МАТЕМАТИКА

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Могилев 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А. А. КУЛЕШОВА»

МАТЕМАТИКА:
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Учебно-методические материалы

Составители:
Т. В. Гостевич, Л. А. Латотин,
Л. В. Лещенко, В. В. Николаева

Могилев 2014

УДК 510.6 (075.8)
ББК 22.12я73
М34

Печатается по решению редакционно-издательского совета МГУ имени А. А. Кулешова

Рецензенты:

кандидат педагогических наук, доцент,
ректор «Могилевского государственного областного института развития образования» *И. А. Старовойтова;*

кандидат физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений
МГУ имени А. А. Кулешова
Б. Д. Чеботаревский

М34 **Математика: элементы математической логики** : учебно-методические материалы / составители: Т. В. Гостевич [и др.]. — Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2014. — 48 с. : ил.

Учебно-методические материалы по математике содержат теоретические сведения, наборы задач для аудиторных и домашних заданий, тесты по следующим темам: высказывания, предикаты, рассуждения. Для некоторых заданий приведены образцы решения и оформления. Издание может быть также использовано для организации самостоятельной работы студентов.

УДК 510.6 (075.8)
ББК 22.12я73

Тема 1. Высказывания

1.1 Высказывание. Операции над высказываниями

Высказыванием называется предложение, содержащее два или более понятий, выражающее утверждение или отрицание и обладающее определенным значением истинности: истина (И) или ложь (Л).

Простым является высказывание, которое содержит только одно утверждение или отрицание.

Составным является высказывание, которое состоит из двух или более простых высказываний, соединенных между собой логическими связками.

Составные высказывания получаются из простых (P, Q, R, S, T,…) при помощи следующих операций: конъюнкция ($P \wedge Q$, в русском языке выражается словами *и, а, но*), дизъюнкция ($P \vee Q$, в русском языке выражается словами *или, либо*), альтернатива ($P \dot{\vee} Q$, в русском языке выражается словами *или..., или; либо..., либо*), импликация ($P \supset Q$, в русском языке выражается словами *если..., то*), эквиваленция ($P \sim Q$, в русском языке выражается словами *если и только если*), отрицание ($\rceil P$, в русском языке выражается словами *не; неверно, что*).

Определения этих операций можно записать в виде **таблицы истинности,** в которой для **каждого** набора значений истинности простых высказываний задается соответствующее значение истинности составного высказывания.

P	$\rceil P$
И	Л
Л	И

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \dot{\vee} Q$	$P \supset Q$	$P \sim Q$
И	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	Л	И	И

Пример 1. Проведем логический анализ высказывания и запишем соответствующую формулу: *Если мы летом ни в Минск не поедем, ни в горы не отправимся, то мы ежедневно будем ходить на пляж или будем дома читать книги.*

Решение. Это составное высказывание. Выделим в нем простые:

P: *Мы летом поедем в Минск;*

Q: *Мы летом отправимся в горы;*

R: *Мы ежедневно будем ходить на пляж;*

S: *Мы будем дома читать книги.*

С учетом введенных обозначений высказывание будет выглядеть так:

«***Если не** P **и не** Q, **то** R **или** S*». Заменяя логические связки (союзы) знаками операций, которые они выражают, получаем формулу: $(\neg P \wedge \neg Q) \supset (R \vee S)$. Можно сказать, что данной формулой задается ***логическая структура*** составного высказывания.

Установлена следующая последовательность выполнения логических операций в формулах, не содержащих скобки:

$$\neg, \wedge, \vee, \dot{\vee}, \supset, \sim.$$

Пример 2. Составим таблицу истинности для составного высказывания, логическая структура которого записывается формулой $\neg A \wedge \neg B \supset C$.

Решение. Это составное высказываниye образовано из трех высказываний (A, B, C) при помощи логических операций отрицания, конъюнкции и импликации. Каждое из высказываний может принимать значение И либо Л. Поэтому всех возможных вариантов будет: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$. Значит, таблица истинности будет насчитывать 8 строк. Таблицу будем составлять постепенно, с учетом порядка выполнения логических операций.

	A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge \neg B \supset C$
1	И	И	И	Л	Л	Л	И
2	И	И	Л	Л	Л	Л	И
3	И	Л	И	Л	И	Л	И
4	И	Л	Л	Л	И	Л	И
5	Л	И	И	И	Л	Л	И
6	Л	И	Л	И	Л	Л	И
7	Л	Л	И	И	И	И	И
8	Л	Л	Л	И	И	И	Л

Из таблицы истинности видим, что составное высказывание, имеющее логическую структуру $\neg A \wedge \neg B \supset C$, ложно только в одном случае, когда все высказывания A, B и C одновременно ложны (последняя строка).

Одну и ту же структуру могут иметь разные высказывания. Например, структуру $\neg A \wedge \neg B \supset C$ имеют высказывания: «Если студент не слушал лекции и не выполнял контрольные работы, то у него могут быть проблемы с зачетом» и «Студент успешно сдаст экзамен, если не будет пропускать занятия и на них не будет заниматься посторонними делами».

Задания

1. Определите, какие из следующих выражений русского языка отражают высказывание истинное либо ложное:

а) Весной прилетают грачи.

б) Молодежный танцевальный ансамбль.

в) Некоторые треугольники не являются разносторонними.

г) Представителей каких народов можно встретить в Древнем Риме?

д) Был ли Наполеон французским императором?

е) Собака громко лает.

ж) Громко лающая собака.

з) При беде за деньгу не стой! (Пословица)

и) Тихая мелодия, раздающаяся в ночной тишине.

к) Нет покою ни днем, ни ночью.

л) Безукоризненно чистые вещи, но кричаще дурного вкуса.

м) Ребята, давайте жить дружно!

2. Даны высказывания:

Данное число делится на 2 (P);

Данное число делится на 6 (Q);

Данное число делится на 3 (R);

Данное число однозначное (S).

Сформулируйте составные высказывания, которые соответствуют формуле:

а) $\rceil Q$; б) $P \wedge Q$; в) $R \vee S$; г) $\rceil S \supset \rceil P$;

д) $Q \sim P \wedge Q$; е) $R \wedge Q \supset S$; ж) $\rceil Q \sim \rceil P \vee \rceil R$; з) $Q \vee \rceil(R \wedge P)$.

3. Сформулируйте и запишите в виде конъюнкции или дизъюнкции условие, при котором истинно высказывание:

а) $a \cdot b = 0$; б) $a^2 + b^2 = 0$; в) $a : b = 0$.

4. Запишите логическую структуру высказывания:

а) Была без радостей любовь, разлука будет без печали. (М.Ю. Лермонтов).

б) Он сейчас находится в Минске или Санкт-Петербурге.

в) Неправда, что он готовился к зачёту и может его сдавать.

г) К рассмотрению темы «Предикат» нельзя приступать, если не разобрался с темой «Высказывание».

д) Каждый из нас знает книгу или хотя бы имя М. Ю. Лермонтова.

е) Луна сияла, июльская ночь была тиха, изредка подымался ветерок, и легкий шорох пробегал по всему лесу (А. С. Пушкин).

ж) Будет хорошая погода, но мы не отправимся в путешествие, или не будет хорошей погоды, а мы отправимся в путешествие.

з) Студент не получит стипендию и не поедет домой тогда и только тогда, когда он получит неудовлетворительную оценку на экзамене по одному из предметов.

и) Если я устал или голоден, то не могу заниматься.

к) Кто хочет что-нибудь сделать — находит средства, кто не хочет ничего делать — находит оправдания.

л) Если я намереваюсь поехать в деревню тогда и только тогда, когда я сдам экзамен, то если я не сдам экзамен, то я останусь в городе.

м) Пушкин в карты не играл, а если и играл, то без всяких фокусов (М. Булгаков).

н) Что неясно представляешь, то неясно и высказываешь; неточность и запутанность выражений свидетельствует только о запутанности мыслей (Н. Г. Чернышевский).

о) Четырехугольник не является паралелограммом, и он является трапецией тогда и только тогда, когда две его противоположные стороны параллельны.

п) Я намереваюсь поехать на дачу в том и только в том случае, если я успешно сдам экзамен, поэтому, если я не сдам экзамен, то останусь в городе.

р) Квадрат — это четырехугольник, у которого все углы прямые и смежные стороны равны.

5. Учитывая, что переменные X, Y, P выражают высказывания «Число 24 четное»; «Число 24 делится на 3»; «Неверно, что число 24 нечетное и не делится на 3» соответственно:

а) определите логическую структуру высказывания P;

б) составьте таблицу истинности для полученной формулы;

в) упростите формулу с учетом таблицы истинности;

г) переформулируйте высказывание P в более простой форме;

д) подберите такие высказывания X и Y, чтобы высказывание той же логической структуры, что и P, было ложным.

6. Составьте таблицу истинности для формулы $\rceil(\rceil X \vee \rceil Y)$. Упростите эту формулу. Подберите высказывания X и Y так, чтобы получилось: а) истинное высказывание; б) ложное высказывание.

7. Определите значения истинности сформулированных высказываний из задания **2** для чисел 2, 15, 12, 35.

8. Определите значение истинности формулы A, учитывая, что:

а) $A \wedge B =$ Л, $B =$ И;

б) $A \vee B =$ И, $B =$ Л;

в) $A \dot{\vee} B =$ И; $B =$ И;

г) $A \supset B =$ И, $B =$ Л;

д) $A \sim B =$ *И*, $B =$ Л;

е) $A \dot{\vee} B =$ И, $B =$ И.

9. Учитывая, что $A =$ И, найдите значение истинности формулы:

а) $A \wedge (A \vee B)$; б) $(B \supset A) \supset A$; в) $\rceil A \supset (\rceil A \wedge B)$;

г) $A \sim \rceil A$; д) $\rceil A \vee (\rceil A \wedge B)$; е) $\rceil A \supset B \dot{\vee} C$;

ж) $\rceil A \wedge B \supset C$; з) $B \wedge C \supset A \vee C$.

10. а) Известно, что $A \wedge B =$ И. Что можно сказать о значениях истинности высказываний $A \vee B$, $A \dot{\vee} B$, $A \supset B$, $A \sim B$?

б) Известно, что $A \sim B =$ Л. Что можно сказать о значениях истинности высказываний $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \dot{\vee} B$, $A \supset B$?

в) Известно, что $A \supset B$ = Л. Что можно сказать о значениях истинности высказываний $A \wedge B, A \vee B, A \dot\vee B, A \supset B, A \sim B$?

г) Известно, что $A \vee B$ = Л. Что можно сказать о значениях истинности высказываний $A \wedge B$, $A \dot\vee B, A \supset B, A \sim B$?

д) Известно, что $A \dot\vee B$ = И. Что можно сказать о значениях истинности высказываний $A \wedge B, A \vee B, A \dot\vee B, A \sim B$?

е) Известно, что $A \sim B$ = И. Что можно сказать о значениях истинности высказываний $(\rceil A \wedge B) \sim (A \vee \rceil B), A \sim \rceil B$?

11. Определите значение истинности высказываний: A, B, C, D, E, F, если:

а) $A \wedge B$ = И и B = «В слове *стол* 4 звука»;

б) $A \wedge B$ = И и A = «Вода в море пресная»;

в) $D \vee C$ = Л и D = «Слово *пальто* склоняется»;

г) $D \dot\vee C$ = Л и C = «При 0° С вода замерзает»;

д) $E \supset F$ = И и F = «Медь хорошо проводит электрический ток»;

е) $E \sim F$ = И и E = «Синус любого угла < 1».

12. Укажите, достаточно ли приведенных сведений для того, чтобы найти значение истинности формулы:

а) $(A \supset B) \supset \underset{\text{И}}{C}$;

б) $\rceil(A \vee \underset{\text{И}}{B}) \sim \rceil A \wedge \rceil B$;

в) $A \wedge (B \supset \underset{\text{И}}{C})$;

г) $(A \supset \underset{\text{И}}{B}) \supset (\rceil B \supset \rceil A)$;

д) $A \vee (\underset{\text{И}}{B} \supset C)$;

е) $A \vee \underset{\text{И}}{B} \supset B \wedge \underset{\text{Л}}{C}$;

ж) $A \wedge \underset{\text{Л}}{B} \supset C \supset A \wedge B$;

з) $A \sim \underset{\text{Л}}{B} \vee A$.

13. Учитывая, что A = И, B = Л, C = И, D = Л, найдите значение истинности формулы:

а) $A \wedge (B \vee C)$;

б) $A \supset (B \dot\vee C)$;

в) $(A \sim \rceil B) \wedge \rceil(C \vee D)$;

г) $C \wedge \rceil D \sim A \supset B$;

д) $A \wedge B \supset (C \sim \rceil A \vee \rceil D)$;

е) $\rceil(A \wedge C) \supset B \dot\vee \rceil D$.

14. Найдите значение истинности формулы:

а) $\rceil(A \dot\vee A)$;

б) $\rceil A \sim A$;

в) $\rceil A \vee (A \wedge A) \vee B$;

г) $\rceil(A \vee B) \sim \rceil A \wedge \rceil B \vee C$;

д) $\rceil A \vee A \supset \rceil A \wedge A$;

е) $B \supset A \vee \rceil A$;

ж) $\rceil A \vee B \sim (A \sim B)$;

з) $A \wedge B \supset B \wedge A$.

15. Постройте таблицу истинности для каждой из формул, в задании а) **12**, б) **13**.

Пример 3. Решим уравнение $\rceil A \wedge \rceil B \supset C$ = Л.

Решение. Учитывая определение импликации, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \neg A \wedge \neg B = И, \\ C = Л. \end{cases}$$

С учетом определения конъюнкции получим, что:

$$\begin{cases} \neg A = И, \\ \neg B = И, \\ C = Л. \end{cases}$$

Ответ: $(A, B, C) = $ (Л, Л, Л).

Замечание. Уравнение $\neg A \wedge \neg B \supset C = Л$ имеет единственное решение $(A, B, C) = $ (Л, Л, Л) для остальных 7 наборов значений переменных A, B, C формула имеет значение И. Это соответствует результату, полученному при решении примера **2**.

16. Решите уравнение:

1) $(\neg A \supset A) \supset A = Л$;
2) $(\neg A \supset B \wedge \neg B) \supset A = И$;
3) $A \wedge B \supset C \sim A \supset (B \supset C) = И$;
4) $(A \supset B) \vee (A \supset C) = И$;
5) $(A \vee B \supset B) \wedge (A \supset B) = И$;
6) $A \sim A \vee B = И$;
7) $(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B) = Л$;
8) $A \wedge B \vee (B \supset A) \vee (A \sim C) = Л$;
9) $A \wedge B \vee (A \supset B) \vee (A \sim C) = Л$;
10) $(A \vee B) \wedge \neg B \supset \neg A = И$;
11) $A \wedge \neg(\neg B \supset C) = И$;
12) $A \wedge B \wedge C \supset \neg A \vee B \vee \neg C = Л$;
13) $\neg A \supset \neg(A \supset B) = A \vee \neg B$;
14) $A \sim B \vee \neg A = B \supset A$;
15) $A \supset (B \supset C) = A \wedge C \supset \neg B$.

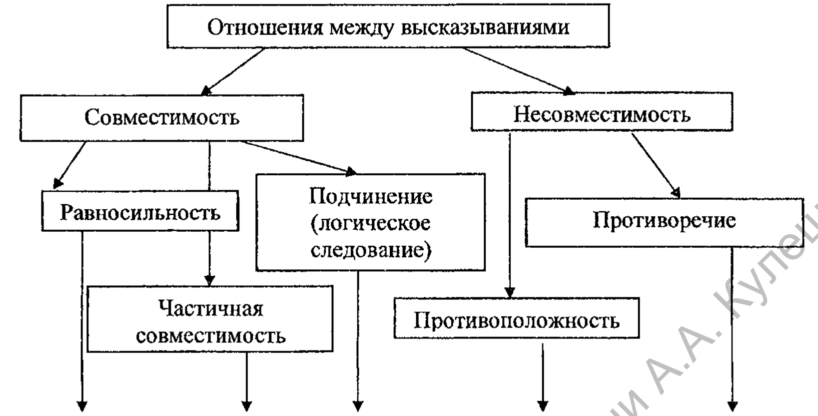
1.2 Отношения между высказываниями

Отношения можно установить между сравнимыми высказываниями.

Сравнимыми высказываниями называются составные высказывания, содержащие одинаковые простые высказывания и, возможно, отличающиеся логическими связками.

Несравнимыми высказываниями называются составные высказывания, отличающиеся частично или полностью простыми высказываниями.

Вид отношения между высказываниями (простыми и составными) можно определить при помощи таблиц истинности.



A	B
И	И
~~И~~	~~Л~~
~~Л~~	~~И~~
Л	Л

A	B
И	И
И	Л
Л	И
~~Л~~	~~Л~~

A	B
И	И
~~И~~	~~Л~~
Л	И
Л	Л

A	B
~~И~~	~~И~~
И	Л
Л	И
Л	Л

A	B
~~И~~	~~И~~
И	Л
Л	И
~~Л~~	~~Л~~

Основные равносильности

1) $\neg\neg A \equiv A;$
2) $A \wedge B \equiv B \wedge A;$
3) $A \vee B \equiv B \vee A;$
4) $A \dot{\vee} B \equiv B \dot{\vee} A;$
5) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C;$
6) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C;$
7) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C);$
8) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C);$
9) $A \supset B \equiv \neg A \vee B;$
10) $A \supset B \equiv \neg(A \wedge \neg B);$
11) $A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A;$
12) $A \sim B \equiv (A \supset B) \wedge (B \supset A);$
13) $A \dot{\vee} B \equiv \neg(A \sim B);$
14) $A \sim B \equiv \neg(A \dot{\vee} B);$
15) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B;$
16) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B;$
17) $A \wedge A \equiv A;$
18) $A \vee A \equiv A;$
19) $A \wedge$ И $\equiv A;$
20) $A \vee$ И $\equiv$ И;
21) $A \wedge \neg A \equiv$ Л;
22) $A \vee \neg A \equiv$ И;
23) $A \vee$ Л $\equiv A;$
24) $A \wedge$ Л $\equiv$ Л.

Основные логические следования (правила вывода)

1) $A \wedge B \Rightarrow A$ — правило удаления конъюнкции;
2) $A \wedge B \Rightarrow B$ — правило удаления конъюнкции;
3) $A, B \Rightarrow A \wedge B$ — правило введения конъюнкции;
4) $A \Rightarrow A \vee B$ — правило введения дизъюнкции;

5) $B \Rightarrow A \vee B$ — правило введения дизъюнкции;
6) $A \sim B \Rightarrow A \supset B$ — правило удаления эквиваленции;
7) $A \sim B \Rightarrow B \supset A$ — правило удаления эквиваленции;
8) $A \supset B,\ B \supset A \Rightarrow A \sim B$ — правило введения эквиваленции;
9) $A \supset B, A \Rightarrow B$ — правило отделения;
10) $A \supset B, \rceil B \Rightarrow \rceil A$ — правило отрицания;
11) $A \supset B, B \supset C \Rightarrow A \supset C$ — правило силлогизма;
12) $A \vee B, \rceil A \Rightarrow B$ — правило удаления дизъюнкции;
13) $A \vee B, \rceil B \Rightarrow A$ — правило удаления дизъюнкции;
14) $A \dot{\vee} B, \rceil A \Rightarrow B$ — правило удаления альтернативы;
15) $A \dot{\vee} B, \rceil B \Rightarrow A$ — правило удаления альтернативы;
16) $A \dot{\vee} B, A \Rightarrow \rceil B$ — правило удаления альтернативы;
17) $A \dot{\vee} B, B \Rightarrow \rceil A$ — правило удаления альтернативы;
18) $A \supset B, C \supset D, A \vee C \Rightarrow B \vee D$ — конструктивная дилемма;
19) $A \supset B, C \supset D, \rceil B \vee \rceil D \Rightarrow \rceil A \vee \rceil C$ — деструктивная дилемма;
20) $\forall x\, (A(x) \supset B(x)), A(a) \Rightarrow B(a)$;
21) $\forall x\, (A(x) \supset B(x)), \rceil B(a) \Rightarrow \rceil A(a)$.

Пример 4. Установим отношение между высказываниями, заданными формулами

$$F_1 = A \sim (\rceil B \vee \rceil C) \quad \text{и} \quad F_2 = A \vee \rceil (B \wedge C).$$

Решение. Для определения вида отношения между высказываниями F_1 и F_2, построим их таблицы истинности.

	A	B	C	$\rceil B$	$\rceil C$	$\rceil B \vee \rceil C$	$A \sim (\rceil B \vee \rceil C)$	$B \wedge C$	$\rceil(B \wedge C)$	$A \vee \rceil(B \wedge C)$
1	И	И	И	Л	Л	Л	Л	И	Л	И
2	И	И	Л	Л	И	И	И	Л	И	И
3	И	Л	И	И	Л	И	И	Л	И	И
4	И	Л	Л	И	И	И	И	Л	И	И
5	Л	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
6	Л	И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И
7	Л	Л	И	И	Л	И	Л	Л	И	И
8	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И	И
							F_1			F_2

Видим, что (F_1, F_2) = (Л, И) в строках 1, 6, 7, 8, (F_1, F_2) = (И, И) в строках 2, 3, 4, (F_1, F_2) = (И, Л) в строке 5.

F_1	F_2
Л	И
И	И
И	Л

Поскольку есть строки, где $(F_1, F_2) = $ (И, И), то эти высказывания совместимы. Определим вид совместимости.

Высказывания F_1 и F_2 находятся в отношении частичной совместимости, так как нет такого набора значений высказываний A, B, C, при котором $(F_1, F_2) =$ (Л, Л).

Пример 5. С помощью равносильных преобразований доказать равносильность: $\rceil((A \supset B) \wedge (B \supset \rceil A)) \equiv A$.

Решение. Равносильные преобразования формулы в левой части будем проводить, используя основные равносильности:

$$\rceil((A \supset B) \wedge (B \supset \rceil A)) \overset{9}{\equiv} \rceil((\rceil A \vee B) \wedge (\rceil B \vee \rceil A)) \overset{3}{\equiv} \rceil((\rceil A \vee B) \wedge (\rceil A \vee \rceil B)) \overset{8}{\equiv}$$
$$\overset{8}{\equiv} \rceil(\rceil A \vee (B \wedge \rceil B) \overset{21}{\equiv} \rceil(\rceil A \vee \text{Л}) \overset{23}{\equiv} \rceil\rceil A \overset{1}{\equiv} A.$$

Пример 6. Установить, правильно ли логическое следование

$$\underset{\text{Посылка 1}}{B \wedge C \supset A}, \quad \underset{\text{Посылка 2}}{\rceil B} \quad \Rightarrow \quad \underset{\text{Заключение}}{\rceil A}.$$

Решение. Правильность логического следования проверим двумя способами.

а) Построим общую таблицу истинности для посылок и заключения:

	A	B	C	$B \wedge C$	$B \wedge C \supset A$	$\rceil B$	$\rceil A$
1	И	И	И	И	И	Л	Л
2	И	И	Л	Л	И	Л	Л
3	И	Л	И	Л	И	И	Л
4	И	Л	Л	Л	И	И	Л
5	Л	И	И	И	Л	Л	И
6	Л	И	Л	Л	И	Л	И
7	Л	Л	И	Л	И	И	И
8	Л	Л	Л	Л	И	И	И
					Пос. 1	Пос. 2	Закл.

Выделим в таблице те строки, в которых обе посылки одновременно истинны (строки 3, 4, 7, 8). Определим значение истинности заключения в выделенных строках. Из таблицы видно, что есть такие наборы значений истинности высказываний A, B и C, при которых обе посылки одновременно истинны, а заключение ложно (строки 3, 4).

Значит, логическое следование неправильное.

б) Предположим, что логическое следование неправильное. Это означает, что существует хотя бы один набор значений истинности высказываний A, B и C, при котором все посылки истинны, а заключение ложно. Решаем систему:

$\begin{cases} B \wedge C \supset A = \text{И}, \\ \neg B = \text{И}, \\ \neg A = \text{Л}; \end{cases}$ $\begin{cases} B \wedge C \supset A = \text{И}, \\ B = \text{Л}, \\ A = \text{И}; \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Л} \wedge C \supset \text{И} = \text{И}, \\ B = \text{Л}, \\ A = \text{И}. \end{cases}$

Равенство Л $\wedge$ C $\supset$ И = И верно при C = И и при C = Л.

Таким образом, есть два набора значений (A, B, C) = (И, Л, И) и (A, B, C) = (И, Л, Л), при которых обе посылки истинны, а заключение ложно. Противоречия не получили.

Предположение верное, поэтому логическое следование неправильное.

Задания

17. Установите, являются ли сравнимыми высказывания, имеющие логическую структуру:

а) A и B; б) $A \wedge B$ и $A \vee B$; в) $A \supset B$ и $C \supset D$;
г) A и $A \wedge B \wedge C$; д) $\rceil A \wedge \rceil B$ и $\rceil A \wedge \rceil C$; е) $A \vee B \vee C$ и $B \vee C$.

18. С помощью таблиц истинности установите вид отношения между высказываниями:

а) $A \vee B$ и $\rceil A \supset B$; д) $A \supset B$ и $A \vee B$;
б) $A \vee B$ и $A \sim B$; е) $A \wedge B$ и $A \vee B$;
в) $A \sim B$ и $A \supset B$; ж) $A \wedge \rceil B$ и $A \supset B$;
г) $A \wedge B$ и $\rceil(A \vee B)$; з) $A \wedge B$ и $(\rceil A \vee \rceil B)$.

19. Определите вид отношения между высказываниями:

а) если будет хорошая погода, то мы отправимся в путешествие; не будет хорошей погоды или мы не отправимся в путешествие;

б) я тогда и только тогда иду в кино, когда не читаю книгу; либо я иду в кино, либо я читаю книгу;

в) если нет учебников, то по этой теме надо прочитать лекцию, если есть учебники, то можно организовать самостоятельную работу;

по теме не надо читать лекцию или организовывать самостоятельную работу в том и только том случае, если есть учебники;

г) если число делится на 6 и не делится на 5, то оно не делится на 30; число делится на 30 либо неверно, что число делится на 6 или на 5;

д) если четырехугольник — не прямоугольник, то он параллелограмм и его углы непрямые;

этот четырехугольник — прямоугольник либо неверно, что если он параллелограмм, то его углы прямые;

е) четырехугольник является ромбом равносильно тому, что если четырехугольник — параллелограмм, то его смежные углы равны;

либо четырехугольник — ромб, либо неверно, что он — параллелограмм и его смежные стороны не равны;

ж) я не пропустил ни одного занятия, и у меня не будет трудностей со сдачей зачета в том и только в том случае, если все контрольные работы будут написаны хорошо;

я пропустил занятия, или неверно, что, если все контрольные работы написаны хорошо, то у меня не будет трудностей со сдачей зачета.

20. Установите отношения между высказываниями:

а) если число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3;

б) если число не делится на 6, то оно не делится на 2 и не делится на 3;

в) если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6;

г) число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3.

д) если число не делится на 2 либо не делится на 3, то оно не делится на 6.

21. С помощью таблиц истинности и методом равносильных преобразований докажите равносильность:

а) $A \vee B \equiv \rceil(\rceil A \wedge \rceil B)$;

б) $A \wedge B \vee A \wedge \rceil B \equiv A$;

в) $A \supset (B \supset C) \equiv B \supset (A \supset C)$;

г) $A \wedge (B \vee A) \equiv \rceil A \wedge B$.

22. Упростите высказывание:

а) $((A \vee B) \wedge A) \vee A$;

б) $(A \supset B) \wedge (B \supset A) \wedge (A \sim B)$;

в) $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \vee A$;

г) $A \wedge B \vee A \wedge \rceil B$;

д) $(A \vee B) \wedge A \wedge (A \vee \rceil B)$;

е) $\rceil A \supset (\rceil A \supset A)$.

23. Установите, являются ли равносильными высказывания:

а) сын работает на заводе, а дочь учится в школе;

неверно, что сын не работает на заводе или дочь не учится в школе;

б) если слово стоит в начале предложения, то оно пишется с большой буквы;

неверно, что слово стоит в начале предложения и при этом не пишется с большой буквы;

в) если число заканчивается четной цифрой, то оно делится на 2;

если число не делится на 2, то оно не заканчивается четной цифрой;

г) если слова являются однородными членами предложения, то они относятся к одному слову в предложении и отвечают на одинаковые вопросы;

если слова не являются однородными членами предложения, то они не относятся к одному слову и не отвечают на одинаковые вопросы;

д) четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали точкой пересечения делятся пополам;

когда четырехугольник — параллелограмм, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам;

е) число является четным тогда и только тогда, когда оно делится на 2;

когда число четное, то оно делится на 2, а если число нечетное, то оно не делится на 2.

24. Родители сказали детям:

— Если мы поедем в дом отдыха, то вы поедете в спортивный лагерь.

В школе у детей спросили, куда они поедут летом.

— Если мы поедем в лагерь, то родители поедут в дом отдыха, — ответил Витя.

Галя сказала:

— Если мама и папа не поедут в дом отдыха, то мы не поедем в лагерь.

— Нет, неправда, — сказал Коля. — Если мы не поедем в лагерь, то родители не поедут в дом отдыха.

Установите:

а) чей ответ равносилен тому, что сказали родители;

б) кто из детей сказал разными словами одно и то же.

25. Используя равносильные преобразования, отредактируйте текст так, чтобы он стал более коротким:

а) неверно, что если каждое слагаемое в сумме не делится на данное число, то и сумма на него не делится;

б) создание обобщающих работ по истории литературы возможно, если изучено творчество каждого писателя по отдельности, и невозможно, если творчество каждого писателя по отдельности не изучено;

в) если ученику не известны вопросы, которые ему зададут на экзамене, и он не заучивает ответы, то неверно, что хороший учитель не гордится своим учеником;

г) если слово является существительным, то оно имеет значение предметности, а если слово не имеет значения предметности, то оно не является существительным;

д) если он легкомысленный, то он беззаботный и веселый, и неверно, что, если он беззаботный и веселый, то он не легкомысленный;

е) я занимаюсь плаванием или волейболом, но, если я не занимаюсь плаванием, то занимаюсь волейболом.

26. Установите, правильно ли логическое следование:

а) $A \supset B, B \Rightarrow A$; б) $A \supset B \Rightarrow \urcorner B \supset \urcorner A$;

в) $A \supset B \Rightarrow B \supset A$; г) $A \supset B, \urcorner A \Rightarrow \urcorner B$;

д) $\urcorner(A \vee B) \Rightarrow \urcorner A \vee \urcorner B$; е) $A \wedge B \supset C \Rightarrow A \wedge \urcorner C \supset B$.

27. Установите, следует ли из данных посылок заключение:

	Посылки	Заключение
а)	1. Если число оканчивается нулем, то оно делится на 5. 2. Число делится на 5.	Число оканчивается нулем.
б)	1. Если фигура — параллелограмм, то она — четырехугольник. 2. Если фигура — ромб, то она — четырехугольник.	Если фигура — ромб, то она — параллелограмм.
в)	1. Если целое число больше 1, то оно простое или составное. 2. Если целое число больше 2, то оно больше 1. 3. Если целое число больше 2 и четное, то оно не является простым.	Если целое число больше 2 и четное, то оно составное.

г)	1. Если идет снег, то тяжело вести машину. 3. Если машину тяжело вести, то я опоздаю или совсем не приеду. 3. Идет снег.	Я опоздаю.
д)	1. Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны и делят угол пополам, то этот параллелограмм — ромб. 2. У данного параллелограмма диагонали взаимно перпендикулярны и не делят угол пополам.	Этот параллелограмм не является ромбом.
е)	1. Если посылки истинны и рассуждение правильное, то заключение истинно. 2. Заключение истинно.	Посылки ложны или рассуждение неправильное.

28. Определите, следует ли высказывание «*Данное число — простое*» из высказывания:

а) данное число оканчивается цифрой 7 и простое;

б) данное число оканчивается цифрой 7 либо простое;

в) если данное число оканчивается цифрой 7, то оно простое;

г) данное число простое тогда и только тогда, когда оно оканчивается цифрой 7;

д) если число оканчивается цифрой 7, то оно простое, а данное число оканчивается цифрой 7;

е) данное число не оканчивается цифрой 7, либо оно простое, но оканчивается цифрой 7.

29. Верно ли, что из высказывания «*Данное число простое тогда и только тогда, когда оно оканчивается цифрой 7*» следует высказывание:

а) если данное число оканчивается цифрой 7, то оно простое;

б) либо данное число оканчивается цифрой 7, либо оно простое;

в) если данное число не оканчивается цифрой 7, то оно не является простым;

г) данное число оканчивается цифрой 7 и простое;

д) данное число оканчивается цифрой 7 и является простым или не оканчивается цифрой 7 и не является простым.

30. Установите, являются ли равносильными высказывания в паре:

а) если на улице не идет дождь, то асфальт немокрый и автобус движется с большой скоростью;

если автобус движется с большой скоростью, то на улице нет дождя или
асфальт немокрый;

б) если на улице идет дождь, то асфальт мокрый и автобус движется с небольшой скоростью;

на улице идет дождь или неверно, что если асфальт мокрый, то автобус
движется с большой скоростью;

в) если на улице не идет дождь, то асфальт немокрый и автобус движется с большой скоростью;

на улице идет дождь и асфальт мокрый, но автобус движется с большой скоростью;

г) если асфальт немокрый и автобус движется с большой скоростью, то на улице не идет дождь;

неверно, что на улице идет дождь и асфальт мокрый тогда и только тогда, когда автобус движется с большой скоростью;

д) если на улице не идет дождь и асфальт немокрый, то автобус движется с большой скоростью;

на улице не идет дождь или асфальт немокрый и автобус движется с большой скоростью.

31. Один из трех братьев поставил на скатерть кляксу.

— Витя не ставил кляксу, — сказал Алеша. — Это сделал Боря.

— Ну, а ты что скажешь? — спросила бабушка Борю.

— Это Витя поставил кляксу, сказал Боря. — А Алеша не пачкал скатерть.

— Я знаю, что Боря не мог это сделать. А я сегодня не готовил уроки, — сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух случаев сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

32. Один из четырех мальчиков испортил выключатель. На вопрос: «Кто это сделал?» — были получены такие ответы: а) это сделал или Миша, или Коля; б) это сделал или Витя, или Коля; в) это не могли сделать ни Толя, ни Миша; г) это сделал или Витя, или Миша. Можно ли по этим данным установить, кто виновен в поломке выключателя, если из четырех высказываний три высказывания истинны?

33. При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали следующие пожелания: математик просил поставить ему или первый, или второй урок; историк — или первый, или третий; учитель литературы — или второй, или третий. Как составить расписание уроков, чтобы учесть все пожелания?

ТЕСТ

1. Укажите, какие из следующих предложений являются высказываниями:

а) 6 кратно 2;

б) число x — двузначное;

в) назовите столицу Республики Беларусь;

г) какой остаток получится при делении 42 на 5?;

2. Укажите, какие из следующих предложений являются высказываниями:

а) является ли число 8 корнем уравнения $24 - 3x = 0$?;

б) $x > 5$;

в) прямые a и b параллельны;

г) $2^3 > 3^5$.

3. Укажите, какие из следующих предложений являются высказываниями:

а) при делении 49 на 9 образуется остаток 4;

б) является ли число 7 корнем уравнения $21 - 3x = 0$?;

в) углы α и β равны;

г) решите неравенство $6 \cdot (2x + 7) < 12 \cdot (x + 4)$.

4. Укажите истинные высказывания:

а) если 18 делится на 6, то 18 делится на 3;

б) если 9 делится на 3, то 9 делится на 6;

в) 15 делится на 3 тогда и только тогда, когда 15 делится на 2;

г) если 18 делится на 2, то 18 делится на 4.

5. Укажите истинные высказывания:

а) если четырехугольник *ABCD* (рис. 1) — квадрат, то четырехугольник *ABCD* (рис. 1) — прямоугольник;

б) не в каждом прямоугольнике диагонали равны;

в) квадрат — это четырехугольник, у которого все стороны равны;

г) если в четырехугольнике *ABCD* (рис. 2) диагонали равны, то четырехугольник *ABCD* (рис. 2) является квадратом.

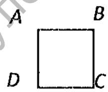


Рис. 1

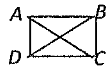


Рис. 2

6. Укажите формулу, которая отражает логическую структуру высказывания: «Неверно, что число 21 четное и не делится на 3».

а) $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$;

б) $\neg P \wedge \neg Q$;

в) $\neg(P \wedge \neg Q)$;

г) $\neg P \vee \neg Q$.

7. Укажите формулу, которая отражает логическую структуру высказывания: «Если число целое и положительное, то оно натуральное».

А) $P \wedge Q \supset R$;

б) $P \vee Q \supset R$;

в) $P \wedge Q \sim R$;

г) $R \supset P \wedge Q$;

8. Укажите формулу, которая отражает логическую структуру высказывания: «Неверно, что треугольник *ABC* прямоугольный или равнобедренный».

а) $\neg(P \wedge Q)$;

б) $P \wedge Q$;

в) $\neg(P \vee Q)$;

г) $P \vee Q$.

9. Укажите высказывания, логическая структура которых записывается формулой $P \sim Q \wedge R$:

а) число делится на 15 тогда и только тогда, когда число делится на 3 и на 5;

б) если число делится на 5, то число делится на 15;

в) если число делится на 5 или на 3, то число делится на 15;

г) число не делится на 15 тогда и только тогда, когда число не делится на 3 и не делится на 5.

10. Укажите высказывания, логическая структура которых записывается формулой $P \wedge Q \supset R$:

а) a делится на c и b делится на c тогда и только тогда, когда $a + b$ делится на c;

б) если a делится на c и b делится на c, то $a + b$ делится на c;

в) $a + b$ делится на c тогда и только тогда, когда a делится на c или b делится на c;

г) если a делится на c или b делится на c, то $a + b$ делится на c.

11. Укажите последовательности символов, являющиеся формулами:

а) $(AB \supset C) \wedge A$;

б) $(A \vee B \supset C) \vee A$;

в) $(A \supset C)) \wedge A$;

г) $(AB) \supset C$.

12. Укажите последовательность символов, являющиеся формулами:

а) $(C \supset B \wedge A$

б) $(C \supset \neg B) \wedge A$

в) $((C \supset \neg B) A \supset C$;

г) $C \vee A \vee)$.

13. Укажите верные утверждения:

а) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$;

б) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \wedge \neg B$;

в) $\neg(A \wedge B) \equiv A \vee B$;

г) $\neg A \vee \neg B \equiv \neg(A \vee B)$.

14. Укажите верные утверждения:

а) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \vee \neg B$;

б) $\neg A \wedge \neg B \equiv \neg(A \vee B)$;

в) $A \wedge B \equiv \neg(A \vee B)$;

г) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \vee B$.

Тема 2. Предикаты

2.1 Предикат. Области, связанные с предикатом

Функция, которая сопоставляет с каждым набором значений переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$ истинное или ложное высказывание, является ***n*-местным предикатом** $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

В зависимости от количества переменных предикат может быть одноместным, двуместным, … , n-местным.

С предикатом связаны 4 множества (области):

1) D — **предметная область** — множество, из которого принимает значения каждая из переменных $x_1, x_2,..., x_n$.

2) D^n — **область определения** — множество всех n-ок вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где a_1 — значение переменной x_1, a_2 — значение переменной x_2, $\ldots$, a_n — значение переменной x_n, n — количество переменных.

3) E — **область истинности** — множество, являющееся подмножеством области определения, на котором предикат превращается в истинное высказывание.

4) {И, Л} — **область значений.**

Пример 7. Учитывая, что предметной областью является множество $\{1; 3; 6; 7\}$, указать все области, связанные с предикатом:

а) $R(x)$: $x > 3$,

б) $P(x, y)$: x делится на y.

Решение. а) Этот предикат — одноместный, поэтому область определения совпадает с предметной областью $D^1 = D = \{1; 3; 6; 7\}$.

Выделим из области определения те числа, при которых предикат $x > 3$ обращается в истинное высказывание. Получаем, что область истинности E предиката есть множество $\{6; 7\}$.

Область значений предиката есть множество {И, Л}.

б) Этот предикат — двуместный. Область определения состоит из пар: $D^2 = \{(1; 1), (1; 3), (1; 6), (1; 7), (3; 1), (3; 3), (3; 6), (3; 7), (6; 1), (6; 3), (6; 6), (6; 7), (7; 1), (7; 3), (7; 6), (7; 7)\}$.

Выделим из области определения те пары (x, y) чисел, у которых первый компонент x делится на второй — компонент y. Получим, что $E = \{(1; 1), (3; 1), (3; 3), (6; 1), (6; 3), (6; 6), (7; 1), (7; 7)\}$ — область истинности предиката.

Область значений предиката — множество {И, Л}.

34. Укажите, чем — высказыванием или предикатом — является предложение:

а) Волга впадает в Черное море;

б) в городе N более 100 000 жителей;

в) ты пойдешь в кино?;

г) $y^2 > 2$;

д) неверно, что подснежники появляются весной не первыми;

е) звезда x указывает на север;

ж) в четырехугольнике противоположные стороны равны;

з) в каждом четырехугольнике противоположные стороны равны;

и) количество слов в предложении равно 7;

к) $3 < 2$;

л) существуют инопланетные цивилизации;

м) какая красивая картина!;

н) математика — интересный предмет;
о) студент x учится в группе y;
п) $x^2 + y^2 < 0$.

35. На множестве геометрических фигур задан предикат $A(x)$: «Фигура x — многоугольник». Прочитайте высказывание и определите его значение истинности:

а) A (треугольник); б) A (трапеция); в) A (квадрат);
г) A (семиугольник); д) A (окружность); е) A (луч).

36. Запишите область определения и область истинности предиката:

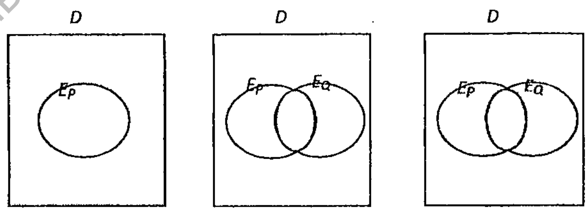
а) «x — делитель числа 24», $D = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
б) «x — дерево», D ={малина, дуб, роза, ясень, клен};
в) «В слове x букв больше, чем в слове y»;
D = {малина, дуб, роза, ясень, клен};
г) «Город x расположен на запад от города y»;
D ={Минск, Брест, Варшава, Смоленск};
д) «Число x на 4 больше числа y», $D = \{0, 1, 2, 4, 6\}$;
е) «$x + y = z$», $D = \{10, 20, 30\}$.

37. Учитывая, что $D = \boldsymbol{R}$, записью и рисунком на координатной прямой укажите область истинности предиката:

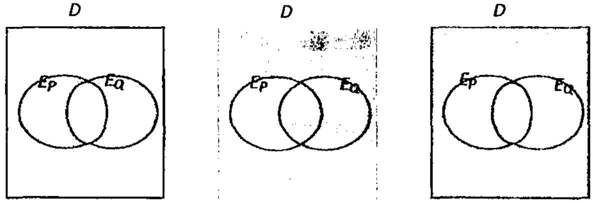
а) $x \le 3$; б) $x = 1$; в) $0 \le x \le 5$;
г) $x = -4$; д) $|x| \le 2$; е) $|x| > 0$.

2.2 Операции над предикатами

Первую группу операций над предикатами образуют те же операции, что и над высказываниями. Эти операции не изменяют количество переменных в предикатах. Если рассматривать операции над одноместными предикатами, то в результате их получим составные предикаты: $\neg P(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \dot{\vee} Q(x)$, $P(x) \supset Q(x)$, $P(x) \sim Q(x)$. Области истинности составных предикатов изображены на диаграммах.



$E_{\neg P}$ $E_{P \wedge Q}$ $E_{P \vee Q}$



$E_{P \dot{\vee} Q}$ $E_{P \supset Q}$ $E_{P \sim Q}$

Во вторую группу входят операции над предикатами, которые уменьшают количество переменных или превращают предикат в высказывание. Это **навешивание кванторов и подстановка.**

$\forall$ — квантор общности (выражается в русском языке словами *все*, *каждый* и др.);

$\exists$ — квантор существования (выражается в русском языке словами *некоторые*, *существует*, *хотя бы один* и др.).

Переменные, на которые навешены кванторы, называются ***связанными*** переменными, а переменные, на которые не навешены кванторы, — ***свободными*** переменными.

Пример 8. Покажем на диаграмме Венна область истинности предиката: $F(x) = (A(x) \sim \neg B(x)) \wedge C(x)$.

Решение. Область истинности составного предиката можно найти двумя способами:

Способ 1. Построим таблицу истинности для $F(x)$.

	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$	$\neg B(x)$	$A(x) \sim \neg B(x)$	$(A(x) \sim \neg B(x)) \wedge C(x)$
1	И	И	И	Л	Л	Л
2	И	И	Л	Л	Л	Л
3	И	Л	И	И	И	И
4	И	Л	Л	И	И	Л
5	Л	И	И	Л	И	И
6	Л	И	Л	Л	И	Л
7	Л	Л	И	И	Л	Л
8	Л	Л	Л	И	Л	Л

Выбираем в этой таблице те строки, в которых $F(x)$ = И. Это строки 3 и 5. Находим соответствующие значения предикатов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ в этих строках:

$A(x)$ = И, $B(x)$ = Л, $C(x)$ = И (строка 3);

$A(x)$ = Л, $B(x)$ = И, $C(x)$ = И (строка 5);

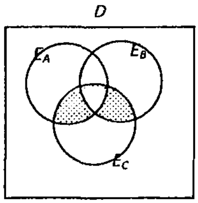
Область истинности $F(x)$ покажем на диаграмме Венна.

Пусть E_A — область истинности $A(x)$;

E_B — область истинности $B(x)$;

E_C — область истинности $C(x)$.

Будем считать в общем случае, что области истинности предикатов $A(x)$, $B(x)$, и $C(x)$ взаимно пересекаются. Получаем:



Заштрихованная область — область истинности предиката $F(x) = (A(x) \sim \neg B(x)) \wedge C(x)$.

Способ 2. Найдем условия, при которых предикат $F(x)$ превращается в истинное высказывание. Иначе говоря, решим логическое уравнение: $(A(x) \sim \neg B(x)) \wedge C(x) = И$. Используя определения тех логических операций, с помощью которых образован предикат $F(x)$, получаем:

$$\begin{cases} A(x) \sim \neg B(x) = И, \\ A(x) = И; \end{cases} \quad \begin{cases} A(x) = И, \\ \neg B(x) = И, \\ C(x) = И \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A(x) = Л, \\ \neg B(x) = Л, \\ C(x) = И; \end{cases} \quad \begin{cases} A(x) = И, \\ B(x) = Л, \\ C(x) = И \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A(x) = Л, \\ B(x) = И, \\ C(x) = И. \end{cases}$$

Получили два решения, которые совпадают со строками 3 и 5 таблицы истинности и соответствуют построенной диаграмме.

Задания

38. Покажите на диаграмме Венна отношения между областями истинности заданных предикатов на указанных предметных областях D. Покажите место нахождения названных элементов из D:

1) $P(x)$: x делится на 3.
$Q(x)$: x делится на 5.
$D = N$.
Числа: 15, 30, 9, 10, 70.

2) $P(x)$: x — человек;
$Q(x)$: x — имеет возраст;
D — множество живых существ;
Элементы: лев, старик, ребенок, ёж.

3) $P(x)$: x — умеет летать;
$Q(x)$: x — птица;
D_1 — множество предметов; (D_1 — множество живых существ);
Элементы: вертолет, птица, страус.

4) $P(x)$: x — круглая фигура;
$Q(x)$: x — большая фигура;
$R(x)$: x — зеленая фигура;
D — множество фигур.
Элементы:
круглая большая зеленая фигура;
круглая большая незеленая фигура;
круглая небольшая зеленая фигура;
некруглая большая зеленая фигура;
круглая небольшая незеленая фигура;
некруглая большая незеленая фигура;
некруглая небольшая зеленая фигура;
некруглая небольшая незеленая фигура.
5) $P(x)$: x делится на 3;
$Q(x)$: x делится на 15;
$R(x)$: x — делится на 2;
$D = N$
Числа: 6, 30, 4, 8, 15, 60.

39. Учитывая, что предикаты $P(x)$: «*Число x является корнем уравнения* $x^2 - 3x + 2 = 0$»; $Q(x)$: «*Число x делится на 3*»; $R(x)$: «*Число x простое*» заданы на множестве $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$:

а) найдите E_P, E_Q, E_R;

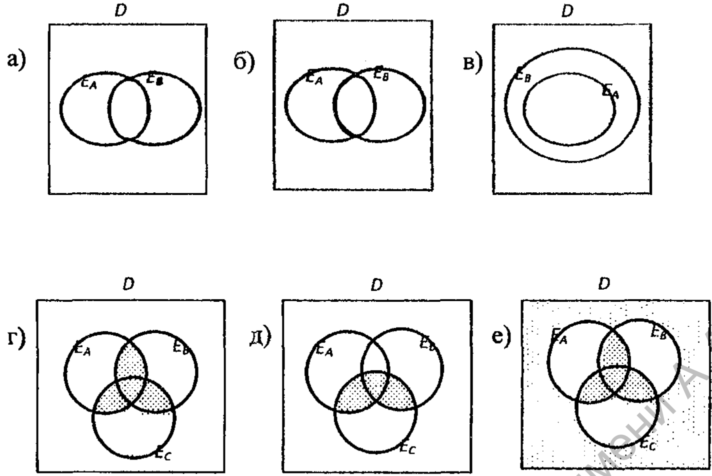
б) образуйте предикаты: $\neg R(x)$; $P(x) \wedge Q(x)$; $P(x) \vee \neg R(x)$; $Q(x) \supset R(x)$;

в) найдите область истинности каждого из образованных предикатов и покажите ее на диаграмме.

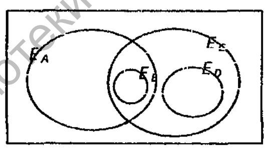
40. Отметьте штриховкой на диаграмме Венна область истинности предиката:

а) $\neg A(x) \vee B(x)$;
б) $A(x) \supset \neg B(x)$;
в) $\neg(A(x) \sim \neg B(x))$;
г) $A(x) \wedge \neg B(x)$;
д) $\neg(A(x) \dot\vee \neg B(x))$;
е) $A(x) \vee B(x) \vee C(x)$;
ж) $A(x) \vee B(x) \vee C(x)$;
з) $A(x) \vee \neg B(x) \vee \neg C(x)$;
с) $A(x) \wedge (B(x) \supset C(x)) \sim A(x) \vee \neg C(x)$;
у) $A(x) \sim B(x) \wedge C(x) \wedge A(x)$;
и) $\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee \neg C(x)$;
к) $A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)$;
л) $A(x) \wedge \neg B(x) \wedge C(x)$;
м) $\neg A(x) \wedge \neg B(x) \wedge C(x)$;
н) $\neg A(x) \wedge \neg B(x) \wedge \neg C(x)$;
о) $\neg A(x) \vee B(x) \supset \neg C(x)$;
п) $A(x) \sim \neg B(x) \wedge \neg C(x)$;
р) $\neg(A(x) \dot\vee \neg B(x)) \supset C(x)$;
т) $A(x) \supset B(x) \vee C(x) \wedge \neg B(x)$;
ф) $(A(x) \sim \neg B(x)) \wedge C(x)$.

41. Запишите предикат, области истинности которого соответствуют диаграмме:



42. Учитывая, что области истинности предикатов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ изображены на рисунке, укажите штриховкой область истинности предиката:



а) $A(x) \wedge B(x)$;
б) $B(x) \vee \rceil C(x)$;
в) $\rceil(A(x) \wedge C(x))$;
г) $A(x) \wedge C(x) \vee D(x)$;
д) $D(x) \vee A(x) \wedge \rceil C(x)$.

43. Учитывая, что предикаты $P(x)$: «$x \leq 8$», $Q(x)$: «$x > 5$» заданы на множестве $\boldsymbol{R}$, сформулируйте и найдите область истинности:
а) конъюнкции этих предикатов;
б) дизъюнкции этих предикатов;
в) отрицания дизъюнкции этих предикатов;
г) отрицания конъюнкции этих предикатов.

44. Учитывая, что предикат $P(x)$: «x — четное число» задан на множестве $D=\{1; 2; 3\}$, укажите, что обозначает запись:
а) $\forall x\, P(x)$; б) $\exists x\, P(x)$.

45. Укажите свободные и связанные вхождения переменных в формуле:
а) $\forall z\, \forall x\, (A(x, y) \supset B(z, x))$; в) $\forall x\, (A(x, y) \supset \rceil B(x, y))$;
б) $\forall x\, A(x) \wedge \forall y\, \mathrm{B}(y)$; г) $\forall x\, (A(x, y) \supset \forall y\, A(x, y))$.

46. Учитывая, что
$P(x)$: «*x — простое число*»;
$Q(x)$: «*x — четное число*»;
$C(x, y)$: «*число y делитель числа x*».

Переведите на обычный язык формулу:

а) $P(7) \vee Q(7)$; в) $\forall x\,(R(x, 2) \supset Q(x))$;

б) $\forall x\,(\neg Q(x) \wedge \neg R(x, 2))$; г) $\exists x\,(R(6, x) \wedge P(x) \wedge Q(x))$.

47. Запишите формулой и определите значение истинности высказывания:

а) некоторые числа являются решением уравнения $x^2 + 1 = 0$;

б) каким бы ни было число z, $z + 0 = z$;

в) квадрат любого числа неотрицателен;

г) есть число, большее своего квадрата;

д) для любых чисел a и b, $b \cdot a = a \cdot b$;

е) для всех чисел a и b, $b - a = a - b$;

ж) для любых чисел x и y найдется число z, которое является их суммой;

з) существует число z, которое является суммой любых чисел x и y;

и) существуют такие числа x и y, что любое число z больше их разности на 5;

к) любое число либо положительное, либо отрицательное, либо равно нулю.

48. Даны высказывания:

«Каждую задачу решил хотя бы один ученик» и

«Хотя бы один ученик решил каждую задачу».

Запишите эти предложения в символичном виде и определите, одинаковый ли смысл имеют эти предложения.

2.3 Отрицание предикатов, содержащих кванторы

Правило построения отрицания предложения, содержащего кванторы:

чтобы построить отрицание предложения с кванторами, достаточно квантор существования (общности) заменить квантором общности (существования) и взять отрицание предиката, стоящего после квантора.

В частности, $\neg(\forall x\, A(x)) \equiv \exists x\, \neg A(x)$,

$\neg(\exists x\, A(x)) \equiv \forall x\, \neg A(x)$.

Пример 9. Образуем отрицание высказывания «Для любых двух чисел a и b существует число c, которое на 2 больше произведения чисел a и b».

Решение. Запишем данное высказывание формулой:

$$\forall a\, \forall b\, \exists c\, (a \cdot b = c - 2)$$

В структуру данного высказывания входят кванторы общности и существования, которые навешены на переменные a, b, c, и логическая функция $A(a, b, c)$: «Число c на 2 больше произведения чисел a и b». По правилу построения отрицания, содержащего кванторы, получим:

$$\neg(\forall a\, \forall b\, \exists c\, (a \cdot b = c - 2)) \equiv \exists a\, \exists b\, \forall c\, (a \cdot b \neq c - 2).$$

Высказывание «Существуют числа a и b такие, что любое число c не больше на 2 произведения a и b» является отрицанием первоначального.

49. Являются ли отрицаниями друг друга высказывания в следующих парах:

а) никто не знает этого человека;
все знают этого человека;

б) всякая хищная птица имеет короткий сильный клюв;
некоторые хищные птицы не имеют короткого сильного клюва;

в) некоторые четырехугольники не являются трапециями;
некоторые четырехугольники являются трапециями;

г) некоторые книги содержат стилистические ошибки;
ни одна книга не содержит стилистических ошибок.

50. Образуйте отрицание высказывания:

а) все города Беларуси расположены к югу от городов Эстонии;

б) некоторые животные — млекопитающие;

в) никто не имеет права нарушать правила дорожного движения;

г) по крайней мере одно из чисел 10, 11, 12 делится на 12;

д) существует книга, которую вы прочитали;

е) у каждого человека есть хотя бы один друг;

ж) в любом треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей;

з) для любого числа a существуют такие числа b и c, что их разность в 3 раза больше числа a.

51. Запишите высказывание в утвердительной форме:

а) не все умеют играть в шахматы;

б) не найдется слова, которое начинается с буквы «й»;

в) ни одна птица не выводит птенцов зимой;

г) не существует реки более полноводной, чем Волга;

д) каждый участник экспедиции знал свои обязанности, но не каждый верил в ее успех;

е) не все то, что современное, вечное, но то, что вечное, — всегда современное.

2.4 Отношения между предикатами

Между предикатами имеются те же отношения, что и между высказываниями, а именно: равносильность, логическое следование, частичная совместимость, противоречие, противоположность.

Рассмотрим те из них, которые наиболее часто встречаются в математике: **логическое следование и равносильность.**

Из предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **следует** предикат $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда нет ни одного набора значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из области определения предикатов, при которых $P(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ обращается в истинное высказывание, а $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — в ложное.

Обозначение: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для следования предикатов выполняется следующее **утверждение:**

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $E_P \subseteq E_Q$.

Из предикатов-посылок $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следует предикат-заключение $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда нет ни одного такого набора значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в общей области определения предикатов, что все посылки одновременно превращаются в истинные высказывания, а заключение — в ложное.

Обозначение: $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда пересечение областей истинности всех посылок включается в область истинности заключения.

Все логические следования, которые были правильными для высказываний (1—19), остаются правильными для предикатов.

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **равносилен** предикату $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда

$P((x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и

$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Обозначение: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Предикаты равносильны тогда и только тогда, когда их области истинности совпадают

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $E_P = E_Q$.

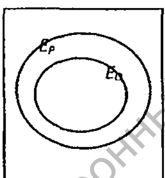
Для предикатов выполняются все те же равносильности, что и для высказываний (1—24).

Пример 10. Установим отношение между предикатами:

$P(x)$: «*Треугольник равнобедренный*»;

$Q(x)$: «*Треугольник равносторонний*».

D



$E_Q \subset E_P$

Рис. 3

Решение. Предметная область D данных предикатов — множество всех треугольников. Область истинности предиката $P(x)$ — множество равнобедренных треугольников, область истинности предиката $Q(x)$ — множество равносторонних треугольников. Отношение между этими множествами на диаграмме Венна выглядит так (рис. 3).

Получили, что $E_Q \subset E_P$.

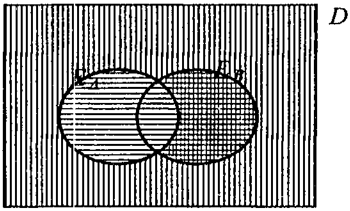
Используя утверждение «$A(x) \Rightarrow B(x)$ тогда и только тогда, когда $E_A \subseteq E_B$» получаем, что $Q(x) \Rightarrow P(x)$. Сформулируем это: Из того, что треугольник x — равносторонний, следует, что он равнобедренный.

Пример 11. Докажем следование: $A(x) \vee B(x), \neg A(x) \Rightarrow B(x)$.

Решение. 1) На одной диаграмме Венна показываем области истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$;

2) изображаем области истинности посылок, находим их пересечение;

3) проверяем, является ли оно подмножеством области истинности заключения.



$\equiv\ E_{A \vee B}$

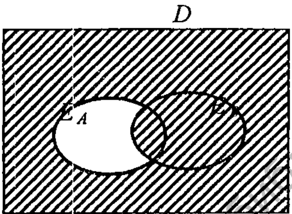
$|||\ E_{\rceil A}$

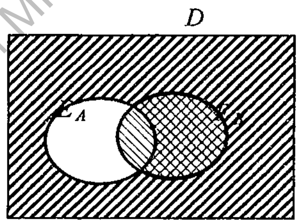
Так как пересечение областей истинности посылок включается в область истинности заключения, то данное следование правильное.

Пример 12. Докажем равносильность предикатов:

$A(x) \supset B(x) \equiv \rceil A(x) \vee B(x)$

Решение. На разных диаграммах Венна покажем область истинности предикатов, записанных в левой и правой частях равносильности, а потом их сравним.





Так как области истинности предикатов совпали, то эти предикаты равносильны.

Задания

52. На указанном множестве установите отношение между предикатами:

а) $P(x)$: «Четырехугольник x — квадрат»;
$Q(x)$: «Четырехугольник x — ромб»;
D — множество четырехугольников;

б) $P(x)$: «Число x — положительное»;
$Q(x)$: «Число x — натуральное»;
$D = \boldsymbol{R}$;

в) $P(x)$: «Человек x живет в Беларуси»;
$Q(x)$: «Человек x — белорус»;
D — множество людей;

г) $P(x, y)$: «Прямые x и y лежат в одной плоскости»;
$Q(x, y)$: «Прямые x и y — параллельные»;
D — множество прямых;

д) $P(x)$: «Число x делится на 3»;
$Q(x)$: «Сумма цифр числа x делится на 3»;
$D = N$;

е) $P(x)$: «Город x находится в Беларуси»;
$Q(x)$: «Город x находится в Европе»;
D — множество городов;

ж) $P(x)$: «Треугольник x равноугольный»;
$Q(x)$: «Треугольник x равносторонний»;
D — множество треугольников.

53. Установите, следует ли из предиката $x^2 - 2x = 0$ предикат:

а) $x = 0$; г) $x = 0 \wedge x - 2 = 0$;
б) $x - 2 = 0$; д) $x^2 - 2x = 0 \vee x - 3 = 0$;
в) $x = 0 \vee x - 2 = 0$; е) $(x^2 - 2x)(x - 3) = 0$.

54. Определите, является ли истинным высказывание с кванторами:

а) из того, что углы A и B вертикальные, следует, что они равны;

б) из того, что углы A и B равны, следует, что они вертикальные;

в) из того, что сумма углов A и B равна 180°, следует, что углы A и B смежные;

г) из того, что угол B — тупой, следует, что $\angle B > 90^\circ$;

д) из того, что $x > 2$, следует, что $x > 5$;

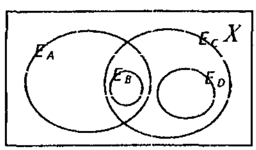
е) из того, что x делится на 4, следует, что это число четное;

ж) из того, что сумма чисел делится на 9, следует, что каждое слагаемое делится на 9;

з) из того, что высказывания A и B совместимы, следует, что высказывания A и B равносильны.

55. Используя утверждения, связывающие следование и равносильность предикатов с отношениями между их областями истинности, докажите основные равносильности и основные логические следования, приведенные на с. 9—10, (считайте, что A, B, C, D обозначают одноместные предикаты $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ соответственно).

56. Множества истинности E_A, E_B, E_C, E_D предикатов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ соответственно, определенных на множестве X, изображены на рисунке. Назовите предикаты, находящиеся в отношении логического следования.



57. На множестве Z заданы предикаты: P (x): «$x^2 = 1$», Q (x): «$x^2 < 2$», R (x): «$|x| \leq 1$», S (x): «$|x| \leq 1$». Определите, какие из этих предикатов: а) логическим следуют из других; б) равносильны. Ответ обоснуйте.

58. Установите, равносильны ли предикаты:

а) $S(x)$: «$x \in A \cup B$» и $E(x)$: «$x \in A \vee x \in B$»;

б) $S(x)$: «$x \in A \cap B$» и $E(x)$: «$x \in A \wedge x \in B$»;

в) $S(x)$: «$x \in A \cap B$» и $E(x)$: «$x \in A \vee x \in B$»;

г) $S(x)$: «$x \in A \setminus B$» и $E(x)$: «$x \in A \vee x \in B$»;

д) $S(x)$: «$x \in A \cap (B \cup C)$» и $E(x)$: «$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$»;

е) $S(x)$: «$x \in [a; b]$» и $E(x)$: «$x > a \wedge x < b$»;

ж) $S(x)$: «$|x| < 4$» и $E(x)$: «$x > -4 \vee x < 4$».

2.5 Необходимые и достаточные условия

Отношения равносильности и следования позволяют уточнить смысл слов «необходимо» и «достаточно», которые часто употребляются в математике.

В таблице указан перевод предложений с русского языка на язык логики, (A и B в этой таблице могут обозначать как высказывания, так и предикаты).

Предложения на русском языке	Запись на языке логики
1. A достаточное условие для B	$A(x) \Rightarrow B(x)$
2. B необходимое условие для A	$\rceil B(x) \Rightarrow \rceil A(x)$
3. A необходимое и достаточное условие для B	$A(x) \equiv B(x)$
4. B необходимое и достаточное условие для A	$A(x) \Rightarrow B(x)$ и $B(x) \Rightarrow A(x)$
5. A необходимое условие для B, но недостаточное условие	$B(x) \Rightarrow A(x)$ и $A(x) \nRightarrow B(x)$
6. A достаточное условие для B, но не необходимое условие	$A(x) \Rightarrow B(x)$ и $B(x) \nRightarrow A(x)$

Пример 13. Сформулировать в виде необходимого или достаточного условия отношения между предикатами:

$P(x, y)$: данные углы смежные;

$Q(x, y)$: сумма данных углов равна 180°;

Решение. Построим два логических следования

$P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$ и $Q(x, y) \Rightarrow P(x, y)$ и определим их правильность.

$P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$: из того, что углы смежные следует, что их сумма равна 180°.

Очевидно, что это следование правильное, потому что сумма смежных углов обязательно равна 180° (невозможно, чтобы углы были смежными, но их сумма не равна 180°).

$Q(x, y) \Rightarrow P(x, y)$: Из того, что сумма углов равна 180°, следует, что эти углы смежные.

Это следование неправильное: углы, сумма которых равна 180°, могут быть и несмежными.

Имеем: $P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$ — правильное следование и $Q(x, y) \Rightarrow P(x, y)$ — неправильное следование.

Поэтому:

Смежность углов является достаточным, но не необходимым условием равенства их суммы 180°.

Равенство суммы углов 180° является необходимым, но не достаточным условием их смежности.

Это можно сформулировать немного иначе:

Для того, чтобы сумма углов была равна 180°, достаточно, чтобы эти углы были смежные.

Для того, чтобы углы были смежные, необходимо, чтобы их сумма была равна 180°.

59. Укажите истинное высказывание в каждой паре:

а) существование лотерейного билета — необходимое условие выигрыша в лотерею; существование лотерейного билета — достаточное условие выигрыша в лотерею;

б) наличие аттестата о среднем образовании – необходимое условие для поступления в ВУЗ; наличие аттестата о среднем образовании — достаточное условие для поступления в ВУЗ;

в) дождь — необходимое условие влажности тротуара; дождь — достаточное условие влажности тротуара;

г) четность суммы — необходимое условие четности слагаемых; четность суммы — достаточное условие четности слагаемых;

д) равноугольность треугольников — необходимое условие их равенства; равноугольность треугольников — достаточное условие их равенства.

60. Выясните отношения между предложениями и сформулируйте эти отношения при помощи слов «необходимое условие», «достаточное условие», «необходимое и достаточное условие»:

а) существительное с окончанием -а относится к первому склонению;
существительное относится к женскому роду;

б) число делится на 3;
число делится на 12;

в) животное является хищником;
животное является млекопитающим;

г) две прямые принадлежат одной плоскости;
две прямые параллельны;

д) параллелограмм имеет равные диагонали;
параллелограмм является прямоугольником.

61. Переформулируйте предложение, используя слова «необходимое условие» или «достаточное условие», а также в виде следования или равносильности:

а) для того, чтобы произведение $2a$ было целым числом, достаточно, чтоб число a было целым;

б) для того, чтобы конъюнкция $A \wedge B$ имела значение И, необходимо и достаточно, чтобы значение И имели высказывания A и B;

в) для того, чтобы работать учителем начальных классов, достаточно закончить педагогический институт;

г) для того, чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы он имел две пары параллельных сторон.

62. Поставьте вместо точек слова «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно», чтобы получились истинные высказывания:

а) для того, чтобы произведение было равно нулю, …, чтобы каждый множитель был равен нулю;

б) для того, чтобы слово являлось существительным, …, чтобы оно отвечало на вопрос «кто?» или «что?»;

в) для того, чтобы два высказывания находились в отношении равносильности, …, чтобы их таблицы истинности совпадали;

г) для того, чтобы вода замерзла, …, чтобы температура воздуха была –3°С;

д) для того, чтобы прямоугольник был квадратом, …, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярными;

е) для того, чтобы получить зеленую краску, … смешать синюю и красную краски;

ж) для того, чтобы слово выражало отрицательное понятие, …, чтобы оно содержало отрицательную приставку.

ТЕСТ

1. Укажите, равносильные формулы:

а) $\neg(\forall x\, P(x))$ и $\neg(\forall x)\, P(x)$;

б) $\neg(\forall x\, P(x))$ и $\exists x\, \neg P(x)$;

в) $\neg(\forall x\, P(x))$ и $\exists x\, P(x)$;

г) $\exists x\, \neg P(x)$ и $\forall x\, \neg P(x)$.

2. Укажите равносильные формулы:

а) $\exists x\, (\neg P(x))$ и $\neg(\forall x)\, \neg P(x)$;

б) $\exists x\, (\neg P(x))$ и $\neg(\exists x)\, \neg P(x)$;

в) $\neg(\exists x\, (P(x))$ и $\forall x\, \neg P(x)$;

г) $\forall x\, \neg P(x)$ и $\exists x\, \neg P(x)$.

3. Укажите предикаты:

а) $3x + 5 > 8$;

б) любое число является решением неравенства $3x + 5 > 8$;

в) $(26 + 4)\cdot 2 = 60$;

г) если данные углы ABC и MBN (рис. 4) вертикальные, то углы ABC и MBN равны.

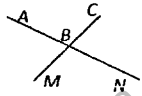


Рис. 4

4. Укажите предикаты:

а) число 56 не делится на 9;

б) прямые a и b перпендикулярны;

в) некоторые натуральные числа делятся на 2;

г) $(17 + 8)\cdot 4 = 100$.

5. Укажите предикаты:

а) данный треугольник ABC (рис. 5) равнобедренный и прямоугольный;

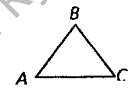


Рис. 5

б) в любом квадрате диагонали равны;

в) число 243 четное;

г) $(26 + x)\cdot 2 = 60$.

6. Укажите предикаты:

а) существуют числа, кратные 7;

б) при делении 53 на 3 получается остаток 1;

в) число x — нечетное;

г) сумма любых трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

7. Укажите одноместные предикаты:

а) $P(x, y)$;

б) $\forall x\, P(x, y)$;

в) $-2 + y = z$;

г) $\exists x\, \forall y\, P(x, y)$.

8. Укажите одноместные предикаты:

а) $P(x, y, z)$;

б) $\forall y\, \forall z\, P(y; z)$;

в) $-2 - (-5) = 3$;

г) $\exists x\, P(x, y)$.

9. Укажите двуместные предикаты:

а) $\forall x\, P(x; y)$;

б) $\exists x\, P(x, y, z)$;

в) $-2 + y = 3$;

г) $\exists x\, \forall x\, P(x, y)$.

10. Укажите двуместные предикаты:

а) $\exists x\, \exists y\, P(x, y, z, k)$.

б) $\exists x\, \forall y\, P(x, y)$.

в) $x = 2$;

в) $x = 2$;

г) $-2 + y = 4$.

11. Укажите область истинности предиката $P(x, y)$: «x делится на y», заданного на множестве $\{1, 3, 6\}$.

а) $E = \{(1; 1); (3; 1); (3; 3); (6; 1);(6; 3); (6; 6)\}$;

б) $E = \{(1; 1); (3; 3); (6; 6)\}$;

в) $E = \{(1; 1); (1; 3); (1; 6); (3; 3); (3; 6); (6; 6)\}$;

г) $E = \{(3; 1); (6; 1); (6; 3)\}$.

12. Укажите область истинности предиката $P(x, y)$: «x — делитель числа y», заданного на множестве $\{1, 4, 5\}$.

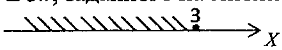
а) $E = \{(1; 1); (4; 4); (5; 5)\}$;

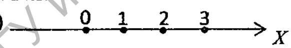
б) $E = \{(1; 4); (1; 5)\}$;

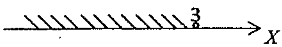
в) $E = \{(1; 1); (4; 1); (4; 4); (5; 1); (5; 5)\}$;

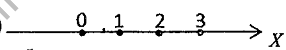
г) $E = \{(1; 1); (1; 4); (1; 5); (4; 4); (5; 5)\}$.

13. Изображением на координатной прямой области истинности предиката $P(x)$: «$x \leq 3$», заданного на множестве $\boldsymbol{R}$, является:

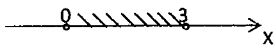
а) 

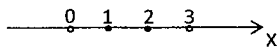
б) 

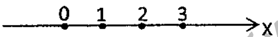
в) 

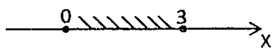
г) 

14. Изображением на координатной прямой области истинности предиката $P(x)$: «$0 \leq x \leq 3$», заданного на множестве $\boldsymbol{R}$, является:

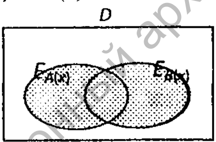
а) 

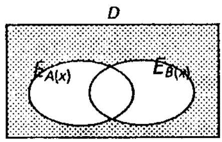
б) 

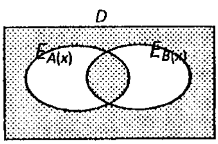
в) 

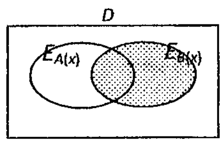
г) 

15. Укажите диаграмму, на которой показана область истинности предиката $A(x) \vee B(x)$

а) 

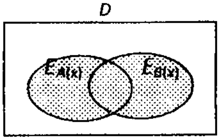
б) 

в) 

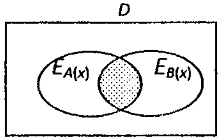
г) 

16. Укажите диаграмму, на которой показана область истинности предиката $A(x) \wedge B(x)$.

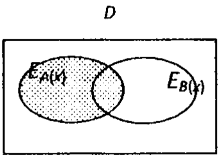
а)



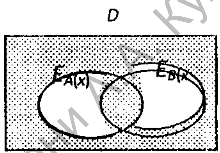
б)



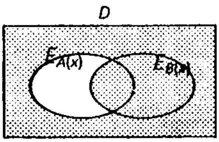
в)



г)

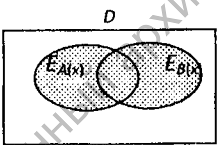


17. Укажите предикат, область истинности которого показана на диаграмме:



а) $A(x) \sim B(x)$;
б) $A(x) \supset B(x)$;
в) $B(x) \supset A(x)$;
г) $B(x) \wedge A(x)$.

18. Укажите предикат, область истинности которого показана на диаграмме:



а) $B(x) \wedge A(x)$;
б) $A(x) \vee B(x)$;
в) $B(x) \supset A(x)$;
г) $A(x) \sim B(x)$.

19. Укажите предикаты, следующие из предиката: $P(x)$: «$x^2 - 2x = 0$»:
а) $R(x)$: «$x = 0$»;
б) $A(x)$: «$x - 2 = 0$»;
в) $B(x)$: «$5x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 0$»;
г) $C(x)$: «$(x-1)(x-2) = 0$».

20. Укажите предикаты, следующие из предиката $P(x)$: «x делится на 4»:

а) $R(x)$: «x делится на 2»;

б) $A(x)$: «x не делится на 2»;

в) $B(x)$: «если x делится на 4, то x делится на 2»;

г) $C(x)$: «x делится на 4, тогда и только тогда, когда x делится на 2».

21. Укажите верные утверждения:

а) $\neg A(x) \equiv A(x)$;

б) $\neg A(x) \equiv \neg A(x)$;

в) $A(x) \equiv \neg A(x)$;

г) $\neg A(x) \equiv$ И.

22. Укажите верные утверждения:

а) $A(x) \wedge B(x) \equiv \neg A(x) \wedge B(x)$;

б) $A(x) \wedge B(x) \equiv \neg B(x) \vee A(x)$;

в) $\neg(A(x) \wedge B(x)) \equiv \neg A(x) \wedge \neg B(x)$;

г) $A(x) \wedge B(x) \equiv B(x) \wedge A(x)$.

Тема 3. Рассуждения

Рассуждение — форма мышления, посредством которой из одного или более высказываний выводится новое высказывание.

Структура рассуждения включает:

- посылки — исходные высказывания;
- заключение — новое высказывание;
- логическую связь между посылками и заключением.

Логическое следование может выступать в роли связи между посылками и заключением. Такие рассуждения называются ***дедуктивными***, а все остальные — ***недедуктивными***.

При выявлении логической формы рассуждения посылки и заключение принято записывать отдельно, располагая друг под другом. Посылки отделяются от заключения горизонтальной чертой, обозначающей логическую связь между посылками и заключением. Слова «следовательно» и близкие им по смыслу («значит», «поэтому» и т. п.) под чертой обычно не пишутся.

$$\frac{A,\ B,\ C}{E} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{посылки} \\ \longleftarrow \text{заключение} \end{array}$$

3.1. Рассуждения, основанные на правилах вывода

Вид рассуждений, в которых при осуществлении вывода внутренняя структура простых высказываний не учитывается, часто называют **выводами логики высказываний**.

При наличии содержательной связи между посылками мы можем получить в процессе рассуждения новое истинное высказывание при соблюдении двух условий:

- должны быть ***истинными*** исходные высказывания — посылки рассуждения;
- в процессе рассуждения следует соблюдать ***правила вывода*** **(следования)**, которые обусловливают *формальную* правильность рассуждения.

Если одно из условий не выполняется, то истинность заключения не гарантируется.

Пример 14. Установим, какое заключение можно получить из посылок:

если человек не имеет среднего образования или не работает по профилю педагогического университета, то он не имеет права поступать на заочное отделение педагогического университета;

данный человек имеет право поступать на заочное отделение педагогического университета.

Решение. Заключением может быть любое высказывание, которое логически следует из данных посылок.

Первую и вторую посылки можно записать формулами $\rceil P \vee \rceil Q \supset \rceil R$ и R соответственно, где P: «*Человек имеет среднее образование*»;

Q: «*Человек работает по профилю педагогического университета*»;

R: «*Человек имеет право поступать на заочное отделение педагогического университета*».

Структура посылок соответствует правилу следования $A \supset B, \rceil B \Rightarrow \rceil A$ (правило отрицания), где $A = \rceil P \vee \rceil Q$, $B = \rceil R$. Тогда заключение имеет вид: $\rceil(\rceil P \vee \rceil Q)$.

Это выражение можно упростить, используя основные равносильности:

$\rceil(\rceil P \vee \rceil Q) \overset{16}{\equiv} \rceil\rceil P \wedge \rceil\rceil Q \overset{1}{\equiv} P \wedge Q$.

Значит, из данных посылок можно сделать заключение:

«Данный человек имеет среднее образование и работает по профилю педагогического университета».

Заключениями будут и отдельные высказывания P и Q, т. е.

«Данный человек имеет среднее образование» и

«Данный человек работает по профилю педагогического университета».

Задания

63. Выявите посылки и заключение в следующих рассуждениях. Определите правильность рассуждений.

а) Если Аристотель был учеником Платона, то он учился в его Академии, а если он учился в его Академии, то он получил греческое образование.

Следовательно, если Аристотель был учеником Платона, то он получил греческое образование.

б) Если бьют в набат, значит, где-то пожар. В набат не бьют. Следовательно, пожара нет.

в) Суждения бывают либо истинные, либо ложные. Данное суждение — истинно. Следовательно, оно не является ложным;

г) Он учится на дневном или заочном отделении факультета. Но я знаю точно, что не на дневном. Следовательно, он учится на заочном отделении.

д) Если родится мальчик, назовем его Кириллом, а если девочка, то назовем ее Катей. Поскольку у нас родится мальчик или девочка, то у нас вскоре будет Кирилл или Катя.

64. «Гений и злодейство — две вещи несовместимые», говорит А.С. Пушкин в «Моцарте и Сальери». Это можно выразить так: «Человек может быть либо гением, либо злодеем, но ни тем и другим одновременно». Установите, можно ли из этого положения сделать заключение:

а) Моцарт — гений; значит, Моцарт — не злодей;

б) Сальери — не гений; значит, Сальери — злодей;

в) Моцарт — не злодей; значит, Моцарт — гений;

г) Сальери — злодей; значит, Сальери — не гений.

65. Установите, правомерно ли из условной посылки: «Если он не знает физику, то не сможет решить эту техническую задачу» сделать заключение:

а) он решил эту техническую задачу; значит, он знает физику;

б) он знает физику; значит, он решит эту техническую задачу;

в) он не знает физику; значит, он не решит этой технической задачи;

г) он не решил этой технической задачи; значит, он не знает физики.

66. Найдите возможные заключения из посылок:

а) если число дробное, то оно имеет числитель;
если число дробное, то оно рациональное;

б) он сказал, что придет, если будет хорошая погода;
но он не пришел;

в) если ученик учится в седьмом классе, то он изучает белорусский язык;
если ученик изучает белорусский язык, то он различает части речи;

г) данное число простое либо составное; если число простое, то оно нечетное или равно 2; данное число четное;

д) если человек упрямый, то он может ошибаться; если человек честный, то он не упрямый; если человек не упрямый, то он не может ошибаться и быть честным одновременно;

е) если в данной местности увеличивается количество кошек, то уменьшается количество полевых мышей; если в данной местности уменьшается количество полевых мышей, то увеличивается количество ос; если в данной местности увеличивается количество ос, то создаются более благоприятные условия для повышения урожая клевера.

67. Из данных посылок по указанному правилу вывода получите заключение, восстанавливая при необходимости посылки, которых не достает:

	Посылки	Правило вывода
а)	Если фигура — квадрат, то она ромб. Если фигура — ромб, то она параллелограмм.	$A \supset B,\ B \supset C \Rightarrow A \supset C$
б)	Прямая a параллельна прямой b или пересекает ее. Прямая a не пересекает прямую b.	$A \vee B,\ \rceil B \Rightarrow A;$
в)	Если число делится на 4, то оно делится и на 2. Если число делится на 9, то оно делится и на 3. Число делится на 4 либо на 9.	$A \supset B,\ C \supset D,$ $A \vee C \Rightarrow B \vee D$
г)	Если $a > b$, то $a - b > 0$. Если $a < b$, то $b - a > 0$. Неверно, что $a - b > 0$, либо неверно, что $b - a > 0$.	$A \supset B,\ C \supset D,$ $\rceil B \vee \rceil D \Rightarrow \rceil A \vee \rceil C$
д)	Если элемент принадлежит пересечению множеств, то он принадлежит двум множествам.	$A \supset B,\ B \supset A \Rightarrow A \sim B$
е)	Если слово стоит в начале предложения, то оно пишется с большой буквы.	$A \supset B \Rightarrow \rceil B \supset \rceil A$
ж)	Если в слове приставка заканчивается на гласную, то после приставки вместо ***и*** пишется ***ы***.	$A \supset B,\ \rceil B \Rightarrow \rceil A$

68. Восстановите пропущенную посылку или заключение и проверьте правильность полученного рассуждения:

а) этот студент не получает повышенную стипендию, так как он имеет оценки ниже «шести» по ряду предметов;

б) он пианист, так как у него длинные, гибкие пальцы;

в) как и все студенты, Иванов поедет на сельхозработы;

г) он должен быть оправдан, так как у вас нет никаких доказательств его виновности;

д) поскольку это острый аппендицит, нужна срочная операция;

е) некоторые люди являются «совами», а все студенты — люди;

ж) это — машина, значит она не может ехать без бензина.

69. Проанализируйте посылки, подберите из перечня правильных следований нужную структуру и сформулируйте заключение:

а) если купить билет на самолет, то появится возможность побывать в салоне самолета;

если появилась возможность побыть в салоне самолета, то есть возможность улететь в этом самолете в другой город.

?

б) неверно, что человек может жить без воды.

?

в) если в стране произошла социальная революция, то в ней была революционная ситуация;

в стране произошла социальная революция.

?

г) минеральные удобрения бывают или азотными, или фосфорными, или калийными;

данное минеральное удобрение не является азотным.

?

д) данный глагол может стоять или в настоящем, или в прошедшем, или в будущем времени;

данный глагол стоит в настоящем времени.

?

е) если у человека болит зуб, то рекомендуется принять анальгин;

если болит голова, то тоже рекомендуется принять анальгин;

в данном случае у человека болит зуб или голова.

?

ж) если человек болен гриппом, то у него будет высокая температура и головная боль;

у больного нет высокой температуры или нет головной боли.

?

70. Проанализируйте рассуждение:

а) если число составное, то оно натуральное и больше 1; если число натуральное и больше 1, то оно имеет хотя бы один простой делитель; значит, если число составное, то оно имеет хотя бы один простой делитель;

б) прямые a и b либо параллельны, либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся; если прямые a и b лежат в одной плоскости, то они не скрещивающиеся; прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются; значит, прямые a и b — параллельные;

в) если ты не упрямый, то можешь изменить свою мысль; а если ты можешь изменить свою мысль, то ты можешь признать данное высказывание ложным; значит, если ты не упрямый, то ты можешь признать данное высказывание ложным;

г) если Петров не трусливый, то он может поступить в соответствии с собственными убеждениями; если Петров честный, то он не трусливый; если Петров нечестный, то он не признает собственную ошибку; но Петров признает собственную ошибку; значит, Петров поступает согласно своим убеждениям;

д) для того, чтобы сдать экзамен, мне необходимо достать учебник или конспект; я достану учебник только в том случае, если мой приятель не уедет домой; но он уедет тогда и только тогда, когда я достану конспект; следовательно, я сдам экзамен;

е) если завтра будет холодно, я надену теплое пальто, если рукав будет починен; завтра будет холодно, а рукав не будет починен; следовательно, я не надену теплое пальто.

71. Установите, является ли правильным рассуждение.

а) если на улице идет дождь, то асфальт мокрый и автобус движется с небольшой скоростью; автобус движется с большой скоростью; следовательно, на улице нет дождя;

б) если на улице идет дождь, то асфальт мокрый и автобус движется с небольшой скоростью; на улице идет дождь; следовательно, если асфальт мокрый, то автобус движется с большой скоростью;

в) если на улице не идет дождь, то асфальт немокрый и автобус движется с большой скоростью; на улице идет дождь и асфальт мокрый; следовательно, автобус движется с большой скоростью;

г) если асфальт немокрый и автобус движется с большой скоростью, то на улице не идет дождь; неправда, что на улице идет дождь и асфальт мокрый; следовательно, автобус движется с большой скоростью;

д) если на улице не идет дождь и асфальт немокрый, то автобус движется с большой скоростью; автобус движется с большой скоростью; следовательно, на улице не идет дождь или асфальт немокрый.

72. Установите, справедливо ли такое заключение:

а) Если Антон ляжет сегодня поздно, то утром он будет в нерабочем состоянии; если он ляжет не поздно, то ему будет казаться, что он много времени теряет бесполезно; следовательно, или Антон завтра будет в нерабочем состоянии, или ему будет казаться, что он много времени теряет напрасно.

б) Если я пойду завтра на первое занятие, то должен буду рано встать, а если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно; если я лягу спать поздно и встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами сна; я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна; следует ли отсюда, что я должен или пропустить завтра первое занятие, или не ходить вечером на танцы.

в) Или Анна и Антон одного возраста, или Анна старше Антона; если Анна и Антон одного возраста, то Наташа и Антон не одного возраста; если Анна старше Антона, то Антон старше Николая. Следует ли отсюда, что либо Наташа и Антон не одного возраста, либо Антон старше Николая.

3.2 Анализ рассуждений с помощью диаграмм

Всякое рассуждение с точки зрения логики состоит из посылок, т. е. предложений, принимаемых нами за исходные, и заключения. Рассуждение считается ***правильным***, если из истинности посылок непременно следует истинность заключения. Здесь важно подчеркнуть, что истинность заключения должна следовать из логической структуры посылок. Если же из одновременной истинности посылок не следует обязательная истинность заключения, то рассуждение считается ***неправильным***. Используя диаграммы Венна, можно проверять, является ли данное рассуждение правильным или нет.

Пример 15. С помощью диаграмм установите верность заключения в рассуждении:

Все люди смертны;
Сократ — человек.
Сократ смертен.

Решение.

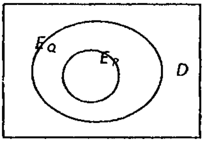
D — множество живых существ.

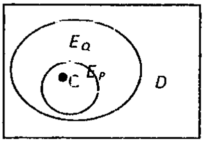
$P(x)$: x — человек.

$Q(x)$: x — смертен.

c — Сократ, $c \in D$

1) Изобразим на диаграмме отношение между областями истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$.





2) Найдем на диаграмме местоположение Сократа: $c \in E_P$.

3) Определим положение c относительно E_Q, $c \in E_Q$.

Вывод: заключение «Сократ — смертен» верно.

Пример 16. Используя диаграммы Венна, проверить, правильны ли следующие рассуждения.

а) Все киты — млекопитающие.

Все млекопитающие — хордовые.

Все киты — хордовые.

Решение. Обозначим через P множество всех китов, через Q — множество всех млекопитающих, через R — множество всех хордовых. Из посылок, которые мы принимаем за истинные, следует такое расположение множеств друг относительно друга.

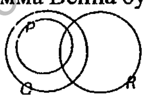
Из рисунка следует, что множество P находится внутри множества R. Это рассуждение правильное.

б) Все спортсмены умеют хорошо бегать.

Некоторые отличники — спортсмены.

Некоторые отличники умеют хорошо бегать.

Решение. Обозначим P — множество спортсменов, Q — множество людей, которые умеют хорошо бегать, R — множество отличников. Тогда диаграмма Венна будет такая:



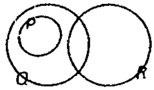
Значит, рассуждение правильное. Из рисунка следует, что множества Q и R обязательно должны пересекаться.

в) Все пионеры — школьники.

Все комсомольцы — не пионеры.

Все комсомольцы — не школьники.

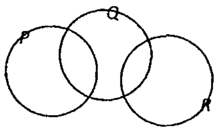
Решение. Обозначим P — множество пионеров, Q — множество школьников, R — множество комсомольцев. Тогда диаграмма Венна может быть такой:



Рассуждение неправильное, так как множества Q и R пересекаются, и, конечно, имеются комсомольцы, которые являются школьниками.

г) Некоторые математики любят музыку.
Некоторые физики тоже любят музыку.
Некоторые математики есть физики.

Решение. Обозначим P — множество математиков, Q — множество людей, которые любят музыку, R — множество физиков. Тогда диаграмма Венна может быть такой:



Рассуждение неправильное, так как множества P и R могут не пересекаться.

73. Продолжите рассуждения и проверьте их правильность с помощью диаграмм:

1) Если человек x — студент, то он умеет читать;
Сидоров — студент.
?

2) Если число x делится на 6, то оно четное;
Число 24 делится на 6.
?

3) Если фигура x — ромб, то она четырехугольник;
Фигура ABC — треугольник.
?

4) Перья есть только у птиц;
Ни одно млекопитающее не является птицей.
?

5) Простые числа имеют только два делителя;
Число 1 не является простым числом.
?

6) Ни одно животное не бессмертно;
Кошки — животные.
?

ТЕСТ

1. Укажите структуру данного рассуждения:

Если студент-заочник выполнит контрольную работу (P), и она будет зачтена (Q), то его допустят к экзамену (R). Студента не допустили к экзамену. Следовательно, студент-заочник не выполнил контрольную работу или контрольная работа не зачтена.

а) $$\begin{array}{l} P \land Q \supset R. \\ \neg R. \\ \hline \neg P \lor \neg Q. \end{array}$$

б) $$\begin{array}{l} P \lor Q \supset R. \\ \neg R. \\ \hline P \lor \neg Q. \end{array}$$

в) $$\begin{array}{l} P \land \neg Q \supset R. \\ R. \\ \hline \neg P \lor \neg Q. \end{array}$$

г) $$\begin{array}{l} \neg P \land \neg Q \supset R. \\ \neg R. \\ \hline \neg P \lor \neg Q. \end{array}$$

2. Укажите структуру данного рассуждения:

Две прямые *a* и *b* параллельны (P) тогда и только тогда, когда эти прямые лежат в одной плоскости (Q) и не пересекаются (R) или совпадают (S); если две прямые *a* и *b* параллельны, то эти прямые лежат в одной плоскости и не пересекаются или совпадают; следовательно, если две прямые *a* и *b* лежат в одной плоскости и не пересекаются или совпадают, то эти прямые параллельны.

а) $$\begin{array}{l} P \sim Q \land (\neg R \lor S). \\ P \sim Q \land (\neg R \lor S). \\ \hline Q \lor (\neg R \lor S) \supset P. \end{array}$$

б) $$\begin{array}{l} P \sim Q \land (\neg R \lor S). \\ P \supset Q \land (\neg R \lor S). \\ \hline Q \land (\neg R \lor S) \supset P. \end{array}$$

в) $$\begin{array}{l} P \sim Q \land (\neg R \lor S). \\ P \supset Q \land (\neg R \land \neg S). \\ \hline Q \lor (\neg R \lor \neg S) \supset P. \end{array}$$

г) $$\begin{array}{l} P \supset Q \land (R \lor S). \\ P \supset Q \land (R \lor S). \\ \hline Q \land (\neg R \lor S) \sim P. \end{array}$$

3. Укажите структуру для данного рассуждения:

Если завтра будет холодно (P), то я надену теплое пальто (Q), если рукав будет починен (R).
Завтра будет холодно, а рукав не будет починен.

Значит, я не надену теплое пальто.

а) $P \supset (R \supset Q), P \land \neg R \Rightarrow \neg Q$;

б) $P \supset (Q \supset R), P \land \neg R \Rightarrow \neg Q$;

в) $P \supset (Q \supset R), P \lor \neg R \Rightarrow \neg Q$;

г) $P \supset (Q \supset R), P \land \neg R \Rightarrow Q$.

4. Даны две посылки:

Все живые организмы — смертны.
Все люди — живые организмы.

?

Укажите для них заключение, чтобы рассуждение было правильным:

а) Каждый человек является смертным.

б) Некоторые люди бессмертны.

в) Некоторые живые организмы бессмертны.
г) Каждый живой организм смертен.

5. Даны две посылки:

Все квадраты — прямоугольники.
Все прямоугольники — четырехугольники.
?

Укажите для них заключение, чтобы рассуждение было правильным:
а) Все четырехугольники являются квадратами.
б) Все квадраты являются четырехугольниками.
в) Некоторые прямоугольники не являются четырехугольниками.
г) Некоторые квадраты не являются четырехугольниками.

6. Даны две посылки:

Ни один кит не является рыбой.
Все щуки — рыбы.
?

Укажите для них заключение, чтобы рассуждение было правильным:
а) Некоторые щуки являются китами.
б) Некоторые рыбы являются китами.
в) Ни один кит не является щукой.
г) Рыбы могут быть китами.

7. Даны две посылки:

Если число больше 1, то оно простое или составное.
Данное число не простое и не составное.
?

Укажите для них заключение, чтобы рассуждение было правильным:
а) Число не больше 1.
б) Число больше 1.
в) Такого числа нет.
г) Число равно 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берков, В. Ф. Логика: Задачи и упражнения, практикум: учеб. пособие / В. Ф. Берков. — Минск: ТетраСистемс, 1998. — 224 с.
2. Валуевич, Л. А. Методические рекомендации к практическим занятиям по логике в 2-х частях: для студентов педагогического факультета / Л. А. Валуевич, Л. В. Лещенко. — Могилев: Изд-во Могилёвского гос. ун-та, 1999. — Ч. 2: Суждение. Логическая функция. Умозаключение. — 33 с.
3. Гетманова, А. Д. Логика: для педагогических учебных заведений / А. Д. Гетманова. — М.: Добросвет, 2000. — 480 с.
4. Гетманова, А. Д. Логика: Словарь и задачник: учеб. пособие для студентов вузов / А. Д. Гетманова. — М.: ВЛАДОС, 1998. — 336 с.
5. Игошин, В. И. Задачник-практикум по математической логике: учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1986. — 159 с., ил.
6. Кириллов, В. И. Логика: учебник / В. И. Кирилов, А. А. Старченко. — М.: Высшая школа, 1987. — 271 с.
7. Малыхина, Г. И. Логика: учеб. пособие / Г. И. Малыхина. — Минск: Выш. школа, 2002. — 240 с.
8. Математическая логика: учеб. пособие / Л. А. Латотин, Ю. А. Макаренков, В. В. Николаева, А. А. Столяр; под общ. ред. А. А. Столяра. — Минск: Выш. шк., 1991. — 269 с.
9. Элементы математической логики: пособие для студентов-заочников специальности «Педагогика и методика начального обучения» / И. С. Андреюк, Р. О. Кирбай, Т. Л. Трухан. — Мозырь: МГПУ, 2002. — 49с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАТЕМАТИКА:
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Учебно-методические материалы

Составители:
Гостевич Татьяна Васильевна, **Латотин** Леонид Александрович,
Лещенко Лариса Васильевна и др.

Технический редактор *А. Л. Позняков*
Компьютерная верстка *В. А. Латыговская*

Подписано в печать 18.04.2014.
Формат 60x84/16. Гарнитура Times New Roman.

Усл.-печ. л. 2,6. Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 97 экз. Заказ № 148.
Могилевский государственный университет
имени А. А. Кулешова, 212022, Могилев, Космонавтов, 1
Свидетельство ГРИИРПИ № 1/131 от 03.01.2014 г.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
МГУ имени А. А. Кулешова. 212022, Могилев, Космонавтов, 1.