Л.В. Лещенко
В.В. Николаева
Л.А. Бондарева

Методические указания к контрольным заданиям
ПО МАТЕМАТИКЕ

Для студентов
педагогического факультета

Могилев 2006

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА”

Л.В. Лещенко,
В.В. Николаева,
Л.А. Бондарева

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Для студентов
педагогического факультета

им.А.А.Кулешова

Могилев 2006

УДК 372.851(076)
ББК 22.1
Л54

*Печатается по решению редакционно-издательского
и экспертного совета МГУ им. А.А. Кулешова*

Рецензент
кандидат физико-математических наук доцент
МГУ им. А.А. Кулешова
В.Г. Иванов

Лещенко, Л.В.
Л54 Методические указания к контрольным заданиям по математике / Л.В. Лещенко, В.В. Николаева, Л.А. Бондарева. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006. – 36 с.

Данное издание содержит необходимый минимум теоретических положений, образцы оформления, методические указания к выполнению индивидуальных контрольных заданий по математике.

Предназначено студентам педагогического факультета заочного и дневного отделений.

УДК 372.851(076)
ББК 22.1

1. Суждения и отношения между ними

Пример 1.1. Установить отношение между суждениями:

$$F_1 = A \sim (\neg B \vee \neg C) \quad \text{и} \quad F_2 = A \vee \neg (B \wedge C).$$

Сформулировать суждения, соответствующие формулам F_1 **и** F_2.

Решение. Суждения могут быть совместимыми или несовместимыми. Между совместимыми суждениями могут устанавливаться следующие отношения: равносильность, подчинение (логическое следование), частичная совместимость, а между несовместимыми – противоречие, противоположность.

Для определения вида отношения между данными суждениями F_1 и F_2 построим таблицу истинности для обеих формул.

	A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$\neg B \vee \neg C$	$A \sim (\neg B \vee \neg C)$	$B \wedge C$	$\neg (B \wedge C)$	$A \vee \neg (B \wedge C)$
1	И	И	И	Л	Л	Л	Л	И	Л	И
2	И	И	Л	Л	И	И	И	Л	И	И
3	И	Л	И	И	Л	И	И	Л	И	И
4	И	Л	Л	И	И	И	И	Л	И	И
5	Л	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
6	Л	И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И
7	Л	Л	И	И	Л	И	Л	Л	И	И
8	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И	И
							F_1			F_2

Сравнивая столбцы таблицы, соответствующие формулам F_1 и F_2, видим, что F_1 и F_2 в строках 2, 3, 4 одновременно истинны. Значит, эти суждения совместимые. Определим вид совместимости.

Суждения F_1 и F_2 не являются равносильными, т.к. столбцы их значений полностью не совпадают (в строках 1, 5, 6, 7, 8 у них разные значения), т.е. неверно, что $F_1 \equiv F_2$.

Проверим логическое следование.

1) $F_1 \Rightarrow F_2$? Это логическое следование верно в том случае, если нет такого набора значений суждений A, B, C, при которых F_1 = И, а F_2 = Л. По таблице видим, что это требование нарушено в строке 5. Значит, данное логическое следование ~~не~~правильное, т.е. ~~не~~верно, что из суждения F_1 логически следует суждение F_2.

2) $F_2 \Rightarrow F_1$? Это логическое следование верно в том случае, если нет такого набора значений суждений A, B, C, при которых $F_2 =$ И, а $F_1 =$ Л. Это требование нарушено в строках 1, 6, 7, 8. Значит, данное логическое следование неправильное, т.е. неверно, что из суждения F_2 логически следует суждение F_1.

Суждения F_1 и F_2 не находятся в отношении логического следования.

Суждения F_1 и F_2 находятся в отношении частичной совместимости, так как нет такого набора значений суждений A, B, C, при которых $F_1 =$ Л, $F_2 =$ Л.

Сформулируем суждения, соответствующие формулам F_1 и F_2.

Сначала сформулируем простые суждения A, B, C (любого содержания, но связанные между собой по смыслу). Пусть:

A – "Я прочитаю книгу И. Мележа "Люди на болоте";

B – "Эту книгу прочитает моя подруга";

C – "Подруга отнесет книгу в библиотеку".

Тогда получим сложные суждения:

F_1: *"Я прочитаю книгу Мележа "Люди на болоте" тогда и только тогда, когда эту книгу не прочитает моя подруга или не отнесет ее сразу в библиотеку";*

F_2: *"Я прочитаю книгу Мележа "Люди на болоте", или неверно, что подруга прочитает эту книгу и отнесет ее в библиотеку".*

2. Логическая функция и ее область истинности

Пример 2.1. Отметить штриховкой на диаграмме Эйлера-Венна область истинности логической функции: $F(x) = (A(x) \supset \neg B(x)) \wedge C(x)$.

Решение. Пусть:

E_A – область истинности $A(x)$;

E_B – область истинности $B(x)$;

E_C – область истинности $C(x)$;

E – область истинности $F(x)$.

Область истинности E логической функции $F(x)$ можно найти разными способами.

Первый способ. Определим условия, при которых логическая функция $F(x)$ превращается в истинное суждение. Иначе говоря, решим логическое уравнение $(A(x) \supset \neg B(x)) \wedge C(x) =$ И.

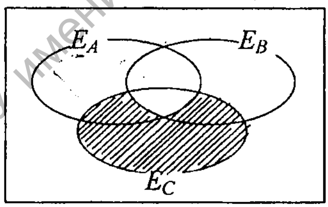
Исходя из определений логических операций, входящих в $F(x)$, получаем:

$$\begin{cases} A(x) \supset \neg B(x) = \text{И} \\ C(x) = \text{И} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(x) = \text{И} \\ \neg B(x) = \text{И} \\ C(x) = \text{И} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A(x) = \text{Л} \\ \neg B(x) = \text{И} \\ C(x) = \text{И} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A(x) = \text{Л} \\ \neg B(x) = \text{Л} \\ C(x) = \text{И} \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} A(x) = \text{И} \\ B(x) = \text{Л} \\ C(x) = \text{И} \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) = \text{Л} \\ B(x) = \text{Л} \\ C(x) = \text{И} \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) = \text{Л} \\ B(x) = \text{И} \\ C(x) = \text{И} \end{cases}$$

Получили три решения. Это значит, что при таких наборах значений $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ логическая функция $F(x)$ превращается в истинное суждение. Отметим на диаграмме эти три области – область истинности E функции $F(x)$.



Второй способ – с помощью таблицы истинности.

1. Строим таблицу истинности для $F(x) = (A(x) \supset \neg B(x)) \wedge C(x)$.
2. Выбираем в таблице те строки, где $F(x)$ принимает значение И.
3. Показываем на диаграмме области, соответствующие значениям $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ в выбранных строках.

3. Умозаключения, основанные на правилах логического следования

Пример 3.1. Проанализировать рассуждение.

“Если завтра будет хорошая погода, то я пойду в кино, если сдам зачет. Завтра будет хорошая погода, а я не сдала зачет. Следовательно, я не пойду в кино”.

Решениеы Данное рассуждение состоит из трех суждений: первые два суждения – посылки, третье – заключение. Проанализировать рассуждение означает: установить, следует ли из данных посылок данное заключение.

Определим логическую структуру посылок и заключения.

Обозначим простые суждения:

A: "Завтра будет хорошая погода"

B: "Я сдала зачет"

C: "Я пойду в кино".

Получаем, что первое суждение (первая посылка) имеет структуру $A \supset (B \supset C)$; вторая посылка имеет структуру $A \wedge \neg B$; заключение – $\neg C$.

Логическая структура всего рассуждения будет такой:

$$A \supset (B \supset C),\ \ A \wedge \neg B \Rightarrow \neg C.$$

Выяснить, является ли правильным полученное логическое следование, можно двумя способами.

Первый способ. Метод "от противного".

Предположим, что следование неправильное. Это значит, что существует такой набор истинностных значений A, B, C, при котором обе посылки одновременно истинны, а заключение – ложно.

Получаем систему логических уравнений: $\begin{cases} A \supset (B \supset C) = \text{И} \\ A \wedge \neg B = \text{И} \\ \neg C = \text{Л} \end{cases}$.

Будем решать эту систему, т.е. вычислять значения истинности суждений A, B, C. Из третьего (самого простого) уравнения имеем: $C = \text{И}$. Далее, из второго уравнения получаем: $A = \text{И}$, $\neg B = \text{И}$ или $B = \text{Л}$. Подставим полученные значения A, B и C в первое уравнение:

$$\text{И} \supset (\text{Л} \supset \text{И}) = \text{И}\ ,\quad \text{И} \supset \text{И} = \text{И},\quad \text{И} = \text{И}.$$

Противоречия не получили – система решается. Это значит, что предположение верное.

Таким образом, следование (и рассуждение) неправильное.

Второй способ – с помощью таблицы истинности.

1. Строим таблицу истинности для обеих посылок и заключения.

2. Выбираем строки, в которых обе посылки одновременно истинны.

3. Выясняем значение истинности заключения в этих строках:

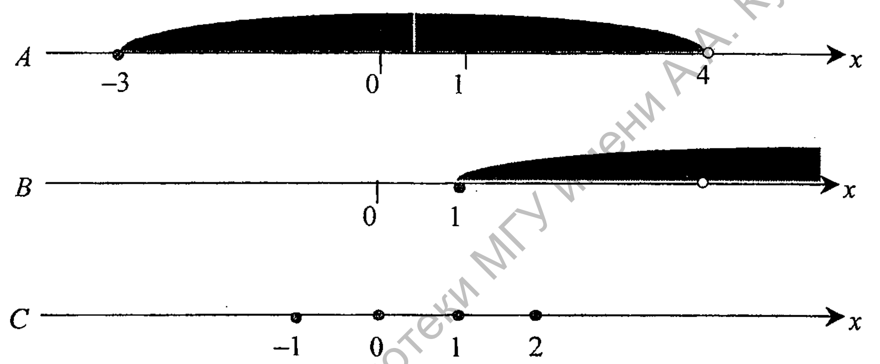
а) если значение истинности заключения во всех отмеченных строках – И, то делаем вывод, что логическое следование правильное;

б) если хотя бы в одной из отмеченных строк значение истинности заключения – Л, то делаем вывод, что логическое следование неправильное.

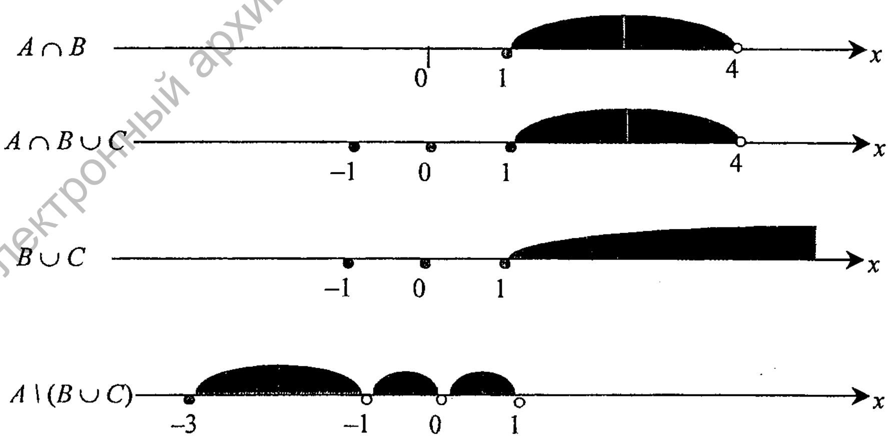
4. Операции над числовыми множествами

Пример 4.1. Даны числовые множества A, B, C :
$A=\{x/x\in R, -3\ \le x<4\}$, $B=\{x/x\in R, x\ge 1\}$, $C=\{x/x\in Z, -1\le x\le 2\}$.
а) Найти множества: $A\cap B\cup C$ и $A\setminus(B\cup C)$.
б) Построить декартово произведение $A\times B$ на координатной плоскости.

Решение. а) Отметим каждое из множеств A, B, C на числовой прямой (можно на одной прямой все множества или каждое множество – на отдельной прямой):



Теперь найдем множества $A\cap\ B\ \cup C$ и $A\setminus(B\ \cup C)$.



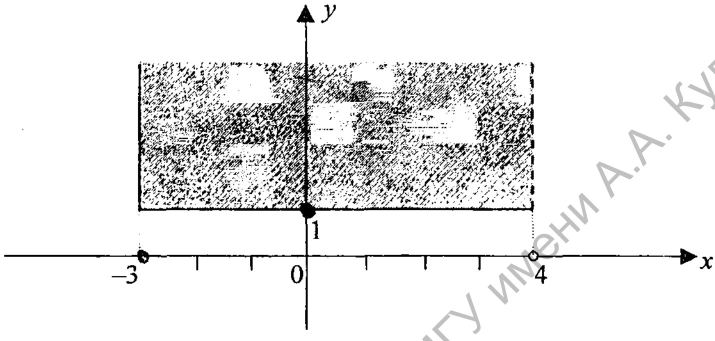
$A \cap B = \{x/x \in R, 1 \leq x < 4\}$ или $A \cap B = [1, 4)$;

$A \cap B \cup C = \{-1, 0\} \cup [1, 4)$.

$B \cup C = \{-1, 0\} \cup [1, +\infty)$;

$A \setminus (B \cup C). = [-3,-1) \cup]-1, 0) \cup]0, 1)$.

б) Построим прямоугольную систему координат. Отметим на оси OX элементы множества A, на оси OY – элементы множества B.



Декартово произведение $A \times B$ – заштрихованная часть плоскости.

5. Разбиение множества на классы. Отношения между множествами

Пример 5.1. При опросе 70 человек оказалось: английский язык знают 36 человек, немецкий – 28, французский – 20; 10 человек владеют английским и французским языками, 12 – немецким и французским, 14 – английским и немецким; 17 человек не знают ни одного из названных иностранных языков.

Пусть: I – множество опрошенных людей;

A – множество людей, владеющих английским языком;

B – множество людей, владеющих немецким языком;

C – множество людей, знающих французский язык.

а) Отметить штриховкой на диаграмме Эйлера-Венна множества

$$X = (\overline{A} \cup B) \cap C \quad \text{и} \quad Y = (A \setminus B) \cup C$$

и сформулировать характеристическое свойство элементов этих множеств.

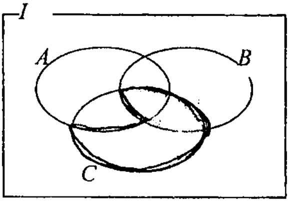
б) В каком отношении находятся множества X и Y?

в) Сколько элементов содержат множества X и Y?

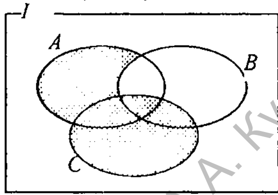
Сколько человек знают только один иностранный язык?

Решение. а) Построим диаграммы Венна для множеств I, A, B, C и отметим штриховкой множества X и Y:

$X = (\overline{A} \cup B) \cap C$



$Y = (A \setminus B) \cup C$



Сформулируем свойства элементов множеств X и Y:

X – множество студентов, знающих французский язык, кроме тех, кто знает только ~~немецкий~~ фр и английский языки;

Y – множество студентов, знающих французский язык или только английский.

б) Между двумя множествами могут быть следующие отношения: пересечение, включение, равенство, непересечение. Из диаграмм видно, что множество X является частью множества Y, т.е. множество X включается во множество Y: $X \subset Y$.

в) С помощью трех свойств (A, B, C) множество I разбивается на 8 классов (рис. 1).

Отметим на диаграмме числа, заданные условием задачи (рис. 2):

$m(I) = 70$; $m(A) = 36$; $m(B) = 28$; $m(C) = 20$;

$m(A \cap B) = 14$ (I + II); $m(B \cap C) = 12$ (I + III); $m(A \cap C) = 10$ (I + IV).

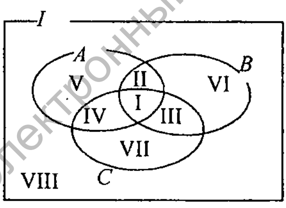


Рис. 1

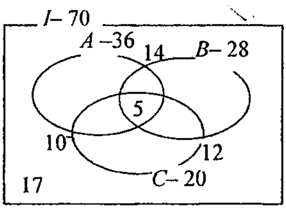


Рис. 2

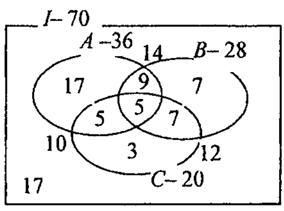


Рис. 3

Требуется определить количество элементов в каждом из восьми классов в отдельности.

В классе VIII – 17 элементов (по условию).

Тогда 70 – 17 = 53 – количество элементов во множестве $A \cup B \cup C$.
Из теории известно равенство:
$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(B \cap C) -$
$- m(A \cap C) + m(A \cap B \cap C)$.
Подставим в это равенство известные числа и выполним вычисления:
$53 = 36 + 28 + 20 - 14 - 12 - 10 + m(A \cap B \cap C)$;
$53 = 48 + m(A \cap B \cap C)$.
$m(A \cap B \cap C) = 53 - 48 = 5$ – количество элементов в классе I (рис. 2).
Дальше последовательно будем вычислять количество элементов в остальных классах и отмечать это на диаграмме (рис. 3):

$14 - 5 = 9$ (II); $28 - (9 + 7 + 5) = 7$ (VI);
$12 - 5 = 7$ (III); $20 - (7 + 5 + 5) = 3$ (VII);
$10 - 5 = 5$ (IV); $36 - (9 + 5 + 5) = 17$ (V).

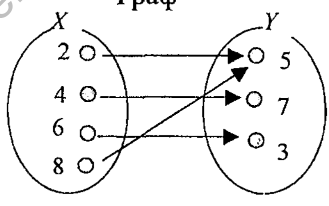
Пользуясь полученной диаграммой (рис. 3), можно ответить на вопросы задачи:
$m(X) = 5 + 7 + 3 = 15$ (I + III + VII);
$m(Y) = 3 + 5 + 7 + 5 + 17 = 37$ (I + III + VI + IV +VII).
г) Количество студентов, которые знают только один иностранный язык, равно: $17 + 7 + 3 = 27$ (V + VI + VII).

6. Соответствие между множествами. Виды соответствий

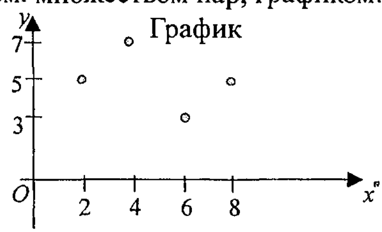
Пример 6.1. Пусть $X = \{2, 4, 6, 8\}$, $Y = \{3, 5, 7\}$.
Между элементами множеств X и Y задано соответствие R: "числа x и y при делении на 3 дают одинаковый остаток".
а) Задать соответствие R графом, множеством пар, графиком;
б) Указать вид соответствия.

Решение.
а) Зададим соответствие R графом, множеством пар, графиком:

Граф

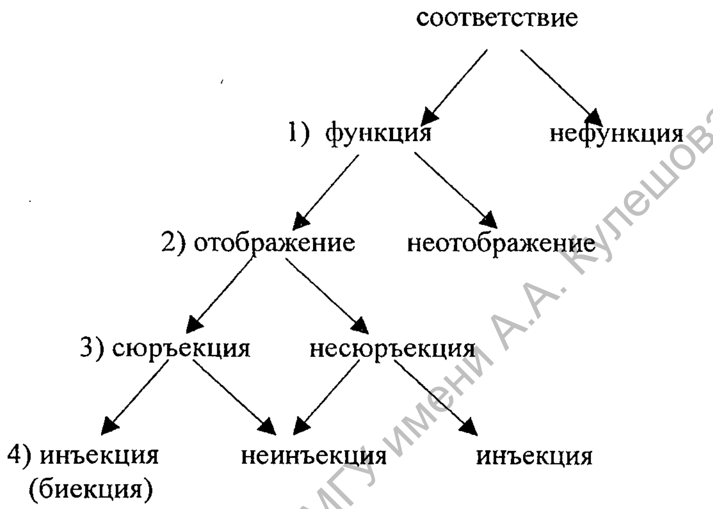


График



Множество пар: $R = \{(2,5),(4,7),(6,3),(8,5)\}$.

б) Для определения вида соответствия R используем схему:



1) соответствие R является функцией, т.к. каждому элементу из множества X соответствует не более 1 элемента из множества Y;

2) соответствие R является отображением, т.к. каждый элемент из множества X имеет образ во множестве Y;

3) соответствие R – сюръекция, т.к. каждый элемент из множества Y является образом хотя бы одного элемента из множества X;

4) соответствие R не является инъекцией, так как число 5 из множества Y соответствует двум разным элементам из множества X (2 и 8).

<u>Вывод</u>: соответствие R – сюръективное отображение – НЕ инъекция.

7. Бинарное отношение на множестве. Свойства отношений

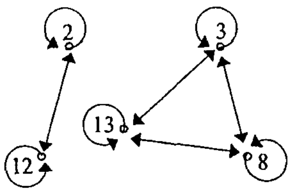
Пример 7.1. На множестве $A = \{2, 3, 8, 12, 13\}$ задано бинарное отношение R “иметь одинаковый остаток при делении на 5”.

а) Задать отношение графом, множеством пар, графиком.

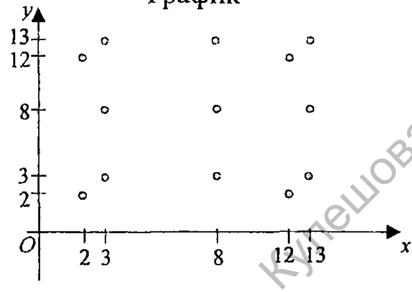
б) Определить свойства отношения.

Решение. а) Граф, график, множество пар.

Граф



График



Множество пар: $R = \{(2, 2), (2, 12), (12, 2), (12, 12), (3, 3), (3, 8), (8, 3), (8, 8), (3, 13), (13, 3), (13, 13), (8, 13), (13, 8)\}$.

б) Требуется определить, обладает ли отношение R следующими свойствами: рефлексивность, симметричность, транзитивность, антирефлексивность, антисимметричность.

Отношение R *рефлексивно* (каждое число из множества A при делении на 5 имеет одинаковый остаток с самим собой), *симметрично* (если число a при делении на 5 имеет такой же остаток, что и число b, то и число b имеет такой же остаток, что и число a) и *транзитивно* (если число a при делении на 5 имеет такой же остаток, как число b, а число b – такой же остаток, как число c, то число a имеет такой же остаток при делении на 5, как число c).

Вывод: R – отношение эквивалентности. Оно разбивает множество A на два класса эквивалентности: $\{2, 12\}$ и $\{3, 8, 13\}$.

8. Теоретико-множественный смысл арифметических операций

Пример 8.1. Исходя из теоретико-множественного подхода к определению операций над числами, объяснить смысл равенства $14 : 2 = 7$.

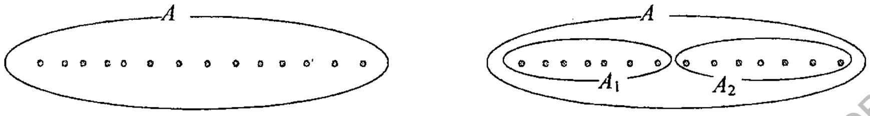
Решение. Выражение $14 : 2$ – это частное чисел 14 и 2.

Операция деления чисел связана с операцией разбиения множества на классы.

Запишем сначала определение частного двух чисел.

1. Пусть множество A, где $a = m(A)$, разбивается на b равномощных подмножеств. Тогда частным чисел a и b называется **мощность** (количество элементов) каждого из подмножеств.

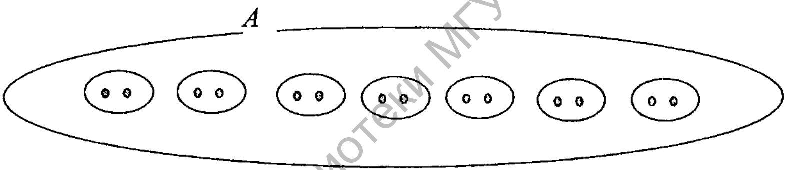
Возьмем множество A такое, что $m(A) = 14$, и разобьем его на два непересекающихся равномощных подмножества A_1 и A_2:



Пересчет элементов в каждом из полученных подмножеств показывает, что $m(A_1) = m(A_2) = 7$. Значит, $14 : 2 = 7$.

2. Пусть множество A, где $a = m(A)$, разбивается на подмножества, мощность каждого из которых равна b. Тогда частным чисел a и b называется **количество** получившихся **подмножеств**.

Разобьем множество A, где $m(A) = 14$, на непересекаемые равномощные подмножества, в каждом из которых по два элемента.



Пересчитываем количество получившихся подмножеств. Их 7.

Значит, $14 : 2 = 7$.

Аналогичным способом объясняются все остальные равенства. При этом используются следующие определения.

Суммой целых неотрицательных чисел a и b называется **мощность объединения** непересекающихся множеств A и B, таких, что $a = m(A)$, $b = m(B)$:

$$a + b = m(A \cup B), \text{ где } A \cap B = \varnothing.$$

Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется **мощность разности** множеств A **и** B, таких, что $a = m(A)$, $b = m(B)$, множество B – подмножество множества A:

$$a - b = m(A \setminus B), \text{ где } B \subseteq A.$$

Произведением целых неотрицательных чисел a и b называется **мощность декартова произведения** множеств A и B, таких, что $a = m(A)$, $b = m(B)$:

$$a \cdot b = m(A \times B).$$

Произведением целых неотрицательных чисел a и b называется целое неотрицательное число, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ раз}}$, если $b > 1$;

2) $a \cdot b = a$, если $b = 1$;

3) $a \cdot b = 0$, если $b = 0$.

9. Теоретико-множественное обоснование правил, связанных с операциями сложения и вычитания

Пример 9.1. Дать теоретико-множественное обоснование равенства:

$$b - (a + c) = (b - a) - c.$$

Решение. Требуется доказать равенство чисел $b - (a + c)$ и $(b - a) - c$.

Каждое число, с точки зрения теоретико-множественного подхода, это мощность некоторого множества. Определим, мощность каких множеств выражают записанные числа. Используем для этого теоретико-множественное определение суммы и разности чисел.

Пусть $a = m(A)$, $b = m(B)$, $c = m(C)$. Тогда

$a + c = m(A \cup C)$, если $A \cap C = \varnothing$;

$b - (a + c) = m(B \setminus (A \cup C))$, если $A \cup C \subseteq B$;

$b - a = m(B \setminus A)$, если $A \subseteq B$;

$(b - a) - c. = m((B \setminus A) \setminus C)$, если $C \subseteq B \setminus A$.

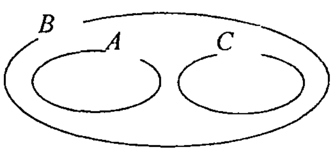
Равенство $b - (a + c) = (b - a) - c$ будет истинным, если истинно равенство $m(B \setminus (A \cup C)) = m((B \setminus A) \setminus C)$, а это будет следовать из равенства множеств: $B \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \setminus C$.

Равенство множеств установим с помощью диаграмм Венна.

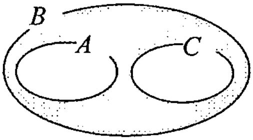
Сначала изобразим на диаграмме множества A, B, C, для которых одновременно выполняются выделенные выше условия:

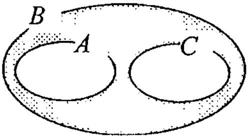
$A \cap C = \varnothing$; $A \cup C \subseteq B$; $A \subseteq B$; $C \subseteq B \setminus A$.

Этим условиям удовлетворяет диаграмма:



Теперь отметим штриховкой на диаграммах множества $B \setminus (A \cup C)$ и $(B \setminus A) \setminus C$.





$B \setminus (A \cup C)$ $\qquad\qquad\qquad$ $(B \setminus A) \setminus C$.

Видим, что заштрихованные области совпадают. Значит:

$B \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \setminus C$;

$m(B \setminus (A \cup C)) = m((B \setminus A) \setminus C)$;

$m(B) - m(A \cup C) = m(B \setminus A) - m(C)$

$m(B) - (m(A) + m(C)) = (m(B) - m(A)) - m(C)$;

$b - (a + c) = (b - a) - c$.

Это равенство задает правило: *Чтобы из числа b вычесть сумму чисел a и c, достаточно из числа b вычесть число a, затем число c.*

Это правило удобно использовать при вычислениях, например, в таких случаях: $423 - (123 + 216) = (423 - 123) - 216 = 300 - 216 = 84$.

10. Свойства арифметических операций

Пример 10.1. Исходя из определений и свойств арифметических операций над числами, доказать равенство $b - (a + c) = (b - a) - c$.

Решение. Для доказательства равенства будем использовать свойства операции сложения (коммутативность и ассоциативность), а также связь операций сложения и вычитания:

1) $a + b = b + a$; $\qquad$ 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;

3) если $a + b = c$, то $a = c - b$ и $b = c - a$;

4) если $a - b = c$, то $a = c + b$;

5) $(a - b) + b = a$; $\qquad$ 6) $(a + b) - b = a$.

Доказать равенство $b - (a + c) = (b - a) - c$ можно двумя способами.

Первый способ. В левой части равенства записано выражение, представляющее собой разность чисел b и $(a + c)$, т.е.

$$\underbrace{b}_{\text{уменьшаемое}} - \underbrace{(a + c)}_{\text{вычитаемое}} = \underbrace{(b - a) - c}_{\text{разность}}$$

Будем выполнять равнозначные преобразования, опираясь на записанные выше свойства:

$$b \overset{4}{=} ((b-a)-c)+(a+c) \overset{1}{=} ((b-a)-c)+(c+a) \overset{2}{=}$$

$$= (((b-a)-c)+c)+a \overset{5}{=} (b-a)+a \overset{5}{=} b;\ \ b=b.$$ Равенство доказано.

Второй способ. Выпишем условие, при котором исходное равенство имеет смысл на множестве целых неотрицательных чисел: чтобы можно было выполнить все указанные действия, должно быть $b \geq a+c$.

Раскроем смысл этого неравенства, исходя из определения отношения "≥": если $b \geq a+c$, то:

7) $b = (a+c)+k$ (где $k \in N_o$); 8) $b-(a+c)=k$.

Далее преобразования будем выполнять, подставив в исходное равенство (левую и правую часть) полученные выражения.

Левая часть: $b-(a+c) \overset{8}{=} k$. Правая часть:

$$(b-a)-c \overset{7}{=} (((a+c)+k)-a)-c \overset{2}{=} (((c+k)+a)-a)-c \overset{6}{=}$$

$$= (c+k)-c \overset{1}{=} (k+c)-c) \overset{6}{=} k;\ \ k=k.$$ Равенство доказано.

Пример 10.2. Доказать равенство $cb : a = (c : a)b$.

Решение. Для доказательства равенства будем использовать свойства:

1) $ab = ba$;
2) $(ab)c = a(bc)$;
3) если $ab = c$, то $a = c : b$ и $b = c : a$;
4) если $a : b = c$, то $a = cb$;
5) $(a : b)b = a$;
6) $(ab) : b = a$.

Докажем равенство $cb : a = (c : a)b$ двумя способами.

Первый способ. В левой части равенства записано выражение, представляющее собой частное чисел cb и a:

$$\underbrace{cb}_{\text{делимое}} : \underbrace{a}_{\text{делитель}} = \underbrace{(c : a)b}_{\text{частное}}$$

Тогда: $cb \overset{4}{=} ((c : a)b)a \overset{1}{=} ((c : a)a)b \overset{5}{=} cb;\ \ cb = cb.$ Равенство доказано.

Второй способ. Данное равенство имеет смысл на множестве целых неотрицательных чисел, если число c кратно числу a. Если c кратно a, то:

7) $c = ak$ (где $k \in N$), 8) $c : a = k$.

Выполняем преобразования. Например, так:

$$cb : a \overset{7}{=} ((ak)b) : a \overset{2}{=} ((kb)a) : a \overset{6}{=} kb \overset{8}{=} (c : a)b.$$ Равенство доказано.

11. Связь между компонентами арифметических операций

Пример 11.1. Решить уравнение на основании зависимости между компонентами и результатами арифметических действий:

$$100 - (555 + x) : 40 = 75.$$

Решение. 1) В левой части равенства записана разность. Неизвестно вычитаемое. Чтобы его найти, надо от уменьшаемого (100) отнять разность (75):

$$(555 + x) : 40 = 100 - 75, \quad (555 + x) : 40 = 25.$$

2) В левой части равенства записано частное. Неизвестно делимое. Чтобы его найти, надо частное (25) умножить на делитель (40):

$$555 + x = 25 \cdot 40, \quad 555 + x = 1000.$$

3) В левой части равенства – сумма. Неизвестно второе слагаемое. Чтобы его найти, надо из суммы (1000) вычесть первое слагаемое (555):

$$x = 1000 - 555, \quad x = 445.$$

Проверка. $100 - (555 + 445) : 40 = 75$.

12. Аксиоматический смысл арифметических операций

Пример 12.1. Вычислить произведение $9 \cdot 4$, исходя из аксиоматического подхода к построению множества целых неотрицательных чисел. Записать аксиомы, определения, свойства, которые при этом использовались.

$$9 \cdot 4 \overset{1}{=} 9 \cdot 3' \overset{A_8}{=} 9 \cdot 3 + 9 \overset{1}{=} 9 \cdot 2' + 9 \overset{A_8}{=} (9 \cdot 2 + 9) + 9 \overset{1}{=}$$

$$= (9 \cdot 1' + 9) + 9 \overset{A_8}{=} ((9 \cdot 1 + 9) + 9) + 9 \overset{1}{=} ((9 \cdot 0' + 9) + 9) + 9 \overset{A_8}{=}$$

$$= (((9 \cdot 0 + 9) + 9) + 9) + 9 \overset{A_7}{=} (((0 + 9) + 9) + 9) + 9 \overset{3}{=} 36; \quad 9 \cdot 4 = 36.$$

При вычислениях использованы:

1) запись целых неотрицательных чисел: $0' = 1,\ 1' = 2,\ 2' = 3, \ldots$;

2) аксиомы умножения:

A_7: $\forall x\ (x \cdot 0 = 0)$; A_8: $\forall x, y\ (x \cdot y' = x \cdot y + x)$;

3) свойства сложения.

Вычисление **суммы** проводится аналогично. При этом используются:

1) запись целых неотрицательных чисел: $0' = 1,\ 1' = 2,\ 2' = 3, \ldots$;

2) аксиомы сложения:

A_5: $\forall x\ (x + 0 = x)$; A_6: $\forall x, y\ (x +\cdot\, y' = (x + y)')$.

13. Метод математической индукции

Пример 13.1. Доказать методом математической индукции равенство $x' + y = (x + y)'$ (по переменной y).

Решение. Обозначим данное равенство через $P(y)$.

1. Проверим истинность равенства для $y = 0$:

$$P(0):\quad \begin{array}{ccc} x' + 0 & = & (x + 0)' \\ \Downarrow A_5 & & \| \ A_5 \\ x' & = & x'. \end{array}$$

Значит, $P(0) = $ И.

2. Предположим, что равенство истинно при $y = k$, т.е. $P(k) = $ И.

$P(k)$: $x' + k = (x + k)'$.

3. Докажем, что равенство истинно и для $y = k'$, т.е. $P(k') = $ И.

$P(k')$: $x' + k' = (x + k')'$.

Доказательство.

$$x' + k' \overset{A_6}{=} (x' + k)' \overset{\text{предположение}}{=} ((x + k)')' \overset{A_6}{=} (x + k')'.$$

4. Вывод. С помощью проверки мы убедились, что $P(0) = $ И (п. 1); предположив, что $P(k) = $ И (п. 2), доказали, что и $P(k') = $ И (п. 3).

На основании аксиомы индукции делаем вывод: равенство истинно для любого натурального числа y: $\forall y \in N_0\ P(y) = $ И.

Учитывая, что рассуждения проводились для произвольного целого неотрицательного числа x, получаем:

$$\forall x \in N_0,\ \forall y \in N_0\ P(x, y) = \text{И}.$$

14. Системы счисления

Пример 14.1. Вычислить значение выражения в указанной системе счисления. Сделать проверку, выполнив вычисления в десятичной системе счисления.

$$(2145_6 - 1255_6) \cdot 13_6$$

Решение. 1. Выполним действия в 6-ой системе счисления:

1) $\begin{array}{r} - \; 2145_6 \\ 1255_6 \\ \hline 450_6 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \times \; 450_6 \\ 13_6 \\ \hline + \; 223 \\ 45 \\ \hline 11130_6 \end{array}$

2. Перейдем к записи чисел 2145_6, 1255_6, 13_6 в десятичной системе счисления и выполним действия:

$2145_6 = 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 5 = 432 + 36 + 29 = 497;$

$1255_6 = 1 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 5 = 216 + 72 + 35 = 323;$

$13_6 = 1 \cdot 6 + 3 = 9.$

Получаем выражение: $(497 - 323) \cdot 9 = 174 \cdot 9 = 1566.$

3. Сравним полученные результаты 11130_6 и 1566. Для этого можно число 11130_6 перевести в десятичную систему счисления или число 1566 – в шестиричную систему счисления. Сделаем второе: будем выполнять последовательное деление на 6 и выделять остатки:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
-\;1566 & 6 & & & & \\
12 & 261 & 6 & & & \\
36 & 24 & 43 & 6 & & \\
36 & 21 & 42 & 7 & 6 & \\
6 & 18 & \mathbf{1} & 6 & 1 & 6 \\
6 & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
\mathbf{0} & & & & \mathbf{1} &
\end{array}$$

Записываем остатки в обратном порядке и получаем: $1566 = 11130_6$.

Таким образом, $(2145_6 - 1255_6) \cdot 13_6 = 11130_6$.

15. НОД и НОК чисел

Пример 15.1. Найти НОД и НОК чисел 1995 и 342 двумя способами:
а) по каноническому разложению чисел;
б) с помощью алгоритма Евклида.

Решение. а) Разложим числа 1995 и 342 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 1995 & 3 \\ 665 & 5 \\ 133 & 7 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 342 & 2 \\ 171 & 3 \\ 57 & 3 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$; $\quad 342 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$.
НОД $(1995; 342) = 3 \cdot 19 = 57$;
НОК $(1995; 342) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 11970$.

б) Будем выполнять последовательно деление с остатком:

$$\begin{array}{r|l} 1995 & 342 \\ \underline{1710} & 5 \\ 285 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 342 & 285 \\ \underline{285} & 1 \\ 57 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 285 & 57 \\ \underline{285} & 5 \\ 0 & \end{array}$$

Последний остаток, не равный нулю, – 57. Значит,
НОД $(1995; 342) = 57$.
Для нахождения НОК $(1995; 342)$ используем формулу:

$$\text{НОК}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a, b)}.$$

Тогда $\text{НОК}(1995; 342) = \dfrac{1995 \cdot 342}{\text{НОД}(1995, 342)} = \dfrac{1995 \cdot 342}{57} = 11970.$

16. Делимость целых неотрицательных чисел

Пример 16.1. Доказать, что при любом натуральном n произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

Решение. Произведение трех последовательных натуральных чисел в математическом виде выглядит так: $n(n+1)(n+2)$.

Это произведение делится на 3, если хотя бы один из множителей делится на 3 (по правилу делимости произведения). Убедимся, что, действительно, при любом значении n один из трех множителей обязательно делится на 3. Сделаем это с помощью метода *полной индукции (перебора).*

Любое натуральное число или делится на 3 (при делении на 3 получается остаток 0), или не делится на 3 (при делении на 3 получается остаток 1 или 2). Значит, множество натуральных чисел свойством "делиться на 3" разбивается на три класса:

1) $n = 3к$ – числа, кратные числу 3;

2) $n = 3к + 1$ – числа, которые при делении на 3 дают остаток 1;

3) $n = 3к + 2$ – числа, которые при делении на 3 дают остаток 2.

Какому бы из этих классов ни принадлежало число n, выражение $n\,(n + 1)\,(n + 2)$ делится на 3. Убедимся в этом.

1) Если $n = 3к$, то первый множитель в этом выражении делится на 3, а значит, и все произведение делится на 3.

2) Если $n = 3к + 1$, то второй множитель делится на 3:

$n + 2 = (3к + 1) + 2 = 3к + 3$ – делится на 3 по свойству делимости суммы.

3) Если $n = 3к + 2$, то третий множитель делится на 3:

$n + 1 = (3к + 2) + 1 = 3к + 3$ – делится на 3.

Вывод: при любом n один из множителей делится на 3. Значит, при любом n произведение $n\,(n + 1)\,(n + 2)$ делится на 3.

П р и м е ч а н и е. В дальнейшем при необходимости можно использовать (без доказательства) такие утверждения:

одно из двух последовательных чисел делится на 2;

одно из трех последовательных чисел делится на 3;

одно из четырех последовательных чисел делится на 4 и т.д.

Пример 16.2. Доказать, что при любом натуральном n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.

Решение. По признаку делимости на составное число имеем: число делится на 120, если и только если оно делится на 3, 5 и 8 ($120 = 3 \cdot 5 \cdot 8$, числа 3, 5, 8 – попарно взаимно простые).

Разложим данный многочлен на множители:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n\,(n^4 - 5n^2 + 4) = n\,(n^4 - n^2 - 4n^2 + 4) =$$
$$= n((n^4 - n^2) - (4n^2 - 4)) = n(n^2\,(n^2 - 1) - 4\,(n^2 - 1) =$$
$$= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) =$$
$$= (n - 2)(n - 1)\,n\,(n + 1)(n + 2).$$

Получили произведение пяти последовательных чисел. В этом ряду одно из чисел делится на 2, одно – на 3, одно – на 4, одно – на 5 (см. примечание предыдущего примера).

По свойству делимости произведения заключаем, что произведение $(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)$, а значит, и данный многочлен n^5-5n^3+4n делится на 8, 3 и 5, т.е. делится на 120.

Вывод: число n^5-5n^3+4n делится на 120 при любом n.

Пример 16.3. Доказать, что сумма двух последовательных степеней числа 5 делится на 15.

Решение. Запишем в виде математического выражения сумму двух последовательных степеней числа 5 и сделаем алгебраические преобразования этого выражения:

$$5^n+5^{n+1}=5^n+5^n\cdot 5^1=5^n(1+5)=5^n\cdot 6.$$

В результате получено произведение, первый множитель которого делится на 5, а второй – на 3. Значит, произведение делится на 15.

Пример 16.4. Доказать, что при любом натуральном n число 7^n-1 делится на 6.

Решение. Никакие алгебраические преобразования не приводят к решению задачи. Проведем доказательство методом математической индукции по известной схеме.

1. Проверим, делится ли число 7^n-1 на 6 при $n=1$:

$$7^1-1=7-1=6 \text{ – делится на 6.}$$

2. Предположим, что число 7^n-1 делится на 6 при $n=k$, т.е. 7^k-1 делится на 6.

3. Докажем, что при этом предположении число 7^n-1 делится на 6 и при $n=k+1$, т.е. докажем, что число $7^{k+1}-1$ делится на 6. Для этого выполним преобразования:

$$7^{k+1}-1=7^k\cdot 7^1-1=(7^k-1+1)\cdot 7-1=((7^k-1)+1)\cdot 7-1=$$
$$=(7^k-1)\cdot 7+1\cdot 7-1=(7^k-1)\cdot 7+6.$$

Получившееся конечное выражение – сумма. Первое слагаемое в ней – произведение $(7^k-1)\cdot 7$. Оно делится на 6, т.к. по предположению (7^k-1) делится на 6. Другое слагаемое (число 6) также делится на 6. Значит, и сумма делится на 6 (правило делимости суммы).

4. По аксиоме индукции делаем вывод, что число 7^n-1 делится на 6 при любом натуральном n.

П р и м е ч а н и е. Пункты 2 и 3 можно выполнить по-другому.

2. Предположим, что число $7^n - 1$ делится на 6 при $n = k$, т.е. $7^k - 1$ делится на 6. Это означает, что выражение $7^k - 1$ кратно 6 и его можно представить так: $7^k - 1 = 6p$. Откуда $7^k = 6p + 1$.

3. Докажем, что в этом случае число $7^n - 1$ делится на 6 и при $n = k + 1$, т.е. докажем, что число $7^{k+1} - 1$ делится на 6. Для этого сделаем подстановку (из п. 2) и выполним преобразования:

$7^{k+1} - 1 = 7^k \cdot 7^1 - 1 = (6p + 1) \cdot 7 - 1 = 42p + 7 - 1 = 42p + 6$ – эта сумма делится на 6, т.к. каждое слагаемое делится на 6.

17. Арифметические действия над действительными числами

Пример 17.1. Вычислить: $\dfrac{1,(03) + 0,2(5)}{1,(03) - 0,2(5)}$.

Решение. Сначала надо преобразовать десятичные периодические дроби в обыкновенные. Для этого используем правила:

1. Чтобы преобразовать чистую периодическую дробь в обыкновенную, надо в числителе записать число, образованное цифрами периода, а в знаменателе записать k девяток (k – длина периода).

2. Чтобы преобразовать смешанную периодическую дробь в обыкновенную, надо в числителе записать разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, образованным предпериодом, а в знаменателе – k девяток и n нулей (k – длина периода, n – длина предпериода).

Число 1,(03) – чистая периодическая десятичная дробь.

По правилу 1 получаем: $1,(03) = 1\dfrac{03}{99} = 1\dfrac{3}{99} = 1\dfrac{1}{33}$.

Число 0,2(5) – смешанная периодическая десятичная дробь.

По правилу 2 получаем: $0,2(5) = \dfrac{25 - 2}{90} = \dfrac{23}{90}$.

Дальше будем выполнять действия над обыкновенными дробями:

1) $1\dfrac{1}{33} + \dfrac{23}{90} = 1\dfrac{30 + 253}{990} = 1\dfrac{283}{990} = \dfrac{1273}{990}$;

2) $1\dfrac{1}{33} - \dfrac{23}{90} = \dfrac{34}{33} - \dfrac{23}{90} = \dfrac{1020 - 253}{990} = \dfrac{767}{990}$;

3) $\dfrac{1273}{990} : \dfrac{767}{990} = \dfrac{1273 \cdot 990}{990 \cdot 767} = \dfrac{1273}{767} = 1\dfrac{506}{767}$.

Ответ: $\dfrac{1,(03)+0,2(5)}{1,(03)-0,2(5)} = 1\dfrac{506}{767}$.

18. Системы и совокупности неравенств с одной переменной

Пример 18.1. Решить систему и совокупность двух неравенств с одной переменной: $4(3,2-4,4x) < 3(4,6x-3)+2$ и $4,2(1+2,5x) \le 3,2x-5$.

Решение. Система неравенств – это конъюнкция неравенств:

$$\begin{cases} 4(3,2-4,4x) < 3(4,6x-3)+2 \\ 4,2(1+2,5x) \le 3,2x-5 \end{cases}$$

Совокупность неравенств – это дизъюнкция неравенств:

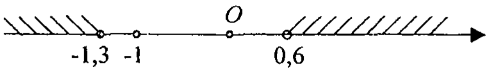
$$\left[\begin{array}{l} 4(3,2-4,4x) < 3(4,6x-3)+2 \\ 4,2(1+2,5x) \le 3,2x-5 \end{array}\right.$$

Чтобы решить систему (совокупность) неравенств с одной переменной, необходимо сначала упростить исходные неравенства, заменив их равносильными вида $x < a$ $(x > a)$. Для этого нужно выполнить преобразования.

$4(3,2-4,4x) < 3(4,6x-3)+2$	$4,2(1+2,5x) \le 3,2x-5.$
$12,8-17,6x < 13,8x-9+2$	$4,2+10,5x \le 3,2x-5$
$-17,6x-13,8x < -12,8-7$	$10,5x-3,2x \le -5-4,2$
$-31,4x < -19,8$	$7,3x \le -9,2$
$31,4x > 19,8$	$x \le -9,2 : 7,3 \approx -1,3$
$x > 19,8 : 31,4 \approx 0,6$	$x \le -1,3$
$x > 0,6$	

Получаем равносильные исходным систему и совокупность неравенств: $\begin{cases} x > 0,6 \\ x \le -1,3 \end{cases}$ и $\left[\begin{array}{l} x > 0,6 \\ x \le -1,3 \end{array}\right.$.

Чтобы найти их решения, используем числовую прямую:



Множество решений системы неравенств – пересечение множеств решений каждого из неравенств. Для данных неравенств – это пустое множество.

Множество решений совокупности неравенств – объединение множеств решений каждого из неравенств

Ответ: Решение системы неравенств: $\varnothing$.

Решение совокупности неравенств: $(-\infty; -1{,}3] \cup (0{,}6; +\infty)$.

19. Системы уравнений с двумя переменными

Пример 19.1. Решить систему: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

Решение. Решить систему двух уравнений с двумя переменными значит найти множество пар значений переменных, при подстановке которых каждое уравнение системы превращается в истинное равенство, т.е. найти пересечение множеств решений уравнений, входящих в данную систему.

Систему двух уравнений с двумя переменными можно решить разными способами.

1. *Способ алгебраического сложения.* В результате почленного сложения уравнений системы (при необходимости уравнения домножаются на соответствующие коэффициенты) образуется новое уравнение – с одной переменной. Это уравнение решаем. Полученное значение переменной подставляем в любое из исходных уравнений и вычисляем значение другой переменной.

Выполним почленное сложение уравнений данной системы:

$$+\begin{array}{r} x + y = 1 \\ x - y = 0 \\ \hline 2x \quad = 1 \end{array}$$

В результате получили уравнение с одной переменной: $2x = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

Из второго уравнения следует, что $y = x$, поэтому и $y = \frac{1}{2}$.

Решением системы является пара чисел $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

Запись решения системы можно оформить так:

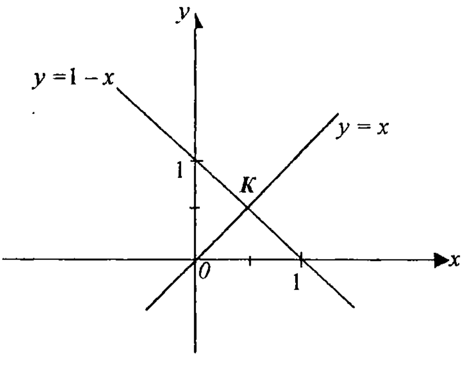
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

2. *Способ подстановки.* Выразим одну из переменных через другую из любого уравнения системы. В данном случае удобнее выразить x через y из второго уравнения системы и подставить в первое уравнение. В результате получается уравнение с одной переменной. Запись можно оформить так:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 1 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

3. *Графический способ*. В одной системе координат строим графики уравнений системы и находим точку (точки) пересечения этих графиков. Координаты этой точки (точек) и есть решение системы.

Запишем исходные уравнения в удобном виде: $y = 1 - x$ и $y = x$.



Графиками этих уравнений являются прямые, пересекающиеся в точке K, имеющей координаты $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Это и есть решение исходной системы.

Ответ: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

20. Системы неравенств с двумя переменными

Пример 20.1. Решить графически систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}.$$

Решение. Чтобы графически решить систему неравенств с двумя переменными, надо:

1) в одной системе координат построить графики уравнений, соответствующих исходным неравенствам системы;

2) отметить штриховкой части плоскости, которые задаются исходными неравенствами (решение каждого неравенства);

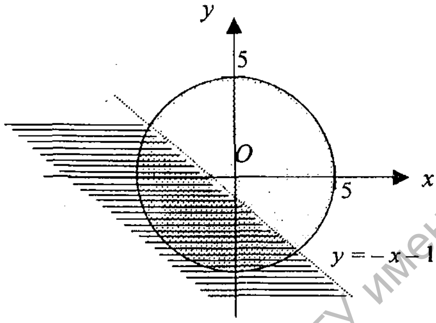
3) найти и выделить часть плоскости, которая является пересечением решений исходных неравенств.

Первому неравенству нашей системы соответствует уравнение $x^2 + y^2 = 25$, графиком которого является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5. Нарисуем эту окружность. Решением неравенства $x^2 + y^2 \le 25$ будет часть плоскости внутри окружности вместе с точками самой окружности, т.е. круг. Отметим это штриховкой.

Другому неравенству соответствует уравнение $x + y + 1 = 0$. Преобразуем его: $y = -x - 1$. Графиком этого уравнения является прямая линия. Нарисуем ее. Прямая разбивает плоскость на две части. Требуется определить, какая из этих частей соответствует (является решением) неравенству $x + y + 1 < 0$. Это можно сделать так.

Возьмем любую точку (координаты которой удобны для вычислений), например, точку O (0, 0). Подставим координаты этой точки в неравенство: $0 + 0 + 1 < 0$; или $1 < 0$. Получили неверное утверждение. Значит, точка $O(0, 0)$ не является решением неравенства. Тогда и вся часть плоскости, где находится точка $O(0, 0)$, не является решением неравенства. Поэтому штриховкой отмечаем другую часть плоскости – решение неравенства. При этом саму прямую рисуем пунктирной линией, т.к. в неравенстве стоит знак “<”, т.е. точки прямой не входят во множество решений неравенства.

В результате получаем окончательный рисунок:

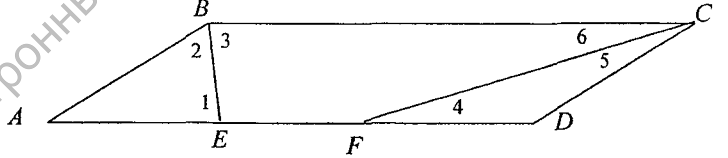


Ответ: Решение системы – часть плоскости, где пересекаются обе штриховки.

21. Свойства геометрических фигур (вычисления)

Пример 21.1. Длины сторон параллелограмма равны 10 см и 3 см. Биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне, делят противолежащую сторону на три отрезка. Найдите длины этих отрезков.

Решение.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;
BE – биссектриса угла B; CF – биссектриса угла C;
$AD = BC = 10$ см; $AB = CD = 3$ см.
Найти: AE, EF, FD.

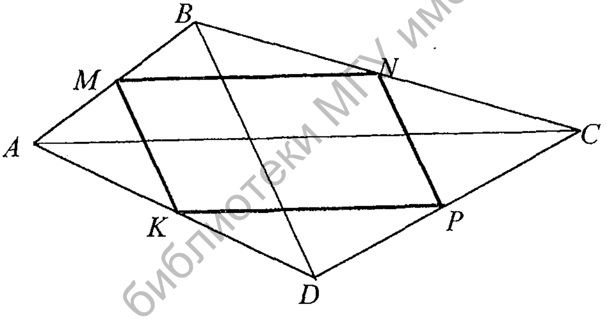
Решение. Из условия следует, что $\angle 2 = \angle 3$. Тогда $\angle 1 = \angle 3$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD, BC и секущей BE). Значит, $\angle 2 = \angle 1$ и $\Delta\ BAE$ – равнобедренный. Поэтому $AE = AB = 3$ см.

Аналогично устанавливаем, что $\Delta\ FCD$ – равнобедренный. Тогда $FD = CD = 3$ см и $EF = 10 - (3 + 3) = 4$ (см).

22. Свойства геометрических фигур (доказательства)

Пример 22.2. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма

Решение.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник;
M – середина AB, N – середина BC,
P – середина DC, K – середина AD.
Доказать: $MNPK$ – параллелограмм.

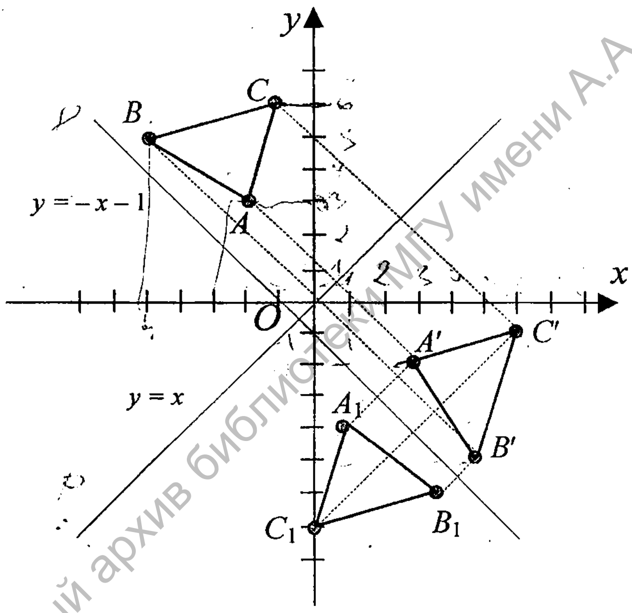
Доказательство: Т.к. по условию M – середина AB, K – середина AD, то MK – средняя линия треугольника ABD и $MK = \frac{1}{2}BD$, $MK \parallel BD$. Аналогично устанавливаем, что NP – средняя линия треугольника DBC и $NP = \frac{1}{2}BD$, $NP \parallel BD$. Значит, $MK = NP$, $MK \parallel NP$. Следовательно, $KMNP$ – параллелограмм.

23. Геометрические преобразования (осевая симметрия)

Пример 23.1. Заданы координаты вершин треугольника ABC: $A(-2, 3)$, $B(-5, 5)$, $C(-1, 6)$. Построить $\Delta A_1B_1C_1 = S_l \circ S_p(\Delta ABC)$, если l – прямая $y = -x - 1$, p – прямая $y = x$.

Записать координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. Построим треугольник ABC по заданным координатам вершин (используем разлиновку тетради в клеточку).



Треугольник $A_1B_1C_1$ – образ треугольника ABC, полученный в результате выполнения композиции двух осевых симметрий – сначала относительно прямой p, затем относительно прямой l.

Найдем образ треугольника ABC, который получится в результате осевой симметрии относительно прямой p. Это – треугольник $A'B'C'$:

$$\Delta A'B'C' = S_p(\Delta ABC).$$

Построения выполняем так:

1) проводим прямую p: $y = x$;

2) для точек A, B, C строим симметричные точки A', B', C'.

По чертежу определяем координаты вершин треугольника $A'B'C'$:

$$A'\,(3, -2), \quad B'\,(5, -5), \quad C'\,(6, -1).$$

Далее строим треугольник $A_1B_1C_1$ – образ треугольника $A'B'C'$ при осевой симметрии относительно прямой l:

1) проводим прямую l: $y = -x - 1$;

2) для точек A', B', C' строим симметричные им точки A_1, B_1, C_1.

Определяем по чертежу координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$:

$$A_1\,(1, -4), \; B_1\,(4, -6), \; C_1\,(0, -7).$$

Сравнивая соответствующие координаты вершин треугольников:

ΔABC:	$A\,(-2, 3)$,	$B\,(-5, 5)$,	$C\,(-1, 6)$.
$\Delta A'B'C'$:	$A'\,(3, -2)$,	$B'\,(5, -5)$,	$C'\,(6, -1)$.
$\Delta A_1B_1C_1$:	$A_1\,(1, -4)$,	$B_1\,(4, -6)$,	$C_1\,(0, -7)$

можно увидеть связь между ними, которая выражается с помощью формул.

Координаты точек A, B, C и точек A', B', C' связаны равенствами

$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$, точек A', B', C' и точек A_1, B_1, C_1 – равенствами $\begin{cases} x_1 = -y' - 1 \\ y_1 = -x' + 1 \end{cases}$;

точек A, B, C и точек A_1, B_1, C_1 – равенствами $\begin{cases} x_1 = -x - 1 \\ y_1 = -y + 1 \end{cases}$.

24. Геометрические преобразования (параллельный перенос, центральная симметрия)

Пример 24.1. Заданы координаты вершин четырехугольника $ABCD$: $A\,(-3, 1)$, $B\,(-4, 6)$, $C\,(-2, 5)$, $D\,(2, 1)$. Построить четырехугольник $A_1B_1C_1D_1 = Z_P \circ \vec{a}\,(ABCD)$, если $\vec{a} = 2\,\overrightarrow{BC}$, $P\,(7, 2)$.

Записать координаты вершин четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

Решение. В данном задании требуется выполнить композицию перемещений: сначала параллельный перенос, затем центральную симметрию.

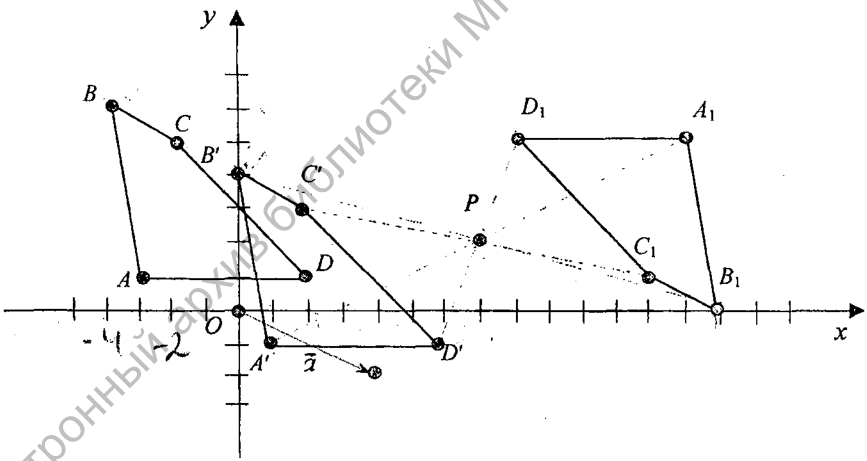
Строим четырехугольник $ABCD$ по заданным координатам. Затем выполняем перенос этого четырехугольника на вектор $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$. Это можно сделать так. Вектор BC перемещает точку B в точку C, т.е.на две единицы (клеточки) вправо и на одну единицу (клеточку) вниз. Тогда вектор $\vec{a}$ будет перемещать каждую точку плоскости на четыре единицы вправо и на две единицы вниз. Точка O (0, 0) переместится с помощью вектора $\vec{a}$ в точку с координатами (4, –2). Это перемещение в координатной форме можно записать так:

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 2 \end{cases}.$$

В результате параллельного переноса четырехугольника $ABCD$ на вектор $\vec{a}$ получится четырехугольник $A'B'C'D'$ с координатами вершин:

$A'(1, -1)$, $B'(0, 4)$, $C'(2, 3)$, $D'(6, -1)$.

Теперь строим образ четырехугольника $A'B'C'D'$, который получится в результате центральной симметрии относительно центра симметрии в точке P. (Точки A_1 и A', B_1 и B', C_1 и C', D_1 и D' находятся по разные стороны, но на одинаковом расстоянии от точки P).



Определяем по чертежу координаты вершин четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$: A_1 (13, 5), B_1 (14, 0), C_1 (12, 1), D_1 (8, 5).

С целью самопроверки координаты вершин четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ можно вычислить и с помощью формул.

Из теории известно, что при центральной симметрии связь между координатами точек выражается формулами:

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases},$$

где x_0, y_0 – координаты центра симметрии;

x, y – координаты точки-прообраза;

x', y' – координаты точки-образа.

Для нашего случая имеем:

$$\begin{cases} x_1 = -x' + 2 \cdot 7 \\ y_1 = -y' + 2 \cdot 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = -x' + 14 \\ y_1 = -y' + 4 \end{cases}.$$

Тогда получаем:

$A'(1, -1) \quad \rightarrow \quad A_1(-1 + 14,\ 1 + 4), \qquad A_1(13, 5),$

$B'(0, 4) \quad \rightarrow \quad B_1(0 + 14,\ -4 + 4), \qquad B_1(14, 0),$

$C'(2, 3) \quad \rightarrow \quad C_1(-2 + 14,\ -3 + 4), \qquad C_1(12, 1),$

$D'(6, -1) \quad \rightarrow \quad D_1(-6 + 14,\ 1 + 4), \qquad D_1(8, 5).$

25. Геометрические преобразования (гомотетия, поворот)

Пример 25.1. Заданы координаты вершин треугольника ABC: $A(-4, 2)$, $B(-5, 3)$, $C(-2, 6)$. Построить $\Delta A_1B_1C_1 = R^{\alpha}_{O_1} \circ H^{k}_{O'}(\Delta ABC)$, если $O'(2, 2)$, $O_1(6, 4)$, $k = -2$, $\alpha = +90°$. Записать координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. Надо выполнить композицию преобразований: сначала гомотетию, затем поворот.

1. Строим по координатам треугольник ABC.

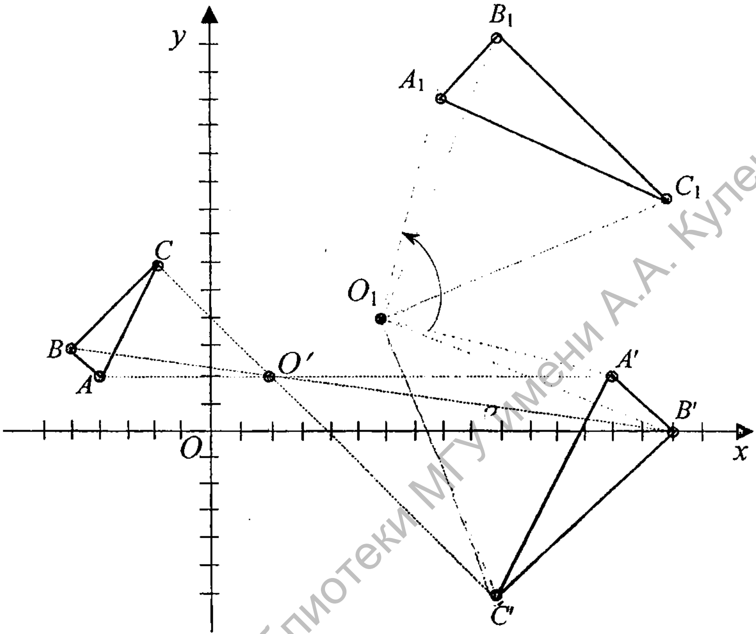
2. Строим $\Delta A'B'C' = H^{-2}_{O'}(\Delta ABC)$.

Так как коэффициент гомотетии $k = -2$ (меньше нуля), то треугольники ABC и $A'B'C'$ находятся по разные стороны от центра гомотетии O'. При этом расстояние от каждой вершины треугольника $A'B'C'$ до центра гомотетии O' в 2 раза больше, чем расстояние от вершин треугольника ABC до центра гомотетии O'.

Определяем по чертежу координаты вершин полученного треугольника $A'B'C'$: $A'(14, 2)$, $B'(16, 0)$, $C'(10, -6)$.

3. Выполняем поворот треугольника $A'B'C'$ на 90° против часовой стрелки вокруг центра O_1 и получаем $\Delta A_1B_1C_1 = R^{\alpha}_{O_1}(\Delta A'B'C')$, $\alpha = +90°$.

По чертежу определяем координаты вершин полученного треугольника: A_1 (8, 12), B_1 (10, 14), C_1 (16, 8).



Литература

1. *Кожух І.Р.* Матэматыка: Вучэб. дапам. для пед. ін-таў.– Мн.: Выш. школа, 1993. – 350 с.

2. Математика: Для студентов II курса факультетов подготовки учителей нач. классов пед. вузов / Под ред. *А.А.Столяра.* – Мн.: Выш. школа, 1976. – 272 с.

3. Математика / *Н.Я.Виленкин, А.М.Пышкало, В.Б.Рождественская, Л.П. Стойлова:* Уч. пособие для пед. ин-тов.– М.: Просвещение, 1977.– 352 с.

4. Математика. В 2-х ч. Ч. 1. Для студентов-заочников фак. подгот. учителей нач. классов пед. ин-тов / *Л.П. Стойлова, Н.Я. Виленкин, Н.Н. Лаврова*; МГЗПИ. – М.: Просвещение, 1990.– 175 с.

5. *Стойлава Л.П., Пышкало А.М.* Асновы пачатковага курса матэматыкі: Вучэб. дапам. для пед. вуч. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 319 с.

6. *Хахамов Л.Р.* Преобразования плоскости: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1979. – 95 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Лещенко Лариса Васильевна,
Николаева Валентина Владимировна,
Бондарева Любовь Антоновна

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Для студентов педагогического факультета

Технический редактор *А.Н. Гладун*
Компьютерная верстка *В.С. Малявко*
Корректор *Н.С. Осмоловская*

Подписано в печать 21.07.06. Формат 60x84/16.
Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,2. Тираж 80 экз. Заказ № 261.

Учреждение образования "Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1.
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004

Отпечатано на ризографе отдела оперативной полиграфии МГУ им. А.А. Кулешова.
212022, Могилев, Космонавтов, 1.