МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА»

Л.В. Лещенко, В.В. Николаева

МНОЖЕСТВО. КОМБИНАТОРИКА

Методические указания
к практическим занятиям

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР МГУ им. Кулешова

Могилев 2009

УДК 511.1(075.8)
ББК 22.12
Л54

Печатается по решению редакционно-издательского совета УО «МГУ им. А.А. Кулешова»

Р е ц е н з е н т
кандидат физико-математических наук доцент
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
УО «МГУ им. А.А. Кулешова»
Б.Д. Чеботаревский

Лещенко, Л.В.

Л54 Множество. Комбинаторика: метод. указания к практич. занятиям / Л.В. Лещенко, В.В. Николаева. – Могилев: УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2009. – 36 с.: ил.

Данное издание содержит краткие теоретические сведения и практические задания по разделам математики «Множество», «Комбинаторика». Для некоторых заданий приведены примеры решения и оформления. Предназначено для проведения практических занятий со студентами дневного и заочного отделения педагогического факультета, может быть использовано для организации самостоятельной работы.

УДК 511.1(075.8)
ББК 22.12

1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Множество. Способы задания множеств

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Оно принимается за первоначальное и поэтому не определяется через другие. В обыденной жизни его смысл выражается словами: совокупность, набор, класс, коллекция, группа, стадо и др. Неопределяемыми также являются понятия «элемент», «принадлежность». О предметах, составляющих множество, говорят, что они *принадлежат* этому множеству или являются его *элементами.* Предложение «предмет $\underline{a}$ принадлежит множеству $\underline{A}$» или «предмет $\underline{a}$ есть элемент множества $\underline{A}$» записывают так: $a \in A$; если $\underline{a}$ не принадлежит множеству $\underline{A}$, то запись такова: $a \notin A$.

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми* множествами. Для некоторых числовых множеств имеются специальные обозначения: N – множество всех натуральных чисел; N_0 – множество всех целых неотрицательных чисел; Z – множество всех целых чисел; Q – множество всех рациональных чисел; R – множество всех действительных чисел.

Множество считается *заданным,* если о любом объекте мы можем сказать – принадлежит он данному множеству или нет. Множество может быть задано двумя способами:

1) ***перечислением*** всех его элементов, например: $A = \{a, в, c\}$. Таким способом может быть задано только ***конечное*** множество;

2) указанием ***характеристического свойства*** элементов множества, т.е. такого свойства, которым обладают все элементы этого множества и только они. Множество элементов, обладающих некоторым характеристическим свойством, записывают так: $A = \{x|\ P(x)\}$ и читают: «A – множество всех элементов x таких, что они обладают свойством P». Этот способ позволяет задавать как конечные, так и бесконечные множества. Например: $A = \{x \mid x^2 + 5x + 6 = 0\}$ – множество всех корней уравнения $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Пример 1. Укажите элементы множеств, заданных с помощью характеристического свойства:

а) $A = \{x | x \in Z, -4 \leq x < 3\}$;

б) $B = \{x | x \in N, 2x^2 = 10\}$;

в) $C = \{x | x \in R, -2 < x \leq 4\}$.

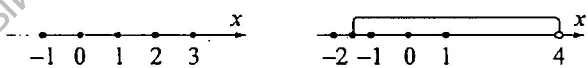
Решение. а) Элементы множества A – целые числа; они не меньше числа -4, но меньше числа 3. Следовательно, число –4 принадлежит множеству A, а число 3 – не принадлежит, т.е. можно записать: $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

б) Элементами множества B являются натуральные корни уравнения $2x^2 = 10$. Решив это уравнение, получим: $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_1 = \sqrt{5}$. Ни один корень уравнения $2x^2 = 10$ не является натуральным числом, значит множество B не содержит ни одного элемента. Говорят: множество B – пустое и записывают это так: $B = \varnothing$.

в) Элементы множества C – все действительные числа, которые больше -2, но не больше числа 4. Таких чисел бесконечное множество. Следовательно, перечислить элементы множества C мы не можем. Запишем множество C в виде числового промежутка: $C = (-2, 4]$.

Пример 2. Изобразите на числовой прямой элементы множества:
$A = \{x | x \in Z, -1 \leq x \leq 3\}$; $B = \{x | x \in R, -1{,}5 \leq x < 4\}$.

Решение. Элементы множества A – целые числа, которые можно перечислить, т.е. $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Каждому числу из множества A на числовой прямой соответствует одна точка (рис. 1а). Элементы множества B – действительные числа из числового промежутка $[-1{,}5; 4)$. Изобразим его на координатной прямой (рис. 1б).



а) б)

Рис. 1

Задания

1. Прочитайте следующие записи, укажите среди них истинные:

а) $270 \in N$, д) $-7 \in Q$, и) $18 \in Z$, н) $22\frac{7}{8} \notin N$, б) $1 \in N$, е) $-7 \in Z$, к) $14 \notin N$, о) $-14,2 \notin Z$,

в) $0 \in N$, ж) $-7 \in R$, л) $-27 \in N_0$, п) $\frac{3}{4} \in Q$,

г) $-70 \in N$, з) $0 \in N_0$, м) $22\frac{7}{8} \notin Z$, р) $\sqrt{2} \in R$.

2. Даны множества: M – множество натуральных чисел, больших 8 и меньших 18; P – множество натуральных чисел, оканчивающихся цифрой 7.

Укажите, каким из этих множеств принадлежат числа 12, 17, 0, 3, 7. Запишите это с помощью символа «$\in$».

3. Назовите элементы следующих множеств:

а) $\{a, в, c\}$; д) $\{\varnothing\}$;

б) $\{a\}$; е) $\{\{a, в\}, \{a\}\}$;

в) $\{\{a\}\}$; ж) $\{\{a, в, c\}, a\}$;

г) $\varnothing$; з) $\{\{a\}, a, \varnothing\}$;

4. Перечислите элементы следующих множеств:

А – множество натуральных чисел, меньших 8;

В – множество натуральных чисел, больших 10 и меньших 12;

С – множество чисел, модуль которых равен 3;

Д – множество различных букв в слове «головоломка»;

К – множество различных цифр числа 134433154.

5. Задайте следующие множества с помощью характеристического свойства:

а) $\{1, 2, 3\}$; в) $\varnothing$;

б) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$; г) множество натуральных чисел, меньших 9.

6. Укажите, по какому закону составлены следующие бесконечные множества:

а) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ...\}$; в) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, ...\right\}$

б) $\left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, ...\right\}$; г) $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{8}, \frac{6}{11}, \frac{8}{14}, ...\right\}$.

7. Сформулируйте характеристические свойства элементов множеств:

а) параллелограммов;

б) тупоугольных треугольников;

в) точек окружности;

г) точек биссектрисы угла.

8. Какие из следующих множеств пусты?

A – множество однозначных натуральных чисел;

B – множество параллелограммов с неравными противоположными сторонами;

C – множество двузначных чисел, меньших 9;

D – множество натуральных чисел, меньших 2;

$E = \{x | x \in N, 8 < x < 9\}$;

$K = \{x | x \in Z, x^2 - 4 = 0\}$;

$L = \{x | x \in R, x^2 + 16 = 0\}$;

$M = \{x | x \in N_0, (2x + 7)(x - 2) = 0\}$.

9. Прочитайте следующие записи и задайте указанные множества перечислением всех элементов:

$A = \{x | x \in N, x < 5\}$ $\quad$ $L = \{x | x \in R, x^2 = 3\}$

$B = \{x | x \in Z, 0 < x < 5\}$ $\quad$ $M = \{x | x \in Z, x^2 + 5x + 6 = 0\}$

$C = \{x | x \in Z, -6 \le x \le 4\}$ $\quad$ $N = \{x | x \in Z, x - x^2 + 2 > 0\}$

$D = \{x | x \in R, 5x = x - 7\}$ $\quad$ $Q = \{x | x \in N, x^2 \le 9\}$

$E = \{y | 2(5y + 10) = 10y + 20\}$ $\quad$ $R = \{x | x \in Z, x^2 + 5x + 7 = 0\}$

$F = \{x | x \in Z, |x| < 3\}$ $\quad$ $S = \{x | x \in N, \dfrac{x-1}{x-2} < 1\}$

$K = \{x | x \in Z, x^2 = 4\}$ $\quad$ $T == \{x | x \in Z, |x + 2| = 3\}$

10. Исследуйте, принадлежат ли числа $\frac{2}{5}, \frac{17}{20}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}$ множеству

$A = \{x | x = \dfrac{n^3 + 7}{n^3 + 15}, n \in N\}$;

11. Изобразите на числовой прямой следующие множества:

а) $\{x | x \in N, x \le 3\}$; $\quad$ г) $\{x | x \in R, x \le -7\}$;

б) $\{x | x \in Z, -2 \le x \le 2\}$; $\quad$ д) $\{x | x \in R, -2{,}7 \le x \le 0\}$;

в) $\{x | x \in R, x > 3{,}2\}$; $\quad$ е) $\{x | x \in R, -4{,}5 \le x \le -2\}$.

12. Задайте каждое числовое множество с помощью характеристического свойства его элементов:

а) $[-2; 5]$; $\quad$ в) $[-2; 5)$; $\quad$ д) $(-\infty; 5)$;

б) $(-2; 5]$; $\quad$ г) $(-2; 5)$; $\quad$ е) $(-2; +\infty)$.

13. Запишите в виде числовых промежутков множества, изображенные на числовой прямой:

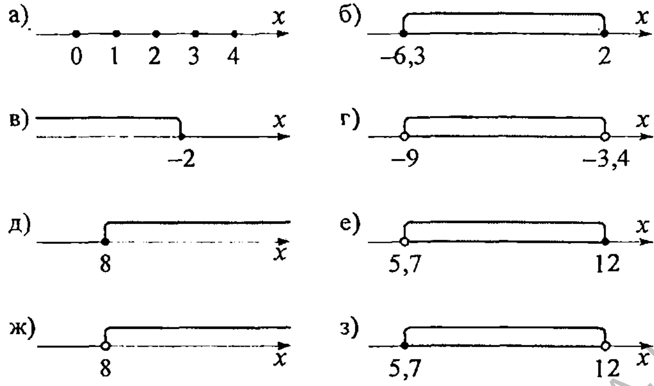


Рис. 2

1.2. Отношения между множествами

Множества могут находиться в одном из следующих отношений: пересечения, включения, равенства, непересечения.

Множества A и B находятся в отношении ***пересечения,*** если существуют элементы, принадлежащие как множеству A, так и множеству B, но существуют и элементы, которые принадлежат только множеству A и только множеству B.

Множества A и B находятся в отношении ***непересечения,*** если они не имеют ни одного общего элемента.

Множество B ***включается*** в множество A, если каждый элемент множества B является также и элементом множества A. Множество B в этом случае называется ***подмножеством*** множества A.

Записывается так: $B \subseteq A$

Каждое множество является подмножеством самого себя, пустое множество есть подмножество любого множества. Само множество A и $\varnothing$ называются ***несобственными*** подмножествами множества A, все остальные подмножества – ***собственные.*** Любое собственное подмножество B множества A ***строго включается*** в множество A. Пишут: $B \subset A$

Любое множество A содержит 2^n подмножеств, где n – число элементов множества A.

Множества A и B считают ***равными,*** если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. они состоят из одних и тех же элементов.

Записывают это так: $A = B$.

Если все рассматриваемые в ходе какого-либо рассуждения множества являются подмножествами одного некоторого множества I, то это множество I называют ***универсальным.***

Для наглядности множества и отношения между ними изображают геометрическими фигурами, например, универсальное множество – прямоугольником, а его подмножества – кругами. Такие иллюстрации называют ***диаграммами Эйлера-Венна.***

Пример 3. В каком отношении находятся множества A и B, если:

1) A – множество чисел, кратных 3; B – множество чисел, кратных 15.

2) A – множество ромбов; B – множество прямоугольников?

Проиллюстрировать диаграммами Эйлера-Венна.

Решение. 1) По условию A – это множество чисел, делящихся на 3, B – множество чисел, делящихся на 15. Однако, если число делится на 15, то оно делится на 3, поэтому множество B является подмножеством множества A. Но множества A и B не равны, так как, например, $3 \in A$, но $3 \notin B$. Значит, множества A и B находятся в отношении включения: $B \subset A$. Так как в рассматриваемом примере речь идет о делимости, то универсальным множеством естественно считать множество натуральных (или целых) чисел. При построении диаграммы Эйлера-Венна множество A изобразим произвольным кругом внутри прямоугольника, а множество B будем изображать некоторой частью множества A (рис. 3).

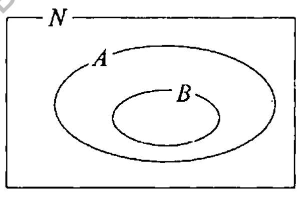


Рис. 3

2) Множества A и B имеют общие элементы: каждый квадрат является одновременно и ромбом и прямоугольником. Однако не всякий ромб является прямоугольником, также не всякий прямоугольник будет ромбом. Поэтому множество A не является подмножеством множества B и множество B не является подмножеством множества A, т.е. множества A и B находятся в отношении пересечения (рис. 4). Здесь универсаль-

ным множеством можно считать множество геометрических фигур (многоугольников, четырехугольников).

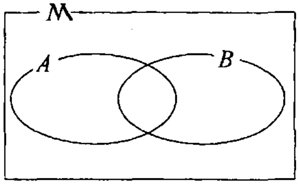


Рис. 4

14. Известно, что $a \in A$ и $a \in B$. Можно ли сделать вывод, что $A \subset B$, $B \subset A$ или $A = B$?

15. Известно, что каждый элемент множества C принадлежит множеству B. Какие из следующих высказываний будут истинными: $C \subseteq B$, $B \subset C$ или $C = B$?

16. В каких отношениях находится каждая из пар множеств A и B, где $A = \{2, 12, 22, 33\}$ и B:

а) $B = \{2, 33, 12, 42, 22, 11\}$;
б) $B = \{21, 13, 42, 11\}$;
в) $B = \{12, 22, 32, 2\}$;
г) $B = \{33, 2, 22\}$;
д) $B = \{22, 2, 33, 12\}$?

17. Установите вид отношения между множествами A и B, если:

а) A – множество равносторонних треугольников;
B – множество равноугольных треугольников;
б) $A = \{x \mid x \in N, x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in N, x \le 5\}$;
в) $A = [2, 3]$ и $B = [3, 4]$;
г) $A = (2, 5)$ и $B = [2, 5]$;
д) $A = (2, +\infty)$ и $B = [2, +\infty)$;
е) $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x - 2 = 0\}$.

18. Установите вид отношения и постройте диаграмму Эйлера-Вена для множеств:

F – натуральных чисел, делящихся на 12;
Q – рациональных чисел;
Z – целых чисел;
R – действительных чисел;
N – натуральных чисел;
E – натуральных четных чисел.

19. Даны множества:

A – множество всех прямоугольников;

B – множество всех четырехугольников;

C – множество всех многоугольников;

D – множество всех квадратов;

E – множество всех параллелограммов.

Выпишите буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая следующая обозначала подмножество предыдущего множества.

20. Укажите равные множества:

A – множество ромбов с прямыми углами;

B – множество квадратов;

C – множество прямоугольников с равными сторонами;

D – множество четырехугольников с прямыми углами;

E – множество прямоугольников.

21. Постройте диаграмму Эйлера-Венна для трех множеств A, B, C, если известно, что $A \subset B$ и $B \subset C$. В каком отношении находятся множества A и C?

22. Приведите примеры множеств A и B, если их изображение таково:

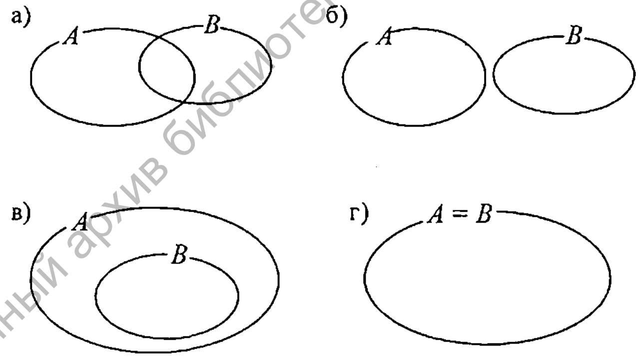


Рис. 5

23. Дано множество $A = \{a, в, c,\}$. Какие из следующих высказываний будут истинными: $a \in A$, $a \subset A$, $\{a\} \in A$, $\{a\} \subset A$?

24. Укажите истинные утверждения:

а) $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

д) $5 \in \{1, 2, 3. 4, 5\}$;

б) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

е) $5 \subset \{4, 5, 6\}$;

в) $\{1, 3\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$; ж) $\varnothing \in \{4, 5, 6\}$;
г) $\{1, 3\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$; з) $\varnothing \subset \{4, 5, 6\}$.

25. Запишите все подмножества множества B, если $B = \{1, 2, 3. 4\}$.

26. Восстановите множество C, если

$P(C) = \{\{21, 32\}, \{32\}, \{32,43\}, \{21\}, \{21, 43\}, \{43\}, \varnothing, \{21, 43, 32\}\}$, где $P(C)$ – множество всех подмножеств множества C.

27. В каких отношениях находятся множества, показанные на рис.6 с помощью диаграмм Эйлера-Венна? Приведите примеры таких множеств.

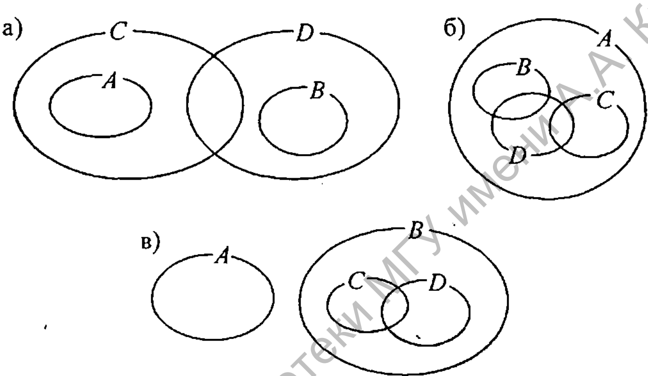


Рис. 6

1.3. Операции над множествами

Объединением ($A \cup B$) двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B:

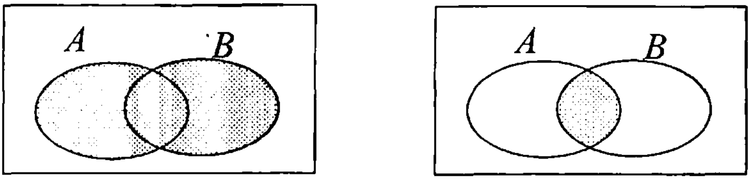
$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

На диаграмме Эйлера-Венна (рис.7а) заштриховано объединение множеств A и B.

Пересечением ($A \cap B$) двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B (т.е. их общая часть):

$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

На рисунке (рис. 7б) заштриховано множество $A \cap B$.



а) б)

Рис.7

Разностью между множеством A и множеством B ($A \setminus B$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B: $A \setminus B = \{x | \, x \in A \wedge x \notin B\}$.

На рис.8а заштриховано множество $A \setminus B$.

В случае, когда множество B является подмножеством A, разность $A \setminus B$ называется ***дополнением*** множества B до множества A (рис. 8б).

Пишется так: $A \setminus B = \overline{B_A}$.

Дополнение множества A в универсальном множестве I будем обозначать $\overline{A}$ (рис. 8в).

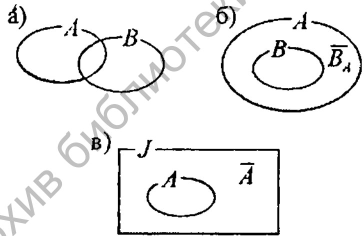


Рис. 8

Операции над множествами обладают следующими свойствами:

1. $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность пересечения
2. $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность объединения
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ассоциативность пересечения
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность объединения
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения

7. $A \cap A = A$
8. $A \cup A = A$
9. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
10. $A \cup \overline{A} = I$
11. $A \cap I = A$
12. $A \cup I = I$
13. $A \cap \varnothing = \varnothing$
14. $A \cup \varnothing = A$
15. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – закон де Моргана
16. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ – закон де Моргана
17. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
18. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

Справедливость свойств операций устанавливается двумя способами:

а) с помощью графической иллюстрации на кругах Эйлера-Венна;

б) доказательством, исходя из определений операций и равенства множеств.

Пример 4. Даны числовые множества A, B, C:

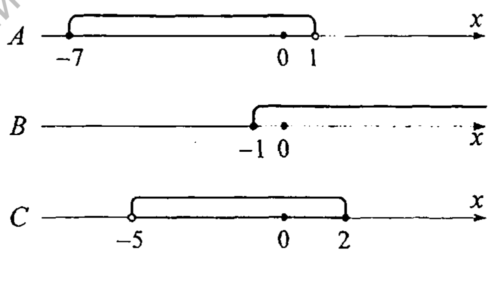
$A = \{x | x \in R, -7 \le x < 1\}$,

$B = \{x | x \in R, x \ge -1\}$,

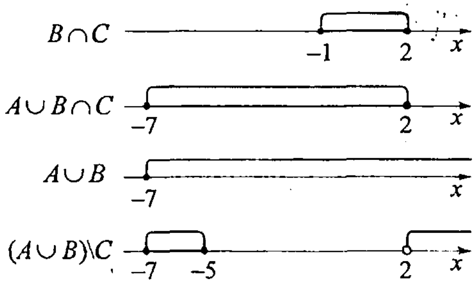
$C = \{x | x \in R, -5 < x \le 2\}$.

Найти множества: а) $A \cup B \cap C$; б) $(A \cup B) \setminus C$.

Решение. а) Отметим каждое из множеств A, B, C на числовой прямой:



Теперь найдем множества $A \cup B \cap C$ и $(A \cup B) \setminus C$.



$B \cap C = \{x | x \in R, -1 \le x \le 2\} = [-1; 2]$;
$A \cup B \cap C = \{x | x \in R, -7 \le x \le 2\} = [-7; 2]$;
$A \cup B = \{x | x \in R, x \ge -7\} = [-7; +\infty)$;
$(A \cup B) \setminus C = \{x | x \in R, -7 \le x \le -5 \vee x > 2\} = [-7; -5] \cup (2; +\infty)$.

Пример 5. С помощью иллюстрации на диаграммах Эйлера-Венна покажите выполнимость свойства № 17: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Решение. На отдельных рисунках отметим штриховкой множества, стоящие слева и справа в равенстве, а затем сравним рисунки.

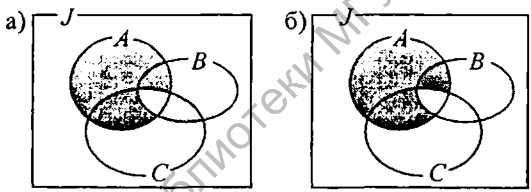


Рис. 9

На рисунках видно, что заштрихованные множества равные.

Примечание. Отношения между множествами выбираются произвольно, в частности, множества A, B и C – попарно пересекаются.

Пример 6. Докажите свойство дистрибутивности объединения относительно пересечения: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Решение. Докажем, что множество

$E_1 = A \cup (B \cap C)$ и $E_2 = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ равны, т.е. что любой элемент множества E_1 принадлежит множеству E_2 и обратно, что любой элемент множества E_2 принадлежит множеству E_1.

1) Пусть $x \in E_1$. Тогда $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а значит $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, т.е. $\underline{x \in E_2}$. Если $x \in B \cap C$,

то $x \in B$ и $x \in C$, а значит $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, т.е. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\underline{x \in E_2}$. $E_1 \subseteq E_2$.

2) Пусть $x \in E_2$. Тогда $x \in A \cup B$ ($x \in A$ или $x \in B$) и $x \in A \cup C$ ($x \in A$ или $x \in C$). Если $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C)$, т.е. $\underline{x \in E_1}$.

Если $x \notin A$, то $x \in B$ и $x \in C$, т.е. $x \in B \cap C$, а значит $x \in A \cup (B \cap C)$, т.е. $\underline{x \in E_1}$. $E_2 \subseteq E_1$.

Так как $E_1 \subseteq E_2$ и $E_2 \subseteq E_1$, то множества E_1 и E_2 равны.

Пример 7. Используя законы операций над множествами, упростите выражение: $\overline{(A \cup B)} \cup B$.

Решение. $\overline{A \cup B} \cup B \stackrel{16}{=}$

$$= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup B \stackrel{2}{=}$$
$$= B \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \stackrel{6}{=}$$
$$= (B \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{B}) \stackrel{10}{=}$$
$$= (B \cup \overline{A}) \cap I \stackrel{12}{=}$$
$$= B \cup \overline{A}$$

Задания

28. Известно, что: 1) $a \in A \cup B$; 2) $a \in A \cap B$; 3) $a \in A \setminus B$.

Какие из следующих высказываний будут истинными:

а) $a \in A$; г) $a \in A \wedge a \in B$;

б) $a \in B$; д) $a \notin A \wedge a \notin B$;

в) $a \in A \wedge a \notin B$; е) $a \notin A \wedge a \in B$?

29. Найдите пересечение и объединение множеств A и B:

а) $A = \{а, в, с, к, п\}$, $B = \{п, е, в, с, р\}$;

б) $A = \{а, в, с, к, п\}$, $B = \{а, с, к, в, п\}$;

в) $A = \{а, в, с, к, п\}$, $B = \{а, с, к,\}$;

г) $A = \{а, в, с, к, п\}$, $B = \{р, е, т,\}$;

д) A – множество четных натуральных чисел,

B – множество целых чисел, делящихся на 3;

е) A – множество корней уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$,

B – множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$;

ж) A – множество чисел вида $2к + 1$,

B – множество чисел вида $3п + 2$, где $к$ и $п$ принимают все целые значения.

з) A – множество цифр числа 281897, B – множество цифр числа 7324519.

30. Используя числовую прямую, найдите пересечение и объединение множеств A и B, если:

а) $A = \{x \mid x \in Z, x \geq -2\}$ и $B = \{x \mid x \in Z, x \leq 8\}$;

б) $A = \{x \mid x \in R, x \geq -2\}$ и $B = \{x \mid x \in R, x \leq 8\}$;

в) $A = \{x \mid x \in R, 0 < x < 3{,}5\}$ и $B = \{x \mid x \in R, -3 < x < 1\}$;

г) $A = \{x \mid x \in R, x < -1\}$ и $B = \{x \mid x \in R, x > -1{,}2\}$;

д) $A = \{x \mid x \in R, -2{,}5 < x \leq 1\}$ и $B = \{x \mid x \in R, 2 \leq x < 5{,}3\}$.

31. Укажите характеристическое свойство элементов множеств $P \cap Q$ и $P \cup Q$, если:

а) P – множество прямоугольников, Q – множество ромбов;

б) P – множество чисел, кратных 5, Q – множество чисел, кратных 3;

в) P – множество учащихся 3 класса, Q – множество мальчиков школы;

г) P – множество равнобедренных треугольников,
Q – множество равносторонних треугольников.

32. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества A, B, C, если:

а) $A \subset C, B \subset C$ и $A \cap B = \varnothing$;

б) $A \subset C, B \subset C$ и $C = A \cup B$;

в) $A \subset C, B \subset C$ и $A \cap B \neq \varnothing$;

г) $A \cap B \neq \varnothing, A \cap C \neq \varnothing, B \cap C \neq \varnothing, A \cap B \cap C \neq \varnothing$,

д) $A \cap B \neq \varnothing, A \cap C \neq \varnothing, B \cap C \neq \varnothing$.

33. Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением:

а) была точка; б) был отрезок; в) был треугольник; г) был четырехугольник;

д) был шестиугольник. Какую фигуру представляет объединение этих треугольников?

34. Найдите дополнение множества B до множества A, если:

а) $A = \{11, 12, 43, 54, 7\}$, $B = \{12, 7\}$;

б) $A = \{x \mid x \in N, x \leq 10\}$, $B = \{x \mid x \in N, x < 5\}$;

в) A – множество учащихся некоторого класса,
B – множество отличников в этом классе;

г) $A = R$, $B = (-\infty; 2)$;

д) $A = R$, $B = (1; 5]$;

е) $A = R$, $B = [3; +\infty)$.

35. Запишите множества $T \setminus P$ и $P \setminus T$, если:

а) $T = \{x | x \in Z, -5 \le x \le 7\}$, $P = \{x | x \in N, 4 \le x \le 12\}$;

б) $T = \{a, в, c, к, n\}$, $P = \{p, e, c, к, n, d\}$;

в) $T = \{x | x \in R, -2{,}5 \le x \le 3\}$, $P = \{x | x \in R, -2 \le x \le 5\}$.

36. Известно, что A, B и C подмножества универсального множества и $A \cap B \cap C \ne \varnothing$. Изобразите при помощи диаграмм Эйлера-Венна данные множества и отметьте штриховкой:

а) а) $A \cap B \cap C$; в) $\overline{A \cup B} \cap C$;

б) $A \cup C \cup B$; г) $\overline{A \cap B}$.

37. Отношения между множествами K, L, M даны на рисунке 10. Покажите на диаграмме Эйлера-Венна множества:

1) $K \cap L \cup M$; 2) $(K \cup L) \cap M$; 3) $K \cap (L \cup M)$; 4) $K \cup (L \cap M)$.

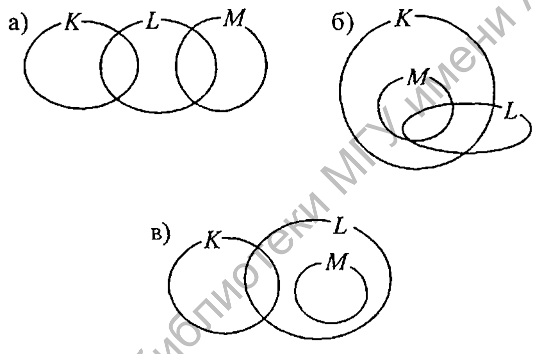


Рис. 10

38. Даны множества: $A = \{x | x \in R, -3{,}5 \le x < 8\}$, $B = \{x | x \in R, -5 < x \le 3\}$, $C = \{x | x \in R, -1 \le x \le 3\frac{1}{3}\}$.

Укажите характеристическое свойство элементов следующих множеств (с помощью числовой прямой):

а) $A \setminus B$; в) $B \setminus C$; д) $C \cap (B \setminus A)$;

б) $(A \setminus C) \cap B$; г) $(B \setminus C) \cup A$; е) $(B \cup C) \setminus A$.

39. Известно, что K, L, M – подмножества универсального множества I. Отметьте на диаграмме Эйлера-Венна множества:

а) $(K \setminus L) \cup M$; г) $(K \cap L) \setminus M$;

б) $K \setminus (L \cup M)$; д) $(\overline{K} \cap \overline{L}) \cap M$;

в) $(L \cup M) \setminus K$; е) $(\overline{K \cup L}) \cap M$.

40. Пусть G – множество всех треугольников, P – множество равнобедренных треугольников, K – множество прямоугольных треугольников, S – множество треугольников со стороной 5 см.

Изобразите данные множества с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Отметьте штриховкой и укажите характеристическое свойство элементов следующих множеств:

а) $P\cap K\cap S$; г) $P\cup K\cap S$; ж) $(\overline{P}\cap K)\setminus S$;
б) $P\cup K\cup S$; д) $(P\setminus K)\cup S$; з) $P\cap\overline{K}\cup S$;
в) $P\cap K\cup S$; е) $P\cap(K\setminus S)$; и) $\overline{P}\cap\overline{K}\cup\overline{S}$.

41. Установите справедливость свойств 1–18 с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

42. Даны множества: $A = [-3; 5)$; $B = (0; 7]$; $C = (-1; 3)$. Учитывая, что R – универсальное множество, покажите на числовой прямой следующие множества: $A\setminus(B\cup C)$, $(A\setminus B)\setminus C$, $A\setminus(B\setminus C)$, $(A\setminus B)\cap(B\cap C)$, $(A\cup B)\cap(A\setminus C)$, $A\cup\overline{B\setminus C}$, $\overline{A}\cup(B\setminus C)$, $\overline{A}\cup(\overline{B\setminus C})$, $\overline{A\setminus B\cap C}$, $A\setminus B\cap\overline{C}$, $\overline{A\setminus B}\setminus\overline{B\cap C}$.

43. Упростите выражения:

а) $(A\cap B)\cap B$; в) $A\cap(A\cup B)$;
б) $\overline{A\cup B}\cap B$; г) $(A\cap B)\cap(\overline{B}\cap A)$.

44. Используя законы операций над множествами, докажите равенство:

$$\overline{A}\cup\overline{B\cup C}=\overline{A\cap B}\cap\overline{A\cap C}.$$

45. Докажите, исходя из определений операций над множествами и равенства множеств, следующие равенства:

а) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; в) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
б) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; г) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

46. Докажите, что для любых множеств верны следующие соотношения:

а) $A\setminus B=A\cap\overline{B}$; г) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus B$;
б) $A\cap B\subset A\cup B$; д) $A\cup(B\setminus C)\subset(A\cup B)$;
в) $\overline{A\setminus B}=\overline{A}\cup(A\cap B)$; е) $(A\setminus B)\cup C\subset(A\cup C)\setminus B$.

1.4. Разбиение множества на классы

Разбиение множества M на попарно непересекающиеся подмножества или ***классы*** $K_1, K_2, \ldots, K_n$ определяется тремя условиями:

1) каждое из подмножеств K_i непусто:
$K_i \neq \varnothing$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) любые два подмножества не пересекаются:
$K_i \cap K_j = \varnothing$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и $i \neq j$;

3) объединение всех подмножеств дает множество M:
$K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n = M$.

Разбиение множества на классы осуществляется с помощью свойств. С помощью одного свойства осуществляется разбиение множества вообще на 2 класса, с помощью двух свойств – на 4 класса, с помощью трех свойств – на 8 классов, с помощью n свойств – на 2^n классов. В частных случаях может получиться меньше классов, так как некоторые из подмножеств оказываются пустыми.

Число элементов объединения двух множеств равно сумме количества элементов в каждом из них, уменьшенной на количество элементов пересечения этих множеств.

Пусть даны два множества A и B. Число элементов множества A равно $m(A)$, число элементов множества B – $m(B)$. Тогда для любых множеств A и B справедливо равенство:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Если множества A и B не пересекаются, т.е. $A \cap B = \varnothing$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Для трех множеств A, B, C эта формула запишется так:

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C).$$

Пример 8. Запишите и назовите классы, на которые разбивается

а) множество параллелограммов с помощью свойств «быть равносторонним» и «быть прямоугольным»; б) множество натуральных чисел с помощью свойств «быть простым числом» и «быть составным числом». Изобразите разбиение на диаграмме Эйлера-Венна.

Решение. а) Пусть M – множество всех параллелограммов. С помощью свойства «быть равносторонним» мы выделяем подмножества A – равносторонних и $\overline{A}$ — неравносторонних параллелограммов; с помощью свойства «быть прямоугольным» выделяем подмножества

B – прямоугольных и $\overline{B}$ – непрямоугольных параллелограммов. Указанные два свойства определяют разбиение множества M на 4 попарно непересекающиеся подмножества, каждое из которых непусто и их объединение образует множество M, т.е. множество M разбилось на 4 класса (рис.11а):

I – $A \cap B$ – множество прямоугольных равносторонних параллелограммов (квадраты);

II – $A \cap \overline{B}$ – множество равносторонних непрямоугольных параллелограммов (ромбы непрямоугольники);

III – $\overline{A} \cap B$ – множество прямоугольных неравносторонних параллелограммов (прямоугольники неромбы);

IV – $\overline{A} \cap \overline{B}$ множество непрямоугольных, неравносторонних параллелограммов (остальные параллелограммы).

б) Пусть A – множество простых чисел, B – множество составных чисел. С помощью этих двух свойств множество N натуральных чисел разбивается на 4 попарно непересекающиеся подмножества:

I – $A \cap B$ – множество чисел, которые являются одновременно простыми и составными;

II – $A \cap \overline{B}$ – множество чисел, которые являются простыми и не являются составными (все простые числа);

III – $\overline{A} \cap B$ – множество составных чисел, которые не являются простыми (все составные числа);

IV – $\overline{A} \cap \overline{B}$ – множество чисел, которые не являются ни простыми, ни составными (число 1).

Учитывая, что подмножество $A \cap B$ пусто, мы получили разбиение множества N на 3 класса (рис. 11б).

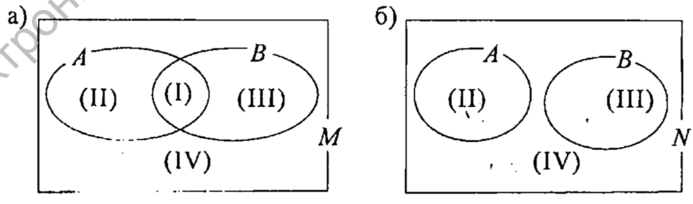


Рис. 11

Пример 9. Из 40 студентов группы 35 человек успешно сдали экзамен по математике, а 37 – по русскому языку. Двое студентов получили неудовлетворительные отметки по обоим предметам. Сколько студентов имеют академическую задолженность?

Решение. *1 способ.* Пусть C – множество студентов группы, M – множество студентов, успешно сдавших математику, P – множество студентов, успешно сдавших русский язык.

Тогда $m(C) = 40$, $m(M) = 35$, $m(P) = 37$.

$M \cup P$ – множество студентов, успешно сдавших хотя бы один экзамен.

$m(M \cup P) = 40 - 2 = 38$ (т.е. 2 студента не сдали ни одного экзамена). Получаем: $m(M \cup P) = m(M) + m(P) - m(M \cap P)$,

$38 = 35 + 37 - m(M \cap P)$,отсюда $m(M \cap P) = 35 + 37 - 38 = 34$, т.е. 34 студента успешно сдали оба экзамена и не имеют академической задолженности.

Тогда $40 - 34 = 6$ студентов имеют академическую задолженность.

2 способ. Задачи такого типа удобно решать с использованием диаграмм Эйлера-Венна. Изобразим множества C, M, P на диаграмме Эйлера-Венна. Множество C разбилось на 4 класса с помощью двух свойств M и P. Теперь достаточно вписать число элементов каждого из классов разбиения и получим наглядную картину, позволяющую ответить на вопрос задачи (рис. 12).

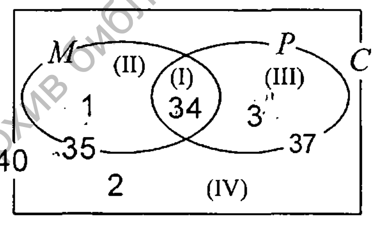


Рис. 12

В классе IV – 2 элемента (студенты, не сдавшие ни одного экзамена); тогда на все остальные классы (I, II, III) остается 38 человек. В I и II вместе 35 человек, тогда в классе III остается $38 - 35 = 3$. В I и III вместе 37 человек, тогда в I: $37 - 3 = 34$. Во II классе $35 - 34 = 1$ человек.

Итак, студенты, имеющие академическую задолженность – это элементы классов II, III, IV: $1 + 2 + 3 = 6$.

47. Пусть A – множество всех прямоугольных треугольников; B – множество равнобедренных треугольников.

Запишите и назовите классы, на которые разбивается множество M всех треугольников с помощью данных двух свойств. Изобразите это разбиение на диаграмме Эйлера-Венна.

48. Запишите и назовите все попарно непересекающиеся подмножества, на которые разбивается множество M студентов 1 курса с помощью свойств «быть отличником», «быть спортсменом», «быть участником художественной самодеятельности». Изобразите эти подмножества на диаграмме Эйлера-Венна.

49. На какие классы разбивают множество N свойства «быть четным», «быть кратным 3», «быть кратным 5»?

50. Изобразите на диаграмме Эйлера-Венна, запишите и назовите классы, на которые разбивается множество действительных чисел с помощью трех свойств: «быть натуральным», «быть рациональным», «быть отрицательным».

51. На какие классы разбивается множество всех точек плоскости:

а) прямой линией;

б) двумя параллельными прямыми;

в) двумя пересекающимися прямыми;

г) окружностью.

52. Проверьте правильность следующих классификаций:

а) треугольники делятся на остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равносторонние, равнобедренные;

б) параллелограммы делятся на ромбы, прямоугольники, параллелограммы, не имеющие оси симметрии;

в) треугольники делятся на разносторонние, равнобедренные и равносторонние;

г) целые числа делятся на положительные и отрицательные;

д) натуральные числа делятся на четные, нечетные и числа, кратные 3;

е) четырехугольники делятся на параллелограммы и трапеции;

ж) рациональные числа делятся на целые и дробные.

53. В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке. 11 – в биологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой?

54. В пионерском лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят

из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов, 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?

55. В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 – в хоккей, 18 – в волейбол. Увлекаются двумя видами спорта – баскетболом и хоккеем – четверо, баскетболом и волейболом – трое, волейболом и хоккеем – пятеро. Трое не увлекаются ни одним видом спорта. Сколько ребят увлекается одновременно тремя видами спорта? Сколько ребят увлекаются лишь одним из этих видов спорта? Сколько ребят увлекаются хотя бы одним видом спорта?

56. В классе 28 учащихся: из них 4 отличника, 14 спортсменов, 18 участников художественной самодеятельности, 2 отличника и спортсмена, 3 отличника и участника художественной самодеятельности, 10 только участников художественной самодеятельности, а 1 – спортсмен, отличник и участник художественной самодеятельности. Сколько учащихся не являются ни отличниками, ни спортсменами, ни участниками художественной самодеятельности? Сколько только отличников?

57. 80 человек знают хотя бы один из трех языков, причем 10 знают только английский. 14 – только немецкий, 20 – только французский, а число знающих все три языка на 2 меньше числа, знающих только немецкий и французский, на 4 меньше числа, знающих только английский и французский и на 6 меньше числа, знающих только английский и немецкий. Сколько человек знают три языка? Французский и немецкий?

58. В классе учатся 40 человек. Из них по русскому языку имеют «пятерки» 19 человек, по математике – 17 человек и по физике 22 человека. Только по одному предмету имеют «пятерки»: по русскому языку – 4 человека, по математике – 4 человека и по физике – 11 человек. Семь человек имеют «пятерки» и по математике, и по физике, из них пятеро имеют «пятерки» и по русскому языку. Сколько человек учатся без «пятерок»? Сколько человек имеют «пятерки» по двум из трех предметов?

59. Из 80 пассажиров поезда Минск – Симферополь знают белорусский, но не украинский – 19 человек, русский, но не украинский – 29, все три языка – 3 пассажира, белорусский и русский – 7, русский и украинский – 7, только два языка – 13 пассажиров. Сколько пассажиров знают только украинский язык? Сколько – белорусский и украинский, но не русский? Сколько пассажиров знают русский язык?

60. В отчете сообщалось, что из 100 учащихся количество детей, изучающих разные языки, таково: все три языка – 5 человек, немецкий и испанский – 10, немецкий и французский – 20, французский и испанский – 8, испанский – 30, немецкий – 23, французский – 50. Отчет был оценен как неудовлетворительный. Почему?

1.5. Декартово произведение множеств. Координаты точки на прямой и плоскости

Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B$ всевозможных пар, первые компоненты которых принадлежат множеству A, вторые – множеству B:

$A \times B = \{(x, y) | \ x \in A \wedge y \in B\}.$

$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$

Начало отсчета (некоторая точка О), масштаб e (единичный отрезок) и направление луча ОХ образуют ***систему координат*** на прямой. Прямая с выбранной на ней системой координат – ***координатная прямая. Координата*** точки M на прямой – это число x, такое что:

а) модуль числа x равен расстоянию от О до M: $|x| = |OM|$;

б) число x положительно, если точка M находится справа от точки О, и число x отрицательно, если точка M находится слева от точки О.

За единицу масштаба e можно взять длину любого отрезка, за начало отсчета – любую точку на прямой. При *переносе* начала отсчета координата произвольной точки M прямой преобразуется по формуле:

$x' = x - a$, где x – старая координата точки M, x' – новая координата точки M, a – координата нового начала отсчета в старой системе.

Расстояние между точками на прямой вычисляется по формуле:

$$|AB| = |в - a|.$$

Совокупность двух взаимно-перпендикулярных координатных прямых с началом отсчета О (точка пересечения прямых) и одинаковым масштабом называют ***декартовой прямоугольной системой координат.*** Одна из прямых называется ***осью абсцисс*** **(ОХ)**, вторая – ***осью ординат*** **(ОУ)**. Положение точки M на плоскости определяется парой чисел (x, y), где x – абсцисса (координата проекции точки M на ось абсцисс), y – ордината (координата проекции точки M на ось ординат).

При переносе начала координат О в точку $O'(a, в)$ координаты произвольной точки $M(x; y)$ изменяются по формуле:

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b \end{cases}$$

Каждой паре действительных чисел (x, y) соответствует одна и только одна точка плоскости и обратно каждой точке на координатной плоскости соответствует одна пара чисел. Это дает возможность изображать декартово произведение двух числовых множеств на координатной плоскости.

Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на плоскости вычисляется так:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример 10. Пусть $A = \{а, о, у\}$, $B = \{к, н\}$. Перечислите элементы множеств $A \times B$ и $B \times A$.

Решение. Выпишем сначала элементы множества $A \times B$ – всевозможные пары, у которых первый элемент из множества A, второй – из B:

$$A \times B = \{(а, к), (а, н), (о, к), (о, н), (у, к), (у, н)\}.$$

Замечаем, что множество $A \times B$ содержит $2 \cdot 3 = 6$ элементов. Элементы множества $B \times A$ запишем в виде таблицы:

B \ A	$а$	$о$	$у$
$к$	$(к, а)$	$(к, о)$	$(к, у)$
$н$	$(н, а)$	$(н, о)$	$(н, у)$

Итак, $B \times A = \{(к, а), (к, о), (к, у), (н, а), (н, о), (н, у)\}$. Видно, что множества $A \times B$ и $B \times A$ содержат различные пары, т.е.

$A \times B \neq B \times A$.

Множества $B \times A$ также состоит из 6 элементов.

Пример 11. Докажите, что $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Решение. Установить справедливость этого равенства можно, показав, что любая пара (x, y) из множества $A \times (B \cap C)$ принадлежит множеству $(A \times B) \cap (A \times C)$ и наоборот (см. **пример 6**).

Пример 12. Изобразить на координатной плоскости множество точек $A \times B$, если:

а) $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{-1, 2\}$;

б) $A = \{x | x \in R, 1 \le x \le 4\}$, $B = \{y | y \in R, 2 \le y \le 6\}$.

Решение. а) $A \times B = \{(1; -1), (1, 2), (2, -1), (2, 2), (5, -1), (5, 2)\}$. На координатной плоскости это множество изобразится в виде 6 отдельных точек (рис. 13а).

б) Множество $A \times B$ состоит из точек, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $1 \le x \le 4$, а ординаты – неравенству $2 \le y \le 6$. Это прямоугольник $KMPT$ (рис. 13б).

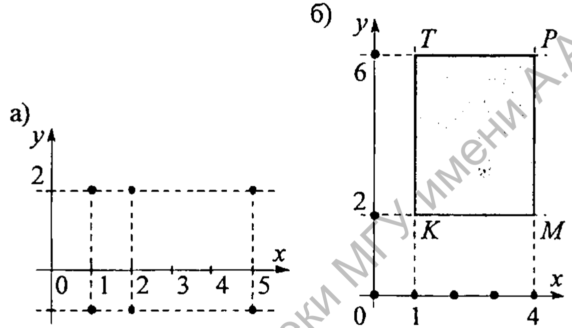


Рис. 13

З а д а н и я

61. Известно, что $(c, d) \in A \times B$. Какие из следующих высказываний являются истинными:

а) $c \in A$; б) $d \notin B$; в) $c \notin A$; г) $d \in B$;

д) $(c \in A) \wedge (d \in B)$; е) $(c \notin A) \wedge (d \in B)$;

ж) $(c \in A) \wedge (d \notin B)$?

62. Что можно сказать о множестве $A \times B$, если $A = \varnothing$?

63. Даны множества $A = \{a, в, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3, 4\}$:

а) запишите множества $A \times B, A \times C, B \times C$;

б) верно ли, что $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$?

64. Выпишите все двузначные числа, у которых число десятков четное, а число единиц кратно 3. Сколько чисел получилось?

65. Составьте все дроби, числитель и знаменатель которых – однозначное число из множества $\{3, 4, 5, 7\}$. Сколько дробей получилось?

66. Завтрак состоит из двух блюд. На второе предлагается: рыба, сосиски, пельмени, оладьи. На третье можно выбирать чай, кофе, молоко. Какие завтраки можно составить из этих блюд?

67. После переноса начала координат координата точки $A(-7)$ стала равна 2. В какую точку перенесено начало координат?

68. После переноса начала координат в точку $O'(3)$ координата точки B стала равна 8. Найдите старую координату точки B.

69. В какую точку перейдет точка $A(-1)$, если она сначала сдвинута вправо на 7 единиц, потом влево на 10 единиц?

70. Найдите точки, отстоящие от точки $A(3)$ на 7 единиц.

71. Начало координат перенесено в точку O' (4; -3). Каковы новые координаты точек $A(5; 2)$, $B(-3; -1)$, $C(2; -6)$?

72. Найдите координаты точки A, если после переноса начала координат в точку O' (-5; -1) ее новые координаты равны 2 и 4.

73. Найдите расстояние между точками $A(a)$ и $B(в)$, если:

а) $a = -6$, $в = 12$;

б) $a = 7$, $в = -4$;

в) $a = -12$, $в = -6$;

г) $a = -6$, $в = -19$.

74. Найдите длину отрезка MP с концами:

а) $M(-3; 2)$ и $P(5; -2)$;

б) $M(2; -7)$ и $P(6; 4)$;

75. Изобразите на координатной плоскости элементы декартова произведения множеств A и B, если:

а) $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 7\}$;

б) $A = \{x| x \in N, x \le 5\}$, $B = \{y| y \in N, y \le 2\}$;

в) $A = \{x| x \in R, 1 \le x \le 2\}$, $B = \{y| y \in R, 0 \le y \le 1\}$;

г) $A = \{x| x \in R, -1 < x < 1\}$, $B = \{y| y \in R, 0 < y < 2\}$;

д) $A = \{x| x \in N, x \le 1\}$, $B = \{y| y \in R, -2 \le y \le 3\}$;

е) $A = \{x| x \in R, -2 \le x \le 3\}$, $B = \{y| y \in N, y \le 1\}$;

ж) $A = \{x| x \in Z, -3 < x < 3\}$, $B = \{y| y \in R, -2 \le y \le 5\}$;

з) $A = \{x| x \in R, x < 3\}$, $B = \{y| y \in N, y \le 4\}$;

и) $A = \{x| x \in N, x \le 5\}$, $B = \{y| y \in R, y > 5\}$;

к) $A = \{x| x \in R, -1 \le x \le 3\}$, $B = \{y| y \in R, y \le 3\}$.

76. Все элементы декартова произведения множеств X и $У$ изображены на координатной плоскости. Запишите множества X и $У$.

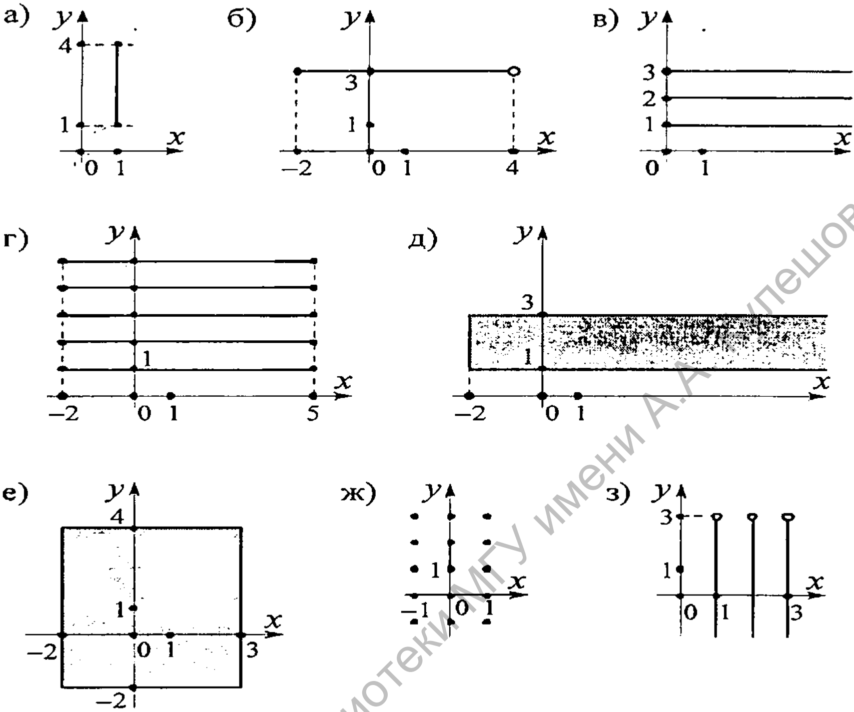


Рис. 14

2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

2.1. Понятие о комбинаторной задаче. Правила суммы и произведения

Пусть даны множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Возьмем элементы $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$ и образуем упорядоченную систему из n элементов: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, которую назовем ***кортежем*** длины n. В отличие от множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ в кортеже некоторые элементы могут оказаться равными. Кортежи длины 2 называются парами, длины 3 – тройками и т.д., длины n – энками. Два кортежа называются равными, если они имеют одинаковую длину и одинаковые компоненты с одинаковыми номерами.

Декартовым произведением к множеств $A_1, A_2, \ldots, A_к$ называется множество всевозможных кортежей длины к: $(a_1, a_2, \ldots, a_к)$ таких, что $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_к \in A_к$.

Число элементов декартова произведения множеств $A_1, A_2, \ldots, A_к$ вычисляется так:

$$m(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_к) = m(A_1) \cdot m(A_2) \cdot \ldots \cdot m(A_к).$$

Для двух множеств A и B эта формула выглядит так:

$$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B).$$

Задачи, в которых приходится выбирать из некоторого множества объектов его подмножества, располагать элементы какого-то множества в том или ином порядке и т.д., называются ***комбинаторными.*** Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называют ***комбинаторикой.***

Решение большинства комбинаторных задач основано на двух простых правилах, которые называют правилами суммы и произведения.

Правило суммы позволяет найти число элементов в объединении двух или нескольких конечных множеств, которые попарно не пересекаются:

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_к) = m(A_1) + m(A_2) + \ldots + m(A_к).$$

Формулируется это правило так: *если выбор одного объекта можно осуществить p_1 различными способами, второго – p_2 различными* *способами, отличными от предыдущих и т.д., то выбор какого-нибудь одного объекта из всех данных объектов можно осуществить $p_1 + p_2 + ... + p_к$ способами.*

Правило произведения позволяет найти число элементов декартова произведения *к* множеств. Это правило формулируется так: *если элемент x_1 можно выбрать n_1 способами, элемент x_2 – n_2 способами и т.д., элемент $x_к$ – $n_к$ способами, то кортеж $(x_1, x_2, ..., x_к)$ можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_к$ способами.*

Пример 13. В столовой имеется 4 первых блюда и 6 вторых.

а) Сколькими способами можно выбрать одно блюдо (первое или второе)?

б) Сколькими способами можно составить из них обед из двух блюд?

Решение. а) Имеется 2 конечных множества A= $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ – множество первых блюд, B= $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ – множество вторых блюд. Стоит задача выбрать объект, который принадлежит или множеству A, или множеству B.

Поскольку множества A и B не пересекаются, то количество объектов, которые принадлежат или A, или B – это то же количество, что и объектов, принадлежащих множеству A $\cup$ B.

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Поэтому по правилу суммы одно блюдо можно выбрать 4 + 6 = 10 способами.

б) В данной задаче надо подсчитать, сколько пар элементов по условию задачи можно составить. Поскольку множество A – четырехэлементное, то имеется 4 возможности выбора первого блюда. Множество B – шестиэлементное, поэтому имеется 6 возможностей второго блюда при каждом выборе первого. Всего возможностей выбора первого и второго блюда (обеда) $4 \cdot 6 = 24$.

Задания

77. Сравните понятие кортежа и множества. В чем их сходство и различие?

78. Запишите множество различных букв слова «параллелограмм». Запишите кортеж букв в этом слове.

79. На множестве N задано уравнение: $\frac{x}{y} = \frac{t}{z}$. Назовите несколько четверок чисел, принадлежащих множеству T решений данного уравнения. Верно ли, что $(3, 1, 9, 3) \in T$?

80. Образуйте всевозможные кортежи длины 3 из элементов множества $A = \{a, в, c, к\}$.

81. Используя цифры 2, 7, 0, 4, запишите всевозможные трехзначные числа (цифры в записи числа не повторяются).

82. Даны множества $A = \{a, в, c\}$, $B = \{к, п\}$, $C = \{x, y, p\}$. Запишите множества $A \times B \times C$ и $B \times A \times C$. Сравните их. Сколько элементов содержат эти множества?

83. Имеются 4 ручки и 5 карандашей. Сколькими способами можно выбрать один предмет: либо ручку, либо карандаш?

84. Имеются 5 сортов конвертов без марок и 4 сорта марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку?

85. Два пункта А и В связаны дорогами. Три дороги идут через пункт Д и две – через пункт С. Пункты С и Д между собой не связаны дорогами. Сколькими способами можно выбрать дорогу из А в В?

86. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный?

87. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами им могут быть поставлены отметки, если известно, что ни один из студентов не получил неудовлетворительной оценки?

88. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2. 3, 4, 5, если каждую цифру можно использовать: а) несколько раз; б) только один раз?

89. Сколько чисел, меньших, чем миллион, можно записать с помощью цифр 9, 8, 7?

90. Составьте команду космического корабля, если на место командира имеется 4 кандидатуры, на место инженера – 3, на место врача – 3. Сколькими способами это можно сделать?

91. В библиотеке имеется 10 различных книг А.С. Пушкина, 8 различных книг И.С. Тургенева и 7 различных книг Н.В. Гоголя. Сколькими способами ученик может сделать выбор трех книг так, чтобы среди них была одна книга А.С. Пушкина, одна книга И.С. Тургенева и одна книга Н.В. Гоголя?

92. Из города A в город B ведет 2 дороги, а в город C – 3 дороги. В город D из города B ведет 3 дороги, а из города C – 4 дороги. Города B и C дорогами не соединяются. Сколько различных автобусных маршрутов можно провести между городами A и D?

2.2. Комбинаторные соединения

Конечное множество называется ***упорядоченным,*** если его элементы некоторым образом пронумерованы. В отличие от кортежей в упорядоченном множестве все элементы различны.

Всякое упорядоченное n-множество называется ***перестановкой без повторений***, составленной из всех его элементов.

Число перестановок из n элементов вычисляется по формуле: $P_n = n!$, где $n!$ – ***n факториал*** – произведение всех натуральных чисел от 1 до n, например: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Размещением без повторений из n элементов по k элементов называется каждое упорядоченное k-элементное подмножество данного n-элементного множества.

Число размещений без повторений из n элементов по k элементов определяется по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-k+1).$$

Сочетанием из n элементов по k элементов называется любое k-элементное подмножество данного n-элементного множества.

Число сочетаний из n элементов по k элементов определяется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Размещением с повторениями из n элементов по k элементов называется кортеж длины k, составленный из элементов n-элементного множества (не обязательно $n \geq k$).

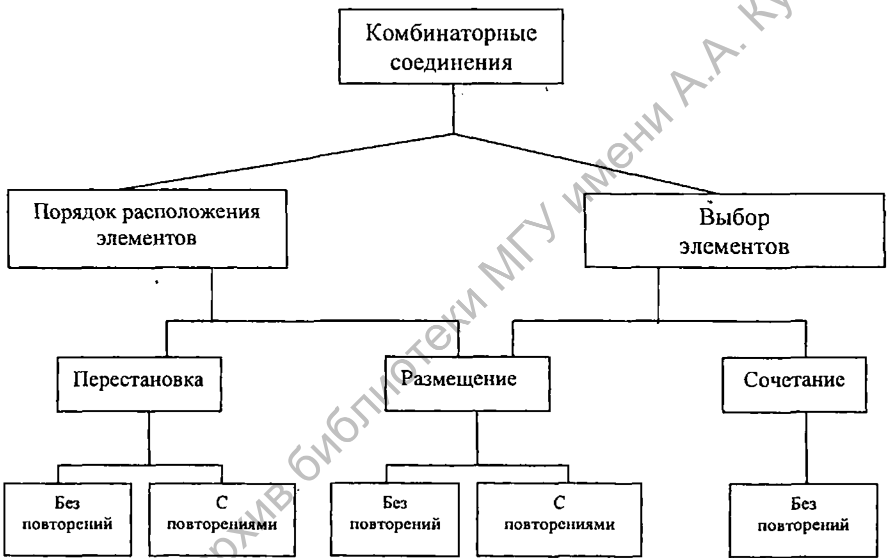
Число размещений с повторениями из n элементов по k элементов определяется по формуле:

$$\overline{A_n^k} = n^k.$$

Перестановка с повторениями – кортеж длины n, в котором один элемент повторяется n_1 раз, второй – n_2 раз и т.д., k-тый элемент повторяется n_k раз ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$). Число таких перестановок определяется по формуле:

$$\overline{P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}} = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Все выше рассмотренные комбинаторные соединения различаются по трем признакам. Они приведены в следующей схеме.



Пример 14. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр:

а) 1, 2, 3, 4, 5 (без повторений);

б) 1, 2, 3, 4 (без повторений);

в) 1, 2, 3?

Решение. а) Числа отличаются друг от друга либо выбором цифр, либо порядком их расположения. Речь идет о выделении упорядоченных четырехэлементных подмножеств данного множества, содержащего 5 элементов, т.е. о размещениях без повторений из 5 элементов по 4.

$$A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

б) Мы составляем четырехзначные числа с помощью 4 цифр, поэтому различаться они будут только порядком расположения цифр, т.е. речь идет о перестановках без повторений из 4 элементов.

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

в) В данном случае выделяются 4 цифры из 3, поэтому будут повторения цифр. Таким образом составляемые числа имеют повторения, а также отличаются друг от друга либо выбором цифр, либо порядком их расположения, т.е. речь идет о размещениях с повторениями из 3 элементов по 4.

$$\overline{A_3^4} = 3^4 = 81.$$

Пример 15. Сколькими способами можно переставить буквы в слове МИССИСИПИ?

Решение. Элементы (буквы) не выбираются. Получаемые «слова» будут различаться порядком следования букв. Очевидно, что в «словах» будут одинаковые буквы: И – 4 раза, С – 3 раза, М – 1 раз, Р – 1 раз. Поэтому речь идет о перестановках с повторениями.

$$\overline{P_{4,3,1,1}} = \frac{(4+3+1+1)!}{4!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = 2520.$$

Пример 16. Сколько различных произведений можно получить, используя в качестве множителей три различные числа из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9?

Решение. Будем считать, что $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ – это то же произведение, что и $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$. Поэтому произведения отличаются друг от друга только выбором чисел, и речь идет о сочетаниях без повторений из 7 элементов по 3.

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 35.$$

Задания

93. Из 8 членов месткома надо избрать председателя, его заместителя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

94. Сколькими способами можно рассадить 5 учащихся, если в классе 40 мест?

95. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из 6 различных красок?

96. Во взводе 5 сержантов и 50 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из одного сержанта и трех солдат?

97.У Маши 7 книг, у Кати 9 книг. Сколькими способами можно обменять 2 книги одной девочки на 2 книги другой?

98. Сколькими способами можно обить 6 различных стульев, если имеются 12 сортов обивочного материала?

99. Сколькими способами можно рассадить 12 гостей на 12 различных стульев?

100. На окружности отмечено 8 различных точек.

а) Сколько хорд можно провести, соединяя любые две из этих точек?

б) Сколько различных треугольников с вершинами в данных точках можно построить?

в) Сколько выпуклых четырехугольников с вершинами в данных точках можно построить?

г) Сколько невыпуклых четырехугольников с вершинами в данных точках можно построить?

101. Сколькими способами можно составить 3-цветный флаг с тремя горизонтальными полосами одной и той же ширины, если есть материал 5 различных цветов? Решите эту задачу, если одна из полос должна быть красной.

102. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танцев?

103. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было выполнять непосредственно переводы с любого из 5 языков (русского, английского, немецкого, французского и итальянского) на любой другой язык?

104. В классе изучается 10 предметов. В понедельник 5 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

105. Тридцать различных букв русского алфавита изображены на карточках. Сколько различных четырехбуквенных «слов» можно из них составить?

106. 25 учителей, встретившись перед педсоветом, обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано всего рукопожатий?

107. 25 выпускников школы решили обменяться фотокарточками. Сколько было всего заказано фотокарточек?

108. В спортобществе 10 сильных лыжников и 8 сильных лыжниц. Сколькими способами можно сформировать команду из четырех лыжников и трех лыжниц?

109. На кафедре математики 9 преподавателей. Сколькими способами можно составить расписание консультаций на 9 дней, если каждый преподаватель дает консультацию ровно один раз?

110. Сколько чисел, больших 100, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, если в записи числа цифры не повторяются?

111. Пять различных предметов раздают 8 людям, причем может случиться, что некоторые получают по нескольку предметов. Сколькими способами может быть произведен раздел?

112. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «математика»?

113. В доме отдыха каждый день давали либо яблоко, либо апельсин, либо мандарин. В течение 24 дней было выдано 9 яблок, 7 мандаринов, 8 апельсинов. Сколько различных вариантов могло быть?

114. Сколько разных комбинаций ответов можно дать на 8 вопросов, если на каждый вопрос отвечают «да» или «нет»?

115. Сколько имеется различных шестизначных чисел, у которых 3 цифры четные и 3 нечетные?

116. Автомобильные номера состоят из трех букв, за которыми идут 4 цифры, например МКМ 07–37. Сколько машин можно снабдить различными номерами, если используется 25 букв (буквы Ь, Ъ, Ё, Й и Ы не используются)?

117. В двоичной системе счисления, применяемой в ЭВМ, существует только 2 знака: 0 и 1 (иначе: включено – выключено, соединено – разъединено, есть ток – нет тока). В одной из ЭВМ каждое «машинное слово» записывается в ячейке «памяти», содержащей 37 пронумерованных двоичных разрядов. Сколько различных «слов»можно записать в такой ячейке?

118. В телефонной сети города Безпятска запрещен набор цифры 5. Сколько различных «безпятских» абонентов можно вызвать набором четырехзначного номера, если ни один номер не должен начинаться с нуля?

119. Сколько разных видов ожерелья можно получить из 10 просверленных шариков из оргстекла: 5 белых, 2 красных и 3 голубых?

120. Сколько различных символов можно передать азбукой Морзе, в которой используются 2 знака: точка, тире, в последовательности не более 5 знаков?

ЛИТЕРАТУРА

1. **Антипов, И.Н.** Избранные вопросы математики: факультативный курс для 9 кл. / И.Н. Антипов [и др.]. – М.: Просвещение, 1979. – 191 с.
2. **Виленкин, Н.Я.** Математика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / Н.Я. Виленкин [и др.]. – М.: Просвещение, 1977. – 352 с.
3. **Виленкин, Н.Я.** Задачник-практикум по математике: учеб. пособие для студентов-заочников пед. ин-тов / Н.Я. Виленкин [и др.]; под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977. – 205 с.
4. **Кожух, І.Р.** Зборнік задач па матэматыцы: вучэб. дапам. для пед. ВНУ / І.Р. Кожух. – Мінск: Выш. школа, 1994. – 162 с.
5. **Кожух, І.Р.** Матэматыка: вучэб. дапам. для пед. ВНУ / І.Р. Кожух. – Мінск: Выш. школа, 1993. – 350 с.
6. **Стойлова, Л.П.** Математика: учеб. пособие для студентов-заочников пед. ин-тов: в 2 ч. / Л.П. Стойлова, Н.Я. Виленкин, Н.Н. Лаврова. – М.: Просвещение, 1990. – Ч. 1. – 175 с.
7. **Столяр, А.А.** Математика: учеб. пособие для студентов 1 курса пед. ин-тов / А.А. Столяр, М.П. Лельчук. – Минск: Выш. школа, 1975. – 272 с.
8. **Халамайзер, А.Я.** Комбинаторика и бином Ньютона: пособие для учащихся / А.Я. Халамайзер. – М.: Просвещение, 1980. – 32 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Лещенко Лариса Васильевна
Николаева Валентина Владимировна

МНОЖЕСТВО. КОМБИНАТОРИКА

Методические указания
к практическим занятиям

Технический редактор *А.Н. Гладун*
Компьютерная верстка *А.Л. Позняков*

Подписано в печать 21.09.2009.
Формат 60х84/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 2,1. Уч.-изд. л. 1,9. Тираж 50 экз. Заказ № 378.

Учреждение образования "Могилевский государственный университет
им. А.А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004 г.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
УО "МГУ им. А.А. Кулешова". 212022, Могилев, Космонавтов, 1