна знайсці лікавае значэнне другой велічыні.

Пераменная $x \in X$ – ***незалежная*** пераменная або ***аргумент*** функцыі, y – ***залежная*** пераменная.

Значэнне пераменнай y, якое адпавядае зададзенаму значэнню пераменнай х, называецца ***значэннем*** функцыі. Запіс: $y = f(x)$.

Спосабы задання лікавых функцый: пры дапамозе адметнай уласцівасці, аналітычны (з дапамогай формулы), графічны, таблічны і інш. (гл. п. 1.1).

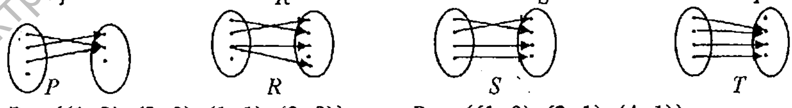
Прыклад 11. Знайсці вобласць вызначэння функцыі $y = \sqrt{x-3}$.

Рашэнне. Вобласцю вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца вобласць вызначэння выразу $\sqrt{x-3}$ – множства X сапраўдных значэнняў пераменнай x, пры якіх выраз $\sqrt{x-3}$ мае сэнс. Дадзены выраз мае сэнс, калі выраз $x-3$, што стаіць пад квадратным коранем, не з'яўляецца адмоўным: $x-3 \geq 0$; $x \geq 3$. Адказ: $X = [3; +\infty)$.

З а д а н н і

71. Якія з дадзеных адпаведнасцей з'яўляюцца функцыямі?

а) 

б) 

в) $P = \{(1, 2), (2, 0), (1, 1), (3, 0)\}$; $R = \{(1, 0), (3, 1), (4, 1)\}$.

72. Кожнаму натуральнаму ліку з прамежку [6, 20] пастаўлены ў адпаведнасць астатак, які атрымоўваецца пры дзяленні гэтага ліку на 4. Задайце гэтую адпаведнасць пры дапамозе табліцы і растлумачце, чаму яна з'яўляецца функцыяй. Назавіце вобласць вызначэння X і множства значэнняў Y функцыі.

73. Кожнаму ліку з мноства $X = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ пастаўлены ў адпаведнасць яго модуль. Пакажыце, што дадзеная залежнасць – функцыя. Пабудуйце графік. Задайце гэтую функцыю формулай. Назавіце вобласць вызначэння і мноства значэнняў функцыі. Пабудуйце графік гэтай функцыі, калі вобласць вызначэння $X = R$ – мноства сапраўдных лікаў.

74. Функцыя зададзена аналітычна: $f(x) = x^2 - x + 1$. Вобласцю вызначэння з'яўляецца мноства $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Знайдзіце вобласць значэнняў гэтай функцыі.

75. Знайдзіце вобласць вызначэння функцыі, зададзенай формулай:

а) $y = 5x - 3$; б) $y = 5x^2 + 7$; в) $y = \sqrt{4-x}$; г) $y = \sqrt{x^2+3}$; д) $y = |x-3|$;

е) $y = \frac{x+5}{3}$; ж) $y = \frac{x-5}{x+5}$; з) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x+5}$. і) $y = \frac{3}{x+5}$; к) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+5}}$.

76. Вылічыце значэнні $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ для функцый: а) $\frac{x-1}{x^2+3x+2}$; б) $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1}$; в) $\sqrt{x^3-4x}$; г) $\sqrt{-x}$.

77. Дакажыце, што графік функцыі $y = 4x^2 - 4$ праходзіць праз пункт $A(-0,5; -3)$ і не праходзіць праз пункт $B(1; -4)$.

78. Пабудуйце графікі адпаведнасцей. Укажыце сярод іх функцыі.

а) $y = x$, калі $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $X = [-2, 2]$;

б) $y = 2x^2$, калі $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $X = [-3, 2]$, $X = R$.;

в) $y = 1 - 3x$, калі $X = [-4, 3]$, $X = R$.;

г) $y = \begin{cases} 1, \text{калі } x \le 0; \\ 1 - x, \text{калі } x > 0; \end{cases}$ д) $y = \begin{cases} 1, \text{калі } -1 \le x < 0, \\ x^2, \text{калі } 0 \le x \le 1; \end{cases}$

е) $y = |x| - 2$; ж) $y = |x - 2|$;

з) $x^2 - y^2 = 0$, $X = R$.; і) $x^2 + y^2 = 0$, $X = R$.;

3.2. Лінейная функцыя

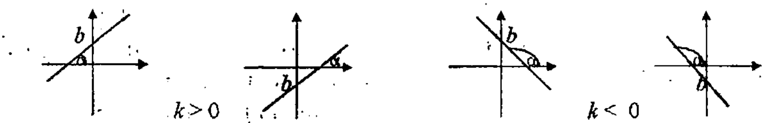
Функцыя, якую можна задаць пры дапамозе формулы $y = kx + b$, дзе k і b – лікавыя каэффіцыенты, называецца ***лінейнай*** функцыяй.

Вобласць вызначэння лінейнай функцыі – мноства сапраўдных лікаў: $X = R$.

Графік лінейнай функцыі – прамая лінія, палажэнне якой на плоскасці вызначаюць лікі k і b:

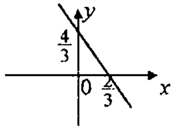
k – вуглавы каэффіцыент, вызначае вугал α паміж прамой і воссю OX,

b – ардыната пункта перасячэння прамой з воссю OY.



Прыклад 12. Пабудаваць графік функцыі $6x + 3y - 4 = 0$.

Рашэнне. Перш за ўсё пераўтворым дадзеную формулу, прывёўшы яе да выгляду $y = кx + b$: $3y = -6x + 4$, $y = -2x + \frac{4}{3}$. Каб пабудаваць прамую, дастаткова ведаць два пункты, праз якія яна праходзіць. Для дадзенай прамой адзін пункт вядомы: пункт на восі OY з ардынатай $\frac{4}{3}$. Вызначым яшчэ адзін пункт – пункт перасячэння прамой з воссю OX. Няхай $y = 0$, тады $0 = -2x + \frac{4}{3}$, $2x = \frac{4}{3}$, $x = \frac{2}{3}$. Другі пункт – $(\frac{2}{3}, 0)$. Графік функцыі выглядае так:



З а д а н н і

79. Знайдзіце каэфіцыенты k і b, калі функцыя зададзена формулай:
а) $x - 2y = -3$; б) $2x - 3y = 10$; в) $x - 3y = 0$;
г) $6x = 3y$; д) $3x + 6y + 12 = 0$; е) $3{,}5x - 0{,}5y + 2{,}5 = 0$.
Пабудуйце графікі функцый.

80. Якія з пунктаў $A(1, 4)$, $B(2, -3)$, $C(-2, 3)$, $D(3, -1)$, $E(-5, -17)$, $K(-1,-4)$ належаць прамой, зададзенай формулай $y = 2x - 7$?

81. Графік функцыі $y = 2x + b$ праходзіць праз пункт $A(1, 4)$. Ці пройдзе ён праз пункты $B(3, 8)$, $C(2, 7)$, $K(-1, 4)$?

82. Графік функцыі $y = kx + 5$ праходзіць праз пункт $A(-2, -3)$. Ці пройдзе ён праз пункты $B(11, 49)$, $C(12, 7)$, $K(-1, -4)$?

83. Залежнасць паміж масай y скрыні з дэталямі ад ліку дэталяў x выражаецца формулай $y = 0{,}3x + 1{,}5$. Вылічыце масу y скрыні з дэталямі пры дадзеных значэннях x. 10, 15, 20, 23. Аформіце ў выглядзе табліцы. Пабудуйце графік залежнасці. Якая маса адной дэталі?

84. Запішыце формулу, якая выражае залежнасць паміж часам руху і адлегласцю. Якую функцыю задае гэта формула? Назавіце вобласць вызначэння функцыі. Пабудуйце графік.

а) Да прывалу турысты прайшлі 12 км. Пасля прывалу яны ішлі t г са скорасцю 2,5 км/г. Якую адлегласць прайшлі турысты? Назавіце вобласць вызначэння, калі ўвесь пройдзены турыстамі шлях не перавышае 25 км?

б) Прайшоўшы ад станцыі 2 км, цягнік стаў рухацца са скорасцю 60 км/г. На якой адлегласці ад станцыі будзе цягнік праз t г раўнамернага руху? Назавіце вобласць вызначэння, калі цягнік прайшоў не больш 450 км?

в) З горада А ў горад В, адлегласць паміж якімі 285 км, выехаў аўтамабіль са скорасцю 70 км/г. На якой адлегласці ад горада В будзе аўтамабіль праз t г пасля яго выхаду з горада А?

3.3. Прамая і адваротная прапарцыянальнасць

Функцыя, якую можна задаць пры дапамозе формулы $y = kx$ $(k \neq 0)$, называецца ***прамой прапарцыянальнасцю*** (пераменныя x і y звязаны прама прапарцыянальнай залежнасцю або пераменная y прама прапарцыянальная пераменнай x).

Прамая прапарцыянальнасць – прыватны выпадак лінейнай функцыі $y = kx + b$ (пры $b = 0$).

Лік k – ***каэфіцыент прапарцыянальнасці,*** выражае адносіну значэння велічыні y да адпаведнага значэння велічыні x $(x \neq 0)$: $k = \dfrac{y}{x}$.

Графік прамой прапарцыянальнасці – прамая лінія, якая праходзіць праз пачатак каардынат.

Адметная ўласцівасць прамой прапарцыянальнасці: $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1}$ і $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$.

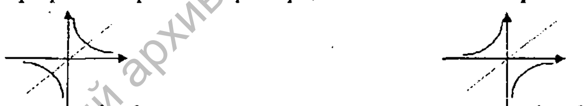
Калі x і y – дадатныя лікі, то асноўную ўласцівасць прамой прапарцыянальнасці можна сфармуляваць так: з ***павелічэннем*** (памяншэннем) значэння пераменнай x у некалькі разоў адпаведнае значэнне пераменнай y ***павялічваецца*** (памяншаецца) у столькі ж разоў.

Функцыя, якую можна задаць пры дапамозе формулы $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, называецца ***адваротнай прапарцыянальнасцю*** (пераменныя y і x звязаны адваротна прапарцыянальнай залежнасцю або пераменная y адваротна прапарцыянальная пераменнай x).

Лік k – ***каэфіцыент адваротнай прапарцыянальнасці,*** $k = yx$.

Вобласць вызначэння функцыі $y = \dfrac{k}{x}$ – мноства сапраўдных лікаў, акрамя нуля: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Графік адваротнай прапарцыянальнасці – ***гіпербала***.



$k > 0$ $\qquad\qquad$ $k < 0$

Прамая $x = 0$ – ***вертыкальная асімптота***, $y = 0$ – ***гарызантальная асімптота*** (графік функцыі $y = \dfrac{k}{x}$ не перасякае гэтых прамых, а толькі да іх набліжаецца). Графік сіметрычны адносна прамой $y = x$.

Адметная ўласцівасці адваротнай прапарцыянальнасці:

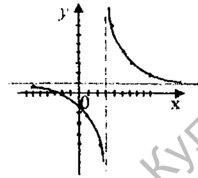
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2} \text{ і } \frac{y_1}{x_1} = \frac{x_2}{y_2}.$$

Калі x і y – дадатныя лікі, то асноўную ўласцівасць адваротнай прапарцыянальнасці можна сфармуляваць так: з ***павелічэннем*** (памяншэннем) значэння пераменнай x у некалькі разоў адпаведнае значэнне пераменнай y ***памяншаецца*** (павялічваецца) у столькі ж разоў.

Прыклад 13. Пабудаваць графік функцыі $y = \frac{6}{x-3} + 1$.

Рашэнне. Графік дадзенай функцыі – галіны гіпербалы. Пры $x = 3$ выраз $\frac{6}{x-3}$ не мае сэнсу, таму прамая $x = 3$ – вертыкальная асімптота. Гарызантальная асімптота – прамая $y = 1$. Для больш дакладнага вызначэння галін графіка вылічым некалькі пунктаў:

x	-6	-3	-2	0	1	2	3	4	5	6	9
y	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{5}$	-1	-2	-5	–	7	4	3	2



Прыклад 14. Рашыць задачу рознымі арыфметычнымі спосабамі, выдзеліўшы велічыні і залежнасці паміж імі.

Для 16 кароў на 35 дзён патрэбна 6,72 т сена. Колькі сена спатрэбіцца для 8 кароў на 7 дзён, калі норма выдачы сена на адну карову не зменіцца?

Рашэнне. Выдзелім велічыні, аб якіх ідзе размова ў задачы, і прадставім умову задачы ў выглядзе табліцы:

Расход сена на 1 карову за 1 дзень	Колькасць кароў	Колькасць дзён	Маса сена
Аднолькавы	16	35	6,72 т = 6720 кг
	8	7	?

Маса сена прама прапарцыянальна дзвюм велічыням: колькасці дзён і колькасці кароў. Пры рашэнні задачы будзем выкарыстоўваць уласцівасць прамой прапарцыянальнасці: пры памяншэнні адной велічыні ў некалькі разоў другая таксама памяншаецца ў столькі ж разоў. Магчымы розныя спосабы рашэння задачы..

С п о с а б 1. Рашэнне афармім як працяг табліцы:

	Колькасць кароў	Колькасць дзён	Маса сена
	16	35	6720 кг
1	16:2 = 8	35	6720:2 = 3360 (кг)
2	8	35:5 = 7	3360:5 = 672 (кг)

С п о с а б 2.

1) 35 : 7 = 5 (разоў) – у столькі разоў паменшылася колькасць дзён
2) 6720 : 5 = 1344 (кг) – столькі сена патрэбна для 16 кароў на 7 дзён
3) 16 : 8 = 2 (разы) – у столькі разоў паменшылася колькасць кароў
4) 1342 : 2 = 672 (кг) – столькі сена спатрэбіцца для 8 кароў на 7 дзён

С п о с а б 3.

1) 35 : 7 = 5 (разоў) 2) 16 : 8 = 2 (разы)
3) 5·2 = 10 (разоў) 4) 6720:10 = 672 (кг).

З а д а н н і

85. Функцыі зададзены таблічным спосабам. Укажыце сярод іх прамыя і адваротныя прапарцыянальнасці:

а)

X	2	4	6
y	14	28	42

б)

X	1	2	3
$У$	0,2	0,4	0,6

в)

x	1	2	4
y	20	10	5

г)

x	2	3	8
y	12	8	3

д)

X	-2	-4	6
$У$	6	3	-2

е)

x	1	2	3
y	-3	-2	-9

86. Пабудуйце графікі функцый і параўнайце іх:

а) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = 3x$; г) $y = 6x$;

д) $y = -3x$; д) $y = \frac{1}{3}x$; е) $y = -\frac{1}{3}x$; ж) $y = -\frac{1}{6}x$.

87. Пабудуйце графік функцыі $y = \frac{12}{x}$, калі:

а) $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; б) $X = [1, 6]$; в) $X = R_+$; г) $X = R$..

88. Пабудуйце графікі функцый:

а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{2}{x}$; в) $y = \frac{4}{x}$; г) $yx = -6$; д) $y = -\frac{2}{x+1}$;

е) $y = \frac{4}{x-2}$; ж) $y = \frac{2}{x}+1$; з) $y = \frac{4}{x}-2$; і) $y = \frac{4}{x-2}+2$; к) $y = \frac{4}{x-2}-3$.

89. Рашыце задачы рознымі арыфметычнымі спосабамі:

а) Для пашыву 6 палатак патрэбна 120 м брызенту шырынёй 1,2 м. Колькі метраў брызенту шырынёй 1,5 м спатрэбіцца каб пашыць 4 такія самыя палаткі?

б) Для 8 коней прыгатавалі запас аўса на 6 дзён. На колькі дзён хопіць гэтага аўса 16 коням?

в) З 1200 кг цукровых буракоў можна атрымаць 180 кг цукру. Колькі цукру можна атрымаць з 30 т цукровых буракоў?

г) У 4 кг лугавога сена ўтрымліваецца столькі ж пажыўных рэчываў, колькі ў 2,5 кг канюшыны. Колькі трэба канюшыны, каб замяніць ёй выдачу сена на працягу 90 дзён па 16 кг у дзень?

д) Тры трактары на ворыве зрасходуюць за 1 г 33 л паліва. Колькі гадзін змогуць працаваць на ворыве 8 такіх трактараў, калі запас паліва роўны 352 л?

е) З 24 кг малака атрымліваецца 3 кг смятанкі, з 20 кг смятанкі – 4 кг сметанковага масла, а з 12 кг сметанковага масла – 9 кг топленага масла. Колькі кілаграмаў топленага масла можна атрымаць з 2400 кг малака?

ж) Для 16 кароў на 35 дзён патрэбна 6,72 т сена. Колькі сена спатрэбіцца для 20 кароў на 40 дзён, калі норма выдачы сена на адну карову не зменіцца?

з) Тры курыцы за 3 дні нясуць 3 яйкі. Колькі яек знясуць 12 курыц за 12 дзён?

ЗМЕСТ