

И.В. Марченко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Методические указания
к практическим занятиям**

Могилев 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА»

И.В. Марченко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания
к практическим занятиям



Могилев 2011

УДК 517.2 (075.8)

ББК 22.16

М30

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
УО «МГУ им. А.А. Кулешова»*

Рецензент

доцент кафедры математического анализа
и дифференциальных уравнений
УО «МГУ им. А.А. Кулешова» *Н.П. Морозов*

Марченко, И.В.

М30 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных : метод. указания к практ. занятиям / И.В. Марченко. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – 48 с.: ил.

Методические указания содержат задачи по основным темам курса «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных». Каждая тема сопровождается краткими теоретическими сведениями и решением типовых задач.

Предназначается для студентов физико-математических факультетов.

УДК 517.2 (075.8)

ББК 22.16

© Марченко И.В., 2011

© Оформление. УО «МГУ им. А.А. Кулешова»

Тема 1. Функции нескольких переменных. Основные понятия

Действительной функцией n действительных переменных называется отображение f из R^n в R ($n \in N \setminus \{1\}$), т.е. отображение некоторого множества $D(f) \subset R^n$ на множество $E(f) \subset R$.

При этом $D(f)$ называется **областью определения** функции f , а $E(f)$ – **множеством значений** этой функции. Функцию f записывают в виде $z = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D(f)$, или подробнее, $z = f(x_1, \dots, x_n)$.

В случае, когда функция f нескольких переменных задана формулой, а ее область определения не указана, под областью определения понимается множество всех значений аргумента x , $x \in R^n$, при которых эта формула имеет смысл во множестве R .

Графиком функции $z = f(x, y)$ двух действительных переменных называется множество всех точек $(x, y, z) \in R^3$ таких, что $(x, y) \in D(f)$, а $z = f(x, y)$.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется такая линия $f(x, y) = C$ на плоскости Oxy , в точках которой функция f принимает постоянное значение $z = C$.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется такая поверхность $f(x, y, z) = C$ пространства $Oxyz$, в точках которой функция f принимает постоянное значение $u = C$.

Пример 1. Найти и изобразить на координатной плоскости область определения следующих функций.

$$a) f(x, y) = \frac{1}{\lg(2 - x^2 - y^2)} + \sqrt{y - x^2}.$$

Решение. $D(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid 2 - x^2 - y^2 > 0 \wedge 2 - x^2 - y^2 \neq 1 \wedge y - x^2 \geq 0\}$.

Решаем систему неравенств

$$\begin{cases} 2 - x^2 - y^2 > 0, \\ 2 - x^2 - y^2 \neq 1, \\ y - x^2 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 < 2, \\ x^2 + y^2 \neq 1, \\ y \geq x^2. \end{cases}$$

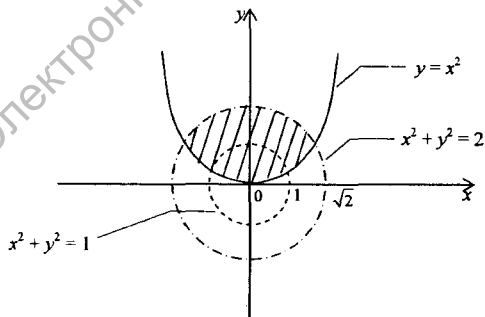


Рис. 1

Неравенство $x^2 + y^2 < 2$ задает на координатной плоскости Oxy внутренность круга с центром в начале координат и радиусом, равным $\sqrt{2}$, а неравенство $x^2 + y^2 \neq 1$ – всю плоскость Oxy за исключением точек единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$. Неравенству $y \geq x^2$ соответствуют на плоскости Oxy точки парабо-

лы $y = x^2$, а также точки, расположенные «выше» этой параболы. Множество $D(f)$ (см. рис. 1), обозначенное штриховкой, – ограниченное несвязное множество в R^2 , которое не является ни открытым, ни замкнутым.

б) $f(x, y, z) = \ln(1 - x - y - z)$.

Решение. Область определения функции f представляет собой множество $D(f) = \{(x, y, z) \in R^3 \mid 1 - x - y - z > 0\}$. Плоскость $1 - x - y - z = 0$ делит пространство R^3 на два полупространства. Так как точка $(0, 0, 0)$ удовлетворяет неравенству $1 - x - y - z > 0$, то областью определения функции f будет то из полупространств, которому принадлежит эта точка.

Пример 2. Найти множество значений $E(f)$ функции $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3$.

Решение. Данная функция определена для всех точек $(x, y) \in R^2$. Обозначим через

$$u = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3, \quad (1)$$

Множество значений функции f есть множество значений параметра u , при которых уравнение (1) имеет хотя бы одно решение. Преобразуем уравнение (1) к виду $u = (x - y)^2 + 2(x - y) - 3$. После замены $t = x - y$, получим равносильное ему квадратное относительно t уравнение $t^2 + 2t - 3 - u = 0$. Необходимым и достаточным условием существования корней этого уравнения является неотрицательность его дискриминанта, т.е. выполнение неравенства $D = 4(4 + u) \geq 0$. Отсюда находим $E(f) = [-4, +\infty)$.

Пример 3. Найти линии уровня функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

Решение. Уравнение линии уровня для данной функции имеет вид $\ln(x^2 + y^2 - 1) = C$, $C \in R$. При всех действительных значениях параметра C имеем равенство

$$x^2 + y^2 = e^C + 1,$$

задающее семейство окружностей радиуса $r = \sqrt{e^C + 1}$ центром в начале координат.

Упражнения.

I. Найти и изобразить на координатной плоскости области определения следующих функций.

1) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$; 2) $z = \ln xy$; 3) $z = \sqrt{x-\sqrt{y}}$; 4) $z = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$;

5) $z = \ln[x \ln(y-x)]$; 6) $z = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{x+y-3} + \sqrt{42-6x-7y}$;

7) $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$; 8) $u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$; 9) $u = \frac{1}{\sqrt{z-x^2-y^2}}$;

10) $u = \frac{\ln(z^2 - x^2 - y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$.

II. Найти множество значений следующих функций.

- 1) $u = \sqrt{2+x+y-x^2-2xy-y^2}$; 2) $u = x-2y-3$, если $x+y=1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;
3) $u = e^{2xy} - e^{xy} + 2$; 4) $u = 3 \cos \frac{y}{x} + 8 \sin^2 \frac{y}{2x}$.

III. Найти линии или поверхности уровня следующих функций.

- 1) $z = \ln(x^2 + y)$; 2) $z = \arcsin xy$; 3) $z = \frac{y}{x^2}$; 4) $u = x + y + z$; 5) $u = x^2 + y^2 + z^2$;
6) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

Тема 2. Предел ФНП

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом** функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$, если выполняются условия:

- 1) $M_0(x_0; y_0)$ – предельная точка множества $D(f) \subset \mathbb{R}^2$;
2) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (\forall M(x, y) \in \dot{U}_\delta(x_0; y_0) \cap D(f)) [|f(x, y) - b| < \varepsilon]$.

Здесь $\dot{U}_\delta(x_0, y_0)$ – проколота шаровая или кубическая окрестность точки $(x_0; y_0)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Для обозначения предела функции двух переменных используют запись $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = b$ или $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = b$.

Напомним определения кубической и шаровой окрестностей точки в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Шаровой ε -окрестностью точки $a = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$ радиуса ε , $\varepsilon > 0$, называется множество

$$S(a; \varepsilon) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \varepsilon \right\}.$$

Кубической h -окрестностью с ребром $2h$ ($h > 0$) точки $a = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$B(a; h) = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (|x_1 - a_1| < h) \wedge (|x_2 - a_2| < h) \wedge \dots \wedge (|x_n - a_n| < h) \}.$$

Используя эти определения можно дать следующие определения предела функции f двух переменных в точке.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом** функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$, если выполняются условия:

- 1) $(x_0; y_0)$ – предельная точка множества $D(f) \subset \mathbb{R}^2$;
2) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (\forall M(x, y) \in D(f))$

$$\left[\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - b| < \varepsilon \right].$$

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом** функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$, если выполняются условия:

- 1) $(x_0; y_0)$ - предельная точка множества $D(f) \subset \mathbb{R}^2$;
- 2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall M(x; y) \in D(f))$

$$[(|x - x_0| < \delta) \wedge (|y - y_0| < \delta) \Rightarrow |f(x; y) - b| < \varepsilon].$$

Для функций нескольких переменных справедливы теоремы о пределе суммы, произведения и частного функций, аналогичные соответствующим теоремам для функций одного переменного. Эти теоремы и переход к новым переменным применяются при вычислении пределов. В случае $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$ воз-

можна замена координат (x, y) на полярные координаты по формулам $x = a + r \cos \varphi$, $y = b + r \sin \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При этом происходит переход к $\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \varphi)$, где $F(r, \varphi) = f(a + r \cos \varphi, b + r \sin \varphi)$. Заметим, что из выполнения равенства $\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \varphi) = C$ при любом φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, еще не следует, что $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = C$. Последнее равенство будет выполняться, если при $r \rightarrow 0$ функция $F(r, \varphi) \rightarrow C$ равномерно по φ . Это имеет место, если $F(r, \varphi) = C + r^\lambda \psi(r, \varphi)$, где $\lambda > 0$, а функция $\psi(r, \varphi)$ ограничена при $0 < r < \alpha$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В некоторых случаях возможны и другие замены переменных, которые позволяют перейти к пределу функции одной переменной.

Замена переменной позволяет также установить отсутствие предела.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом** функции $z = f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ по множеству $M \subset \mathbb{R}^2$, если выполняются условия:

- 1) $(x_0; y_0)$ - предельная точка множества $M \cap D(f)$;
- 2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall (x; y) \in D(f) \cap M)$

$$[(0 < |x - x_0| < \delta) \wedge (0 < |y - y_0| < \delta) \Rightarrow |f(x; y) - b| < \varepsilon].$$

Отсюда следует, что предел функции $z = f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ не существует, если по двум различным множествам M_1 и M_2 эта функция имеет различные пределы в точке $(x_0; y_0)$.

Повторными пределами функции $z = f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ называют выражения

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) \right) \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) \right).$$

Чтобы найти, например, повторный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) \right)$, сначала вычисляют предел функции $z = f(x; y)$ при $y \rightarrow y_0$, считая x - постоянной. В результате получают некоторую функцию переменной x и находят ее предел при $x \rightarrow x_0$. Повторные пределы, вообще говоря, не равны между собой и не равны пределу функции $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$. В то же время, из существова-

ния (отсутствия) предела функции в точке еще не следует существование (отсутствие) в этой точке ее повторных пределов.

Пример 1. Доказать, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} = 0$.

Решение. Областью определения функции $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$ является множество

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid x \neq 0 \vee y \neq 0\}.$$

Воспользуемся определением Коши предела функции в точке. Точка $(0, 0)$ – предельная точка $D(f)$. Докажем, что

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall (x, y) \in D(f)) \left[0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} \right| < \varepsilon \right] \quad (1)$$

Рассмотрим левую часть последнего неравенства цепочки. Так как $\left| \sin \frac{1}{xy} \right| \leq 1$ при $(x, y) \in D(f)$, имеем

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} \right| \leq |x^2 + y^2| = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 < \varepsilon.$$

Потребовав выполнимости последнего неравенства, получаем, что при $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ имеет место доказываемая цепочка (1).

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{tg(x^2 + y^4)}{\sqrt{x^2 + y^4 + 9 - 3}}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{tg(x^2 + y^4)}{\sqrt{x^2 + y^4 + 9 - 3}} &= \left[\begin{array}{l} x^2 + y^4 = z \\ (x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{tgz}{\sqrt{z + 9 - 3}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{z + 9} + 3)tgz}{(\sqrt{z + 9 - 3})(\sqrt{z + 9 + 3})} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{tgz}{z} (\sqrt{z + 9} + 3) \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{tgz}{z} \lim_{z \rightarrow 0} (\sqrt{z + 9} + 3) = 1 \cdot (\sqrt{0 + 9} + 3) = 6. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти предел функции $f(x, y) = \frac{x^2 y}{y^2 + x^4}$ в точке $(0, 0)$ по прямой $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; доказать, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{y^2 + x^4}$ не существует.

Решение. Функция определена на всей плоскости, за исключением точки $(0, 0)$. Так как $f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha^2 \beta t}{\beta^2 + \alpha^4 t^2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, то предел функции в точке $(0, 0)$ по каждой прямой, проходящей через начало координат, равен нулю.

Из того, что предел функции f по любой прямой, проходящей через начало координат, равен нулю в точке $(0, 0)$, еще не следует, что предел функции f в этой точке существует и равен нулю.

Подберем какую-нибудь кривую, проходящую через точку $(0, 0)$, по которой предел функции в данной точке не равен нулю. Например, для парабо-

лы $y = x^2$ имеем $f(x, x^2) = \frac{1}{2}$, т.е. предел функции f в точке $(0, 0)$ по кривой $y = x^2$ равен $1/2$.

Таким образом, получаем, что пределы функции f в точке $(0, 0)$ по двум различным множествам (любая из указанных прямых и парабола $y = x^2$) различны. Тем самым доказано, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{y^2 + x^4}$ не существует.

Пример 4. Найти повторные пределы функции $u = \frac{x-y}{x+y}$ в точке $(0, 0)$.

Решение. Имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Повторные пределы функции u в точке $(0, 0)$ не равны между собой.

Упражнения.

I. Используя определение Коши предела функции в точке, доказать следующие равенства.

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0; \quad 3) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 4}} (2x + 3y) = 16; \quad 4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4; \quad 5) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x}{y} = 1.$$

II. Вычислить следующие пределы.

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1 + xy}}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(y - x^2)}{y - x^2}; \quad 3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y} + 9 - 3}; \quad 4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2);$$

$$5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2(x^2 + y^2)}{1 - \cos(x^2 + y^2)}; \quad 6) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1 + \frac{y}{x} \right)^x, \quad k \neq 0; \quad 7) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 + y^2}; \quad 8) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x};$$

$$9) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}; \quad 10) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}; \quad 11) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \quad 12) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)x^2 y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)};$$

$$13) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \left(1 - \frac{1}{x-y} \right)^{x^2 - y^2}; \quad 14) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{(x+y)^2}{(x^2 + y^4)^2}; \quad 15) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\cos \sqrt{x^2 + y^2})^{1/(x^2 + y^2)};$$

$$16) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x-y)(1 - \cos(x+y))}{\sqrt{x+y}}; \quad 17) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y \cos \frac{1}{y-x}.$$

III. Для функции u найти $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \lim_{y \rightarrow 0} u$ и ее повторные пределы $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} u$ и $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} u$ или доказать, что они не существуют.

$$1) \quad u = \frac{xy}{x^2 + y^2}; \quad 2) \quad u = \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 - xy + y^2}; \quad 3) \quad u = x + y \sin \frac{1}{x}; \quad 4) \quad u = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x};$$

$$5) \quad u = \frac{y}{x} \operatorname{tg} \frac{x}{x+y}.$$

IV. Найти предел функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ по прямой $x = \alpha t, y = \beta t$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; доказать, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует.

$$1) f(x, y) = \frac{y - 2x^2}{y - x^2}; \quad 2) f(x, y) = \frac{x^2 \sin y + y^2 \sin x}{x^4 + y^2}.$$

Тема 3. Непрерывность. Равномерная непрерывность. Свойства непрерывных функций

Функция $f(x, y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0; y_0) \in R^2$, если:

- 1) функция f определена в точке M_0 ;
- 2) точка M_0 является предельной точкой $D(f)$;
- 3) в точке M_0 существует конечный предел функции f , равный значению функции в этой точке, т.е. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0; y_0)$.

На ε - δ языке последнее условие можно записать так

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall (x, y) \in D(f))$$

$$(|x - x_0| < \delta) \wedge (|y - y_0| < \delta) \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0; y_0)| < \varepsilon]$$

или, что тоже самое,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall (x, y) \in D(f))$$

$$[\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0; y_0)| < \varepsilon].$$

Для функций нескольких переменных справедливы теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного функций, о сохранении знака непрерывной функцией, о непрерывности сложной функции, аналогичные соответствующими теоремами для функций из R^1 в R^1 .

Точка $M_0(x_0; y_0) \in R^2$, являющаяся предельной точкой области определения $D(f)$ функции $f(x, y)$, называется **точкой разрыва** этой функции, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) функция f не определена в точке M_0 ;

- 2) предел функции f в точке M_0 не существует или существует, но не равен ее значению в этой точке.

Функция f нескольких переменных называется **непрерывной на множестве** $M \subset D(f)$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Функция $f(x, y)$, определенная в окрестности точки $(x_0; y_0) \in R^2$, называется **непрерывной** в этой точке **по переменной x (по переменной y)**, если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = f(x_0; y_0)$ $\left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = f(x_0; y_0) \right)$.

Очевидно, что непрерывная в точке по совокупности аргументов функция будет непрерывна в этой точке и по каждому аргументу в отдельности. Обратное, вообще говоря, неверно.

Функция $f(x, y)$ называется **равномерно непрерывной** на множестве $M \subset D(f)$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall (x_1; y_1), (x_2; y_2) \in M)$$

$$\left[\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1; y_1) - f(x_2; y_2)| < \varepsilon \right]$$

Теорема Кантора. Функция $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, равномерно непрерывна на этом множестве.

Теорема 1 (аналог первой теоремы Вейерштрасса). Действительная функция $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, определенная и непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве M , ограничена на этом множестве.

Теорема 2 (аналог второй теоремы Вейерштрасса). Действительная функция $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, определенная и непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве M , принимает на нем свои наименьшее и наибольшее значения.

Теорема 3. Если функция f непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, не являющейся изолированной точкой $D(f)$, то существует такая окрестность $U(M_0)$ точки M_0 , что во всех точках множества $D(f) \cap U(M_0)$ функция f принимает значения того же знака, что и в точке M_0 .

Теорема 4. Если функция f непрерывна на связном множестве X и в точках $M_1 \in X$ и $M_2 \in X$ принимает неравные между собой значения $f(M_1) \neq f(M_2)$, то она принимает все промежуточные значения между $f(M_1)$ и $f(M_2)$.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{, если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Имеем $D(f) = R^2$. В любой точке $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ данная функция непрерывна по теоремам о непрерывности частного и композиции функций. Подозрительной на разрыв является точка $(0; 0)$. Найдем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2} = \left[\frac{\sin(x^4 + y^4) \sim x^4 + y^4}{\text{при } (x, y) \rightarrow (0; 0)} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \\ &= \left[\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi \\ (x, y) &\rightarrow (0; 0) \Leftrightarrow \rho \rightarrow 0 \end{aligned} \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) = \\ &= \left[\begin{aligned} \rho^2 &\text{ - б.м.ф. при } \rho \rightarrow 0, \\ \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi &\text{ - огранич. функция} \end{aligned} \right] = 0. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$, то функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$.

Пример 2. Найти точки разрыва функции $z = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y)(x + 3y)}$.

Решение. Функция имеет разрыв лишь в точках, где знаменатель обращается в нуль, т.е. на прямой $y = -\frac{x}{3}$ и параболы $y = x^2$, так как функция не определена в точках этих линий.

Пример 3. Исследовать на непрерывность по переменной x , по переменной y и по совокупности переменных в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x \neq 0 \wedge y \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \wedge y = 0. \end{cases}$$

Решение. Поскольку $f(x, 0) = 0$ при $x \neq 0$ и $f(0, y) = 0$ при $y \neq 0$, получаем, что $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$ и $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0)$, т.е. по каждой переменной в отдельности функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$. Найдем предел функции $z = f(x, y)$ по совокупности аргументов x, y в точке $(0, 0)$.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \left[x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} = \cos \varphi \sin \varphi.$$

Параметр $\varphi \in [0; 2\pi)$. Поэтому при различных значениях φ получаем различные значения этого предела. Так $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$ при $\varphi = 0$, а

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$ при $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Это означает, что предел функции f в точке $(0, 0)$ не существует, т.е. функция f не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

Пример 4. Исследовать на равномерную непрерывность функцию

$$z = 2x - 3y + 5.$$

Решение. Данная функция определена на всей действительной плоскости. Воспользуемся определением равномерной непрерывности и докажем, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall (x_1; y_1), (x_2; y_2) \in R^2)$$

$$(|x_1 - x_2| < \delta \wedge |y_1 - y_2| < \delta) \Rightarrow |(2x_1 - 3y_1 + 5) - (2x_2 - 3y_2 + 5)| < \varepsilon \quad (1)$$

Рассмотрим левую часть последнего неравенства

$$|(2x_1 - 3y_1 + 5) - (2x_2 - 3y_2 + 5)| = |2(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2)| \leq 2|x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2| < 2\delta + 3\delta = 5\delta < \varepsilon.$$

Требуемое неравенство имеет место, если взять $\delta = \varepsilon/5$, что и дает выполнение цепочки (1).

Упражнения.

I. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

II. Найти точки разрыва следующих функций. Указать точки устранимого разрыва.

$$1) z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 2) z = \frac{xy}{x + y}; 3) z = \frac{x + y}{x^3 + y^3}; 4) z = \sin \frac{1}{xy}; 5) z = \ln(1 - x^2 - y^2);$$

$$6) z = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases} \quad 7) z = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x + y}, & \text{если } x + y \neq 0, \\ 3, & \text{если } x + y = 0. \end{cases}$$

$$8) z = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x-y|}}, & \text{если } y \neq x, \\ x^2 - 5y + 6, & \text{если } y = x. \end{cases} \quad 9) z = \frac{1}{\ln|1 - x^2 - 4y^2|}; 10) u = \sin \frac{x}{yz};$$

$$11) u = \begin{cases} \frac{\sin xyz}{z}, & \text{если } z \neq 0, \\ x^2, & \text{если } z = 0. \end{cases}; 12) u = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y^2 + z^2}, & \text{если } y^2 + z^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

III. Исследовать функцию u на непрерывность по переменной x , по переменной y и по совокупности этих переменных в точке $(0, 0)$.

$$u = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{если } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{если } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

IV. Найти значение a , при котором функция

$$u = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } (x, y) \neq (0, 0), \\ a, & \text{если } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

в точке $(0, 0)$ является: 1) непрерывной по x , 2) непрерывной по y , 3) непрерывной по кривой $y = b\sqrt{x}$, $b \neq 0$, 4) непрерывной.

V. Найти значение a , при котором функция u в точке $(0, 0)$ является: 1) непрерывной по прямой $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; 2) непрерывной.

$$a) u = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } (x, y) \neq (0, 0), \\ a, & \text{если } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad б) u = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{если } (x, y) \neq (0, 0), \\ a, & \text{если } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

VI. Является ли функция $f(x, y)$ равномерно непрерывной в своей области определения.

$$1) f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; 2) f(x, y) = \frac{x + y}{xy}.$$

VII. Можно ли привести пример непрерывной функции $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, принимающей значение 1 в точке $M_0(1; -1)$, и такой, что в любой окрестности точки M_0 имеются точки, где функция принимает отрицательные значения?

VIII. Существуют ли наименьшее и наибольшее значения функции $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$? Принимает ли эта функция значение, равное 3?

Тема 4. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал функций нескольких переменных

Пусть $(x_0; y_0)$ – внутренняя точка области определения функции $f(x; y)$ двух переменных $((x_0; y_0) \in]D(f))$. Предел отношения $\frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ $\left(\frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y} \text{ при } \Delta y \rightarrow 0 \right)$, если он существует и конечен, называется **частной производной по переменной x (по переменной y)** функции $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ и обозначается $f'_x(x_0; y_0)$ ($f'_y(x_0; y_0)$), $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)$ ($\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)$).

Если частные производные функции f существуют в каждой точке множества $M \in R^2$, то говорят, что функция f имеет **частные производные на множестве M** .

По аналогии с функциями двух переменных определяются и частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ n переменных ($n > 2$) в рассматриваемой точке $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in]D(f)[$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1; \dots; x_k + \Delta x_k; \dots; x_n) - f(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\Delta x_k}.$$

Отсюда следует, что при вычислении частной производной по x_k можно пользоваться правилами и формулами дифференцирования функции одной переменной, считая все переменные, кроме x_k , фиксированными (постоянными).

Функция $z = f(x; y)$ называется **дифференцируемой в точке $(x_0; y_0) \in]D(f)[$** , если при любых допустимых приращениях Δx и Δy ее аргументов соответствующее полное приращение $\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ этой функции можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \quad (1)$$

или в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \Delta \rho. \quad (2)$$

Здесь A и B не зависят от Δx и Δy , $\alpha = \alpha(x_0; y_0; \Delta x; \Delta y) \rightarrow 0$ и $\beta = \beta(x_0; y_0; \Delta x; \Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\alpha = \alpha(x_0; y_0; \Delta \rho) \rightarrow 0$ при $\Delta \rho \rightarrow 0$.

Функция f называется **дифференцируемой в области $M \subset D(f)$** , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0) \in]D(f)[$, то линейная относительно Δx и Δy часть ее полного приращения (1) ((2)) назы-

вается **полным дифференциалом** (или, короче, дифференциалом) этой функции в точке $(x_0; y_0)$ и обозначается $df(x_0; y_0)$, т.е.

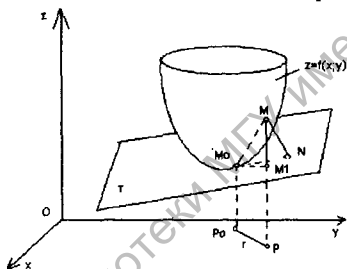
$$df(x_0; y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y. \quad (3)$$

Аналогичным образом вводятся понятия дифференцируемости и дифференциала для функций трех и более переменных.

Дифференциалы функций нескольких переменных обладают теми же свойствами, что и дифференциалы функций одной действительной переменной.

Пусть $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ – фиксированная точка поверхности $z = f(x, y)$, а $M(x, y, f(x, y))$ – произвольная точка этой поверхности.

Плоскость T , проходящая через точку M_0 поверхности $z = f(x, y)$, называется **касательной плоскостью** к этой поверхности в точке M_0 , если угол φ между прямой M_0M и плоскостью T стремится к нулю, когда точка M неограниченно приближается к точке M_0 по данной поверхности.



Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0) \in D(f)$, то существует касательная плоскость T к графику этой функции в точке $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$, не параллельная оси Oz , и уравнение этой плоскости имеет вид

$$Z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0). \quad (4)$$

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) есть приращение M_0M_1 аппликаты PM_1 касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ при переходе точки (x_0, y_0) плоскости xOy в точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Нормалью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости в этой же точке.

Уравнения нормали имеют вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (5)$$

Необходимые условия дифференцируемости функции в точке.

Теорема 2. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0) \in D(f)$, то она непрерывна в этой точке.

Теорема 3. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0) \in D(f)$, т.е. имеет место равенство (1), то существуют обе частные производные функции f в данной точке, причем $f'_x(x_0; y_0) = A$, $f'_y(x_0; y_0) = B$ и

$$df(x_0; y_0) = f'_x(x_0; y_0) \cdot dx + f'_y(x_0; y_0) \cdot dy. \quad (6)$$

Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Теорема 4. Если функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0) \in D(f)$ имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ и эти частные производные непрерывны в точке $(x_0; y_0)$, то функция f дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, т.е. имеет место равенство (6).

Пример 1. Найти частные производные и полный дифференциал функции $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

Решение. Данная функция в каждой точке области $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ имеет частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

которые непрерывны там, как частное многочленов. Следовательно, по теореме 4 функция f дифференцируема в области D . Ее дифференциал в этой области находим по формуле

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Таким образом,

$$df(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2} (x dx + y dy)$$

Пример 2. Найти $f'_x(0; 0)$ и $f'_y(0; 0)$, если $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $O(0; 0)$?

Решение. Найдем частные производные функции $f(x, y)$ по определению

$$f'_x(0; 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x; 0) - f(0; 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

$$f'_y(0; 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0; \Delta y) - f(0; 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Проверим частные производные функции $f(x, y)$ на непрерывность в окрестности точки $O(0; 0)$. Так как

$$f'_x(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

и

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_x(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}} = \begin{bmatrix} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt[3]{\frac{\sin \varphi}{\rho \cos^2 \varphi}} = \infty \quad \text{при } \varphi \neq 0 \text{ и } \varphi \neq \frac{\pi}{2},$$

то частная производная $f'_x(x, y)$ не является непрерывной в точке $(0; 0)$,

а, следовательно, по теореме 4 функция $f(x, y)$ не дифференцируема в этой точке.

Упражнения.

I. Найти частные производные следующих функций по каждой из независимых переменных.

- 1) $z = x^3y - y^3x$; 2) $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$; 3) $u = x^{\frac{v}{2}}$; 4) $u = (\sin x)^{\frac{v}{2}}$; 5) $z = e^{\frac{x}{y}}$; 6) $z = \ln(x + \ln y)$;
7) $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$; 8) $z = x^y$; 9) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

II. Найти $f'_x(x_0; y_0)$ и $f'_y(x_0; y_0)$, если:

- 1) $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0; y_0) = (3; 4)$; 2) $f(x, y) = (2x - 1)^{2y-1}$, $(x_0; y_0) = (1; -1)$;
3) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x_0; y_0) = (0; 1)$.

III. Верны ли следующие утверждения.

- 1) Если функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет частные производные, то она непрерывна в этой точке.
- 2) Если функция $f(x, y)$ имеет частные производные в каждой точке (x, y) плоскости, то она непрерывна на плоскости.
- 3) Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке она имеет частные производные.
- 4) Если в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ не дифференцируема, то она разрывна в этой точке.
- 5) Если функция $f(x, y)$ имеет в некоторой точке частные производные и функция непрерывна на плоскости, то она дифференцируема в этой точке.
- 6) Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке она имеет непрерывные частные производные.
- 7) Если функция $f(x, y)$ имеет в окрестности точки (x_0, y_0) частные производные и они непрерывны в этой точке, то она дифференцируема в точке (x_0, y_0) .
- 8) Если функция $f(x, y)$ непрерывна в окрестности точки (x_0, y_0) и имеет там частные производные, то она дифференцируема в точке (x_0, y_0) .

IV. Найти полный дифференциал функции u .

- 1) $u = \frac{x+y}{x-y}$; 2) $u = \arcsin \frac{x}{y}$; 3) $u = \operatorname{arctg}(xy)$; 4) $u = \frac{x(x-y)}{y^2}$; 5) $u = z^n$;
6) $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$; 7) $u = 2x^4 - 3x^2y^2 + x^3y$; 8) $u = (1 + xy)^n$.

V. Пользуясь определением, доказать, что функция u дифференцируема в своей области определения и найти ее дифференциал.

- 1) $u = xyz$; 2) $u = 2x + 5xy - y^2$.

VI. Доказать, что функция $f(x, y) = x^2 + |y|$ не дифференцируема в точке $(0; 0)$.

VII. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в заданной точке M_0 .

1) $z = x^2 + y^2$, $M_0(1; -2; 5)$; 2) $z = \frac{1}{2}y^2 \sin x$, $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 2; 2\right)$; 3) $z = xy - \frac{4x}{y^2}$, $M_0(1; 2; 1)$;

4) $z = x^2 - y^2$, $M_0(1; 1; 0)$.

VIII. Является ли дифференцируемой в точке $O(0; 0)$ функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$?

IX. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0; 0)$ функцию

$f(x, y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ при $x^2 + y^2 > 0$ и $f(0; 0) = 0$.

X. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y,$$

удовлетворяющее условию $z(x, x^2) = 1$.

Тема 5. Дифференцирование композиции функций нескольких переменных. Инвариантность формы записи дифференциала первого порядка

Теорема 1. Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы в точке $t \in D(\varphi) \cap D(\psi)$, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в соответствующей точке $(x, y) \in R^2$, то сложная функция $z = f(\varphi(t); \psi(t))$ имеет в точке t конечную производную по t , причем справедлива формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \varphi'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \psi'(t). \quad (1)$$

В частном случае, когда $z = f(x, y)$, $y = \psi(x)$ и x – независимая переменная, при выполнении условий теоремы 1 формула (1) принимает вид

$$\left[\frac{dz}{dx} \right]_n = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{d\psi}{dx} \quad (2)$$

Здесь $\frac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная по аргументу x функции $z = f(x, y)$, а $\left[\frac{dz}{dx} \right]_n$ – полная производная функции z по x , т.е. обычная производная по x функции $\varphi(x) = f(x, \psi(x))$ одной переменной x .

Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $(x, y, z) \in R^3$ и функция $z = \varphi(x, y)$ дифференцируема в соответствующей точке $(x, y) \in R^2$, то для полных производных сложной функции $u = f(x, y, \varphi(x, y))$ имеют место формулы

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_n = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_n = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Теорема 2. Если функции $x = \varphi(t; s)$ и $y = \psi(t; s)$ имеют в точке $(t; s)$ конечные частные производные $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}$ и в соответствующей точке $(x; y)$ функция $z = f(x; y)$ дифференцируема, то сложная функция $z = f(\varphi(t; s); \psi(t; s))$ имеет в точке $(t; s)$ конечные частные производные, причем справедливы равенства

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (3)$$

Теорема 3. Пусть в точке $(t; s)$ функции $x = \varphi(t; s)$ и $y = \psi(t; s)$ имеют непрерывные частные производные по t и по s , а функция $z = f(x; y)$ в окрестности соответствующей точки $(x; y)$ имеет частные производные f'_x и f'_y , непрерывные в этой точке. Тогда сложная функция $z = f(\varphi(t; s); \psi(t; s))$ имеет непрерывные частные производные по t и по s и дифференцируема в точке $(t; s)$, причем справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (4)$$

Здесь dx и dy – дифференциалы функций $x = \varphi(t; s)$ и $y = \psi(t; s)$ соответственно.

Форма записи (4) полного дифференциала сложной функции такая же, как и в случае независимых переменных x и y . В этом заключается свойство *инвариантности формы записи полного дифференциала* функции двух переменных.

При соответствующих предположениях в случае сложной функции $z = f(u_1; u_2; \dots; u_k)$, где $u_i = \varphi_i(x_1; x_2; \dots; x_n)$, $i = 1, k$, полный дифференциал функции $z = f(u_1; u_2; \dots; u_k)$ имеет инвариантную форму

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n,$$

причем для частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ справедливы формулы, аналогичные формулам (3).

Пример 1. Составить, если это возможно, композицию $g \circ f$ функций $g(u, v) = u^2 + 2uv - v^2$ и $f(x, y) = (x; 2y)$.

Решение. Для существования сложной функции $g \circ f$ множество значений функции f должно содержать область определения функции g . Это условие выполняется, поскольку $E(f) = D(g) = R^2$.

Тогда

$$g \circ f = g(f(x; y)) = g(x; 2y) = \left[\begin{matrix} u = x \\ v = 2y \end{matrix} \right] = x^2 + 2x \cdot 2y - 4y^2 = x^2 + 4xy - 4y^2.$$

Пример 2. Найти все частные производные по независимым переменным x, y композиции $z = g \circ f$, если $f(t; s) = (\ln t; ts)$, $g(x; y) = x^2 + y$.

Решение. В композиции $g \circ f$ промежуточные переменные x и y определяются равенствами $x = \ln t$, $y = ts$. Для функций $x = \varphi(t; s)$, $y = \psi(t; s)$, $z = g(x; y)$ выполняются все условия теоремы 2, поэтому искомые частные производные найдем по формулам (3).

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{t}; \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = s; \quad \frac{\partial y}{\partial s} = t.$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2x \cdot \frac{1}{t} + 1 \cdot s = [x = \ln t] = \frac{2 \ln t}{t} + s; \quad \frac{\partial z}{\partial s} = 2x \cdot 0 + 1 \cdot t = t.$$

Пример 3. По формуле дифференцирования сложной функции найти $\frac{du}{dt}$, если $u = xe^y \cos z$, где $x = t^2$, $y = \ln t$, $z = 3t$.

Решение. Указанная производная, очевидно, существует в любой точке $t > 0$. Для ее вычисления воспользуемся формулой

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y \cos z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^y \cos z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -xe^y \sin z, \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{dz}{dt} = 3,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= e^y \cos z \cdot 2t + xe^y \cos z \cdot \frac{1}{t} - 3xe^y \sin z = 2t^2 \cos 3t + t^2 \cos 3t - 3t^3 \sin 3t = \\ &= 3t^2 (\cos 3t - t \sin 3t). \end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\frac{du}{dx}$, если $u = \frac{x^3 \sin y}{z}$, где $y = x^3$, $z = e^{-x}$.

Решение. По формуле полной производной

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$$

при $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{2x \sin y}{z} + \frac{x^2 \cos y}{z} \cdot 3x^2 + \frac{x^3 \sin y}{z^2} e^{-x} = 2xe^x \sin x^3 + 3x^4 e^x \cos x^3 + x^2 e^x \sin x^3 = \\ &= xe^x ((2+x) \sin x^3 + 3x^3 \cos x^3). \end{aligned}$$

Заметим, что этот же результат имеет место, если представить данную сложную функцию в виде $u = x^2 e^x \sin x^3$ и воспользоваться правилами дифференцирования функций одной переменной.

Пример 5. По формулам дифференцирования сложной функции найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u^2 \arctg v$, где $u = 2x - 5y$, $v = x^2 + y^3$.

Решение. Искомые частные производные, как легко видеть, существуют в любой точке $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u \arctg v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u^2}{1+v^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -5, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2,$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4u \arctg v + \frac{u^2}{1+v^2} \cdot 2x = 4(2x-5y) \arctg(x^2+y^3) + \frac{2x(2x-5y)^2}{1+(x^2+y^3)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -10u \arctg v + \frac{u^2}{1+v^2} \cdot 3y^2 = -10(2x-5y) \arctg(x^2+y^3) + \frac{3y^2(2x-5y)^2}{1+(x^2+y^3)^2}.$$

Пример 6. Преобразовать к полярным координатам уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}. \quad (5)$$

Решение. Задача заключается в получении с помощью формул $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ перехода к полярным координатам из уравнения (5), записанного для переменных x и y , равносильного ему уравнения, содержащего новые переменные ρ и φ .

Пусть $y = f(x)$ — некоторая функция, удовлетворяющая уравнению (5). Будем рассматривать выражение в левой части уравнения (5) как отношение дифференциалов. Для их отыскания воспользуемся формулой дифференциала сложной функции. Это можно сделать, т.к. все частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi$$

определены и непрерывны на R^2 . В результате приходим к уравнению

$$\frac{\sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi}{\cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi} = \frac{\rho(\cos \varphi + \sin \varphi)}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)},$$

из которого после элементарных преобразований имеем

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho.$$

Упражнения.

I. Составить композицию функций $g \circ f$, если это возможно.

а) $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, $g(x, y) = x^2 + y^2$; б) $f(x, y) = (x, y^3)$, $g(x) = 5x$;

в) $f(x, y) = (\cos x, \sin y)$, $g(x, y) = (xy, 2x, x^2 + y^2)$.

II. Найти все частные производные по независимым переменным композиции $h = g \circ f$, если:

а) $f(x, y) = (xy^2, x+y)$; $g(u, v) = \cos uv$;

б) $f(x, y) = (x \cosh y, y \sinh x)$, $g(u, v) = u + v^2$;

в) $f(x_1, x_2) = (\cos(x_1 + x_2), \arcsin x_2 + x_1^3, e^{x_1 x_2} + \ln x_1)$, $g(y_1, y_2, y_3) = e^{y_1 + y_2 + y_3}$;

г) $f(x, y, z) = (xy^2, xe^{yz}, \ln x + \cos y + \sin z)$, $g(u, v, w) = vw \ln u$.

III. Найти частные производные по независимым переменным сложной функции.

1) $z = \arcsin(x-y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$; 2) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = t^3$;

$$3) u = x^2 y^2 z, \quad x = t, \quad y = t^3, \quad z = \sin t; \quad 4) z = x^2 y - y^2 x, \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v;$$

$$5) z = x^2 \ln y, \quad x = \frac{u}{v}, \quad y = 3u - 2v.$$

IV. Найти полную производную функции u по переменной x , если:

$$1) u = \arcsin \frac{x}{z}, \quad z = \sqrt{x^2 + 1}; \quad 2) u = \operatorname{arctg}(xy), \quad y = e^x; \quad 3) u = \ln(e^x + e^y), \quad y = x^3;$$

$$4) u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2 + 1}, \quad y = a \sin x, \quad z = \cos x.$$

V. Найти полный дифференциал функции $z = f(u, v)$ двумя способами: по определению дифференциала и с помощью свойства инвариантности формы записи дифференциала первого порядка.

$$1) z = f(x^2 y; x^y); \quad 2) z = f(x^2 - y^2; e^{xy}).$$

VI. По формулам дифференцирования сложной функции найти частные производные функции z .

$$1) z = (x^2 + y^2)^{\frac{x^2 + y^2}{xy}}; \quad 2) z = \frac{xy \sin(xy + x + y)}{x + y}.$$

VII. Убедитесь, что если f – произвольная дифференцируемая функция, то функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет данному уравнению.

$$1) z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}, \quad \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}; \quad 2) z = yf(x^2 - y^2), \quad y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz;$$

$$3) z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

VIII. Преобразовать к полярным координатам выражение.

$$1) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2; \quad 2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

IX. Преобразовать уравнение к новым координатам.

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = x + y, \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi; \quad 2) y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}, \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = x - y.$$

Тема 6. Частные производные высших порядков.

Дифференциалы высших порядков.

Формула Тейлора и ряд Тейлора

Пусть функция $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$ по всем переменным. **Частной производной**

второго порядка функции $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется частная производная по переменной x_j , $j = \overline{1, n}$ от частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$ и обозначаются

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{или} \quad f''_{x_i x_j}.$$

Если $i = j$, то вместо $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ пишут $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Если $i \neq j$, то частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ называют **смешанными частными производными**.

Пусть функция $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет частные производные до порядка $m-1$ включительно по всем переменным. **Частной производной m -го порядка** функции $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется частная производная по переменной x_j , $j = \overline{1, n}$, от любой частной производной порядка $m-1$. Например, функция $z = f(x, y)$ имеет следующие частные производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \text{ и т.д.}$$

Пусть функция $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет частные производные до порядка $m-1$ включительно по всем переменным. Функция $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **m раз дифференцируемой** в некоторой области $E \subset D$, если все ее частные производные до порядка $m-1$ включительно являются дифференцируемыми функциями в E .

Функция $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **m раз непрерывно дифференцируемой** в некоторой области $E \subset D$, если все ее частные производные до порядка m включительно являются непрерывными функциями в E .

Теорема 1. Пусть функция $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема m раз в точке M_0 . Тогда в этой точке значение любой смешанной частной производной m -го порядка не зависит от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда ее дифференциал (дифференциал первого порядка), как известно, равен

$$du(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy, \quad (x, y) \in D. \quad (1)$$

Дифференциал от дифференциала (1) вычисленный в точке $M(x, y)$ при тех же приращениях Δx и Δy , что и дифференциал (1), называют **дифференциалом второго порядка (вторым дифференциалом)** функции $z = f(x, y)$ и обозначают $d^2 z$, $d^2 f$.

Таким образом, по определению $d^2 f(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} d(df(x, y))$.

Теорема 2. Если функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M(x, y)$, то дифференциал второго порядка $d^2 z$ выражается через частные производные второго порядка формулой

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)dy^2, \quad (2)$$

где $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ является m раз дифференцируемой в некоторой области $E \subset D$. **Дифференциалом m -го порядка** функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется дифференциал первого порядка в точке $M(x, y)$ от дифференциала порядка $m-1$, вычисленный при тех же приращениях независимых переменных, что и дифференциал порядка $m-1$. Таким образом, по определению имеем

$$d^m f(x, y) = d(d^{m-1} f(x, y)).$$

Для дифференциала m -го порядка при сделанных предположениях справедлива формула

$$d^m z = \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k} dy^k, m \geq 2. \quad (3)$$

Определение дифференциала m -го порядка, введенное для функции двух переменных, естественным образом распространяется на случай функции n ($n \geq 2$) переменных $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных не обладают свойством инвариантности формы записи. Это означает, что для функции $z = f(x, y)$ в случае, когда x и y – зависимые переменные, формула (2) не имеет места.

Теорема 3. Пусть функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки $P(u, v)$, а функция $z = f(x, y)$ – в окрестности соответствующей точки $M(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Тогда для дифференциала второго порядка сложной функции $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ в точке $M(x, y)$ справедлива формула

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y. \quad (4)$$

Формула (4) отличается от формулы (2) последними двумя слагаемыми, в которых $d^2 x$ и $d^2 y$ представляют собой дифференциалы функций $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ и, вообще говоря, не равны тождественно нулю.

Замечание. В случае, когда переменные x и y линейно зависят от переменных u и v или являются независимыми переменными, $d^2 x \equiv 0$ и $d^2 y \equiv 0$, а формула (4) принимает вид формулы (2), т.е. форма записи $d^2 z$ сохраняется.

Теорема 4. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными до порядка $n+1$ включительно, в некоторой δ -окрестности $S(M_0, \delta)$ точки $M_0(x_0, y_0)$. Тогда в этой δ -окрестности справедлива **формула Тейлора**

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) + \dots + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} (x-x_0)^{n-k} (y-y_0)^k + R_n(x, y) \quad (5)$$

где

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{\partial^{n+1} f(x_0 + \Theta(x-x_0), y_0 + \Theta(y-y_0))}{\partial x^{n-k+1} \partial y^k} (x-x_0)^{n-k+1} (y-y_0)^k, \quad 0 < \Theta < 1,$$

есть *остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа*. При $x_0 = y_0 = 0$ формулу (5) называют *формулой Маклорена*.

Замечание. Формула Тейлора (5) и остаточный член в форме Лагранжа в дифференциальной форме имеют вид

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + R_n(x, y),$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \Theta \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y), \quad 0 < \Theta < 1.$$

Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ производные любого порядка, то ряд

$$f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) \quad (6)$$

называют *рядом Тейлора* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Если этот ряд сходится в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ к функции $z = f(x, y)$, то говорят, что в этой окрестности функция $z = f(x, y)$ разлагается в ряд Тейлора. При $x_0 = y_0 = 0$ ряд (6) называют *рядом Маклорена*.

Пример 1. Найти дифференциал второго порядка функции $z = \ln(x + y^2)$.

Решение. 1 способ. Воспользуемся определением дифференциала второго порядка $d^2 z = d(dz)$. Найдем дифференциал первого порядка функции z . Для этого вычислим частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}.$$

Тогда

$$dz = \frac{dx + 2ydy}{x + y^2};$$

$$\begin{aligned} d^2 z &= d\left(\frac{dx + 2ydy}{x + y^2}\right) = \left[d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}\right] = \\ &= \frac{d(dx + 2ydy)(x + y^2) - (dx + 2ydy)d(x + y^2)}{(x + y^2)^2} = \left[\begin{array}{l} dx = const, \\ dy = const \end{array}\right] = \\ &= \frac{2dy^2(x + y^2) - (dx + 2ydy)(dx + 2ydy)}{(x + y^2)^2} = \frac{-dx^2 - 4ydx dy + 2(x - y^2)dy^2}{(x + y^2)^2}. \end{aligned}$$

2 способ. Найдем дифференциал второго порядка, используя равенство (2). Вычислим частные производные второго порядка функции z .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{(x + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2 \frac{x + y^2 - 2y^2}{(x + y^2)^2} = 2 \frac{x - y^2}{(x + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

Имеем

$$d^2 z = -\frac{dx^2}{(x+y^2)^2} - \frac{4y dx dy}{(x+y^2)^2} + 2 \frac{(x-y^2) dy^2}{(x+y^2)^2} = \frac{-dx^2 - 4y dx dy + 2(x-y^2) dy^2}{(x+y^2)^2}.$$

Пример 2. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x, y) = e^y \cos x$, выписав слагаемые до третьего порядка включительно.

Решение. 1 способ. Функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными любого порядка в окрестности точки $(0; 0)$, следовательно, по теореме 4 ее можно разложить по формуле Маклорена. Для этого найдем частные производные функции $f(x, y)$ до третьего порядка в точке $(0; 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) = (-e^y \sin x)_{(x,y)=(0,0)} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0; 0) = (e^y \cos x)_{(x,y)=(0,0)} = 1.$$

Заметим, что частные производные любого порядка по переменной y в точке $(0; 0)$ будут равны 1.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0; 0) = (-e^y \cos x)_{(x,y)=(0,0)} = -1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0; 0) = (-e^y \sin x)_{(x,y)=(0,0)} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0; 0) = (e^y \sin x)_{(x,y)=(0,0)} = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0; 0) = (-e^y \cos x)_{(x,y)=(0,0)} = -1;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(0; 0) = (-e^y \sin x)_{(x,y)=(0,0)} = 0.$$

Положив $n = 4$, $x_0 = y_0 = 0$, $dx = x$, $dy = y$ в формуле (5), получим требуемое разложение

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + y + \frac{1}{2!}(-x^2 + y^2) + \frac{1}{3!}(-C_3^2 x^2 y + y^3) + R_4(x, y) = \\ &= 1 + y + \frac{-x^2 + y^2}{2} + \frac{-3x^2 y + y^3}{6} + R_4(x, y), \end{aligned}$$

где $R_4(x, y)$ – остаточный член формулы Маклорена в форме Лагранжа.

2 способ. Воспользуемся известными разложениями функций e^y и $\cos x$ по формуле Маклорена. В результате получим

$$\begin{aligned} f(x, y) = e^y \cos x &= \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{2} + y - \frac{yx^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^2 x^2}{4} + \\ &+ \frac{y^3}{6} + \dots = 1 + y + \frac{-x^2 + y^2}{2} + \frac{-3x^2 y + y^3}{6} + \dots = 1 + y + \frac{-x^2 + y^2}{2} + \frac{-3x^2 y + y^3}{6} + R_4(x, y). \end{aligned}$$

Упражнения.

I. Для функции $z = f(x, y)$ проверить равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

- 1) $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$; 2) $z = \ln(x^2 + y^2)$; 3) $z = e^{xy}$; 4) $z = \arctg \frac{y}{x}$;
5) $z = e^x (\cos y + x \sin y)$.

II. Найти частные производные второго порядка следующих функций.

- 1) $z = \frac{x-y}{x+y}$; 2) $z = y^{\ln x}$; 3) $z = \arcsin(xy)$; 4) $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$; 5) $u = x(1 + y^2 z^3)$;
6) $u = \sin(x + y + z)$.

III. Найти частные производные второго порядка следующих функций в точке M_0 .

- 1) $z = \ln(x^2 + 2y)$, $M_0(1; 0)$; 2) $z = \frac{x}{x+y}$, $M_0(1; 0)$; 3) $z = y^2(1 - e^x)$, $M_0(1; 0)$;
4) $z = y \sin x$, $M_0(2; \pi)$; 5) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M_0(1; 1; 1)$; 6) $u = x^{y \cos z}$, $M_0(e; 1; 0)$.

IV. Найти указанную частную производную функции u .

- 1) $u = \ln(x+y)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}$; 2) $u = \cos(e^{2y} - 2x)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$; 3) $u = e^{xyz}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$;
4) $u = \sqrt{xy^3 z^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$.

V. Найти дифференциал n -ого порядка функции u .

- 1) $u = \frac{1}{y} e^{xy}$, $n = 2$; 2) $u = x(1+y)$, $n = 2$; 3) $u = x \sin^2 y$, $n = 2$; 4) $u = y \ln x$, $n = 2$;
5) $u = x^2 y$, $n = 3$; 6) $u = xyz$, $n = 3$.

VI. Найти дифференциал второго порядка функции u в точке M_0 .

- 1) $u = x^2 \operatorname{ch} 3y - y^2$, $M_0(0; 0)$; 2) $u = \operatorname{arctg}(x^2 - 2y)$, $M_0(1; 0)$;
3) $u = xy + yz + xz$, $M_0(1; 1; 1)$; 4) $u = \ln(x + y + z)$, $M_0(1; 0; 1)$.

VII. Найти дифференциал второго порядка сложной функции u .

- 1) $u = e^{x+y}$, $x = tz$, $y = \ln(t+z)$; 2) $u = x \cos y$, $y = t+z$, $x = t^2$; 3) $u = f(x+y, z)$;
4) $u = f(x, y)$, $x = tz$, $y = \frac{t}{z}$.

VIII. Доказать, что уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ удовлетворяют следующие функции:

- 1) $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$; 2) $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$; 3) $u = \operatorname{arctg}(y/x)$.

IX. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, $u(x, x) = x$, $\frac{\partial u(x, x)}{\partial x} = x^2$; 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y$, $u(x, 0) = \sin x$, $u(0, y) = y$.

X. Разложить по формуле Тейлора функцию f в окрестности заданной точки.

- 1) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, $(-2; 1)$; 2) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$, $(1; 2)$;
3) $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$, $(1; 1; -2)$; 4) $f(x, y, z) = xyz$, $(1; 2; 3)$.

XI. Разложить по формуле Маклорена функцию f , выписав слагаемые до n -го порядка включительно.

- 1) $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$, $n = 2$; 2) $f(x, y) = e^{2x} \ln(1+y)$, $n = 4$;
3) $f(x, y, z) = \cos x \cos y \cos z - \cos(x+y+z)$, $n = 2$; 4) $f(x, y) = \operatorname{ch}(x+y)$, $n = 2$.

Тема 7. Производная по направлению. Градиент

Пусть даны функция $z = f(x; y)$ и точка $P_0(x_0; y_0) \in D(f) [\subset \mathbb{R}^2]$. Пусть, далее, l – направленная прямая, расположенная в плоскости Oxy и проходящая через точку P_0 (см. рис. 1).

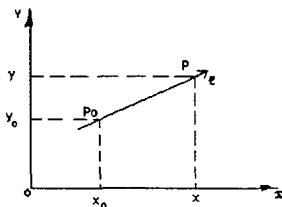


Рис. 1

Выберем на этой прямой одно из направлений $\overrightarrow{P_0P}$, где $P(x; y) \in D(f)$ – произвольная точка на прямой l (для нее $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$). Обозначим через Δl проекцию вектора $\overrightarrow{P_0P}$ на направление l : $\Delta l = \rho(P_0; P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, если направление вектора $\overrightarrow{P_0P}$ совпадает с направлением l и $\Delta l = -\rho(P_0; P)$, если направление вектора $\overrightarrow{P_0P}$ противоположно направлению l .

Частной производной функции $z = f(x; y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ по направлению l называется предел отношения $\frac{f(P) - f(P_0)}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$, если этот предел существует и обозначается $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}$. Таким образом,

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(x; y) - f(x_0; y_0)}{\Delta l}, \quad ((x; y) \in l \cap D(f)).$$

Из данного определения следует, что если направление l совпадает с положительным направлением оси Ox (оси Oy), то

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial l} = f'_x(x_0; y_0) \quad \left(\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial l} = f'_y(x_0; y_0) \right).$$

Аналогично вводится понятие производной функции $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; \dots; x_n^{(0)})$ по данному направлению l (в $\mathbb{R}^n$).

Теорема 1 (о связи производной по направлению с частными производными). Если функция $f(x; y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то она имеет в этой точке производную по любому направлению l , причем

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial l} = f'_x(x_0; y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0; y_0) \cos \beta, \quad (1)$$

где α и β – величины углов, образованных направлением l с положительными направлениями осей Ox и Oy .

Так как $\sin \alpha = \cos \beta$, то при выполнении условий теоремы 1 справедлива формула

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial l} = f'_x(x_0; y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0; y_0) \sin \alpha. \quad (1')$$

Если функция $u = f(x; y)$ двух переменных имеет в точке $(x_0; y_0) \in D(f) \subset \mathbb{R}^2$ конечные частные производные, то вектор $f'_x(x_0; y_0) \cdot \vec{i} + f'_y(x_0; y_0) \cdot \vec{j}$ называется **градиентом** этой функции в точке $(x_0; y_0)$ и обозначается $\text{grad} f(x_0; y_0)$, где i, j – орты на осях координат Ox и Oy соответственно, т.е.

$$\text{grad} f(x_0; y_0) = f'_x(x_0; y_0) \cdot \vec{i} + f'_y(x_0; y_0) \cdot \vec{j}.$$

Производная по направлению функции f выражается через вектор градиент следующим образом

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial l} = |\text{grad} f(x_0; y_0)| \cdot \cos \varphi, \quad (2)$$

где φ – величина угла между вектором $\text{grad} f(x_0; y_0)$ и единичным вектором $\vec{\tau}$ на выбранном направлении. Таким образом, производная по направлению равна проекции градиента на это направление.

Градиент функции $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ характеризует направление и величину максимального роста этой функции в точке $(x_0; y_0)$. Из равенства (2) следует, что если направление l совпадает с направлением вектора $\text{grad} f(x_0; y_0)$, то производная функции $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ в этом направлении будет наибольшей (при условии, что $\text{grad} f(x_0; y_0) \neq \vec{0}$). Наименьшее значение производная по направлению будет иметь, когда вектор градиент направлен в сторону, противоположную выбранному направлению.

Пример 1. Найти производную функции $z = \arctg xy$ в точке $M_0(1; 1)$ в направлении $l = (1/2; 1)$.

Решение. Функция z в окрестности точки M_0 имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2 y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2 y^2},$$

которые непрерывны в самой точке M_0 . Следовательно, по достаточному условию дифференцируемости функция z дифференцируема в точке M_0 и ее производную в этой точке по заданному направлению l можно найти по формуле (1).

Угол α – это угол между направлением $l(1/2; 1)$ и ортом $e_1(1; 0)$, угол β – это угол между направлением $l(1/2; 1)$ и ортом $e_2(0; 1)$. По формуле косинуса угла между векторами находим

$$\cos \alpha = \frac{(1/2; 1) \cdot (1; 0)}{\sqrt{(1/2)^2 + 1^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos \beta = \frac{(1/2; 1) \cdot (0; 1)}{\sqrt{(1/2)^2 + 1^2} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Так как $\frac{\partial z}{\partial x}(1;1) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1;1) = \frac{1}{2}$, то по формуле (1) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial l}(1;1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Пример 2. Найти наименьшее значение производной по направлению функции $f(x,y) = 3xy^3 - x^2y^4$ в точке $M_0(1; 2)$.

Решение. Производная по направлению в некоторой точке M_0 принимает наименьшее значение, когда направление противоположно вектору градиенту функции в этой точке. В формуле (2) в этом случае $\cos \varphi = -1$, т.е.

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial l} = -|\text{grad} f(x_0; y_0)|.$$

Найдем частные производные функции $f(x,y)$ в точке M_0 .

$$f'_x = 3y^3 - 12xy^4, \quad f'_x(1; 2) = -8; \quad f'_y = 9xy^2 - 4x^2y^3, \quad f'_y(1; 2) = 4.$$

Тогда $|\text{grad} f(1; 2)| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ и наименьшее значение производной по направлению функции $f(x,y)$ в точке $M_0(1; 2)$ есть $\frac{\partial f}{\partial l}(1; 2) = -4\sqrt{5}$.

Упражнения.

I. Найти производные следующих функций по направлению l в заданной точке M_0 .

- 1) $z = x^3 + y^3$, l — биссектриса первого и третьего координатных углов, $M_0 = (1; 1)$;
- 2) $z = 5x + 10x^2y + y^5$, $l = \overline{M_0M}$, $M = (5; -1)$, $M_0 = (1; 2)$;
- 3) $z = 3x^2 + 5y^2$, $l = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_0 = (1; 1)$;
- 4) $z = x \sin(x+y)$, $l = (-1; 0)$, $M_0 = (\pi/4; \pi/4)$;
- 5) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $l = (-1/3; 2/3; 1/3)$, $M_0 = (3; 3; 1)$;
- 6) $u = xy^2z^3$, $l = \overline{M_0M}$, $M = (7; 5; 1)$, $M_0 = (3; 2; 1)$.

II. Найти вектор-градиент следующих функций в заданной точке M_0 .

- 1) $z = x^2 + y^2$, $M_0 = (3; 2)$; 2) $z = yx^y$, $M_0 = (2; 1)$; 3) $z = e^{x+y+yz}$, $M_0 = (1; 2; 1)$.

III. В каком направлении производная по направлению функции $z = f(x,y)$ в заданной точке M_0 имеет: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение; в) равна 0.

- 1) $z = x^2 - xy + y^2$, $M_0 = (1; 1)$; 2) $z = \frac{x+\sqrt{y}}{y}$, $M_0 = (2; 1)$.

IV. Найти наибольшее значение производной по направлению функции f в заданной точке M_0 .

- 1) $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$; 2) $f = xy^2 - 3x^4y^5$, $M_0 = (1; 1)$;

3) $f = \ln xyz$, $M_0 = (1; -2; -3)$; 4) $f = \arcsin xy + \arccos yz$, $M_0 = (1; 0.5; 0)$.

V. Показать, что функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, не дифференцируемая в точке $(0; 0)$, имеет в этой точке производную по любому направлению.

VI. Найти градиент функции $z = 2xy$ в произвольной точке $(x_0; y_0)$ и убедиться, что он в этой точке перпендикулярен линии уровня.

VII. Найти угол между градиентами функции $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ в точках $(1; 1)$ и $(3; 4)$.

VIII. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(x_0; y_0)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

Тема 8. Функции одной и нескольких переменных, заданные неявно. Неявно заданные функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$

Будем говорить, что уравнение

$$F(x; y) = 0 \quad (1)$$

задает неявно функцию $y = f(x)$ на некотором промежутке $[a; b]$, если при подстановке $y = f(x)$ в уравнение (1) получаем тождество $F(x; f(x)) \equiv 0$ при всех $x \in [a; b]$.

Будем говорить, что уравнение

$$F(x; y; z) = 0 \quad (2)$$

задает неявно функцию $z = f(x; y)$ на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}^2$, если при подстановке $z = f(x; y)$ в уравнение (2) получаем тождество $F(x; y; f(x; y)) \equiv 0$ при всех $(x; y) \in D$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

- 1) функция $F(x; y)$ и ее частные производные $F'_x(x; y)$, $F'_y(x; y)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$;
- 2) $F(x_0; y_0) = 0$;
- 3) $F'_y(x_0; y_0) \neq 0$.

Тогда уравнение (1) задает неявно в некоторой окрестности точки x_0 непрерывную функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую условию $f(x_0) = y_0$, причем функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема в этой окрестности и

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x; f(x))}{F'_y(x; f(x))}. \quad (3)$$

Замечание 1. Производную неявно заданной уравнением (1) функции можно найти без использования формулы (3) следующим способом. При выполнении условий теоремы 1 в силу определения 1 выполняется тождество $F(x; f(x)) \equiv 0$ при всех $x \in [a; b]$. Дифференцируя его по x , получим равенство

$$F'_x(x; f(x)) + F'_y(x; f(x))f'(x) = 0, \quad (4)$$

из которого находим $f'(x)$.

Замечание 2. Если выполняются условия теоремы 1 и функция $F(x; y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то, дифференцируя соотношение (4) по x , получим равенство

$$F''_{xx}(x; f(x)) + 2F''_{xy}(x; f(x))f'(x) + F''_{yy}(x; f(x))(f'(x))^2 + F'_y(x; f(x))f''(x) = 0.$$

Отсюда находим вторую производную $f''(x)$.

Замечание 3. Если $F'_x(x_0; y_0) \neq 0$, то при выполнении условий 1)-2) теоремы 1 уравнение (1) определяет неявно некоторую функцию $x = g(y)$. Если же обе частные производные $F'_x(x_0; y_0)$ и $F'_y(x_0; y_0)$ равны нулю, то точку $(x_0; y_0)$ называют **особой точкой** для геометрического образа уравнения (1).

Замечание 4. При выполнении условий теоремы 1 существуют касательная и нормаль к графику функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением (1), в точке x_0 , уравнения которых соответственно имеют вид

$$F'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0)(y - y_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0)} = -\frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0)}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

- 1) функция $F(x; y; z)$ и ее частные производные $F'_x(x; y; z)$, $F'_y(x; y; z)$, $F'_z(x; y; z)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0; z_0)$;
- 2) $F(x_0; y_0; z_0) = 0$;
- 3) $F'_z(x_0; y_0; z_0) \neq 0$.

Тогда уравнение (2) задает неявно в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$ непрерывную функцию $z = f(x; y)$, удовлетворяющую условию $f(x_0; y_0) = z_0$, причем функция $z = f(x; y)$ непрерывно дифференцируема в этой окрестности и

$$f'_x(x; y) = -\frac{F'_x(x; y; f(x; y))}{F'_z(x; y; f(x; y))}, \quad f'_y(x; y) = -\frac{F'_y(x; y; f(x; y))}{F'_z(x; y; f(x; y))}. \quad (5)$$

Замечание 5. Для функции $z = f(x; y)$, заданной неявно уравнением (2), при выполнении условий теоремы 2 справедливы замечания, аналогичные замечаниям 1-3 к теореме 1, с соответствующими изменениями.

Замечание 6. При выполнении условий теоремы 2 существуют касательная плоскость и нормаль к графику функции $z = f(x; y)$, заданной неявно уравнением (2), в точке $(x_0; y_0)$, уравнения которых соответственно имеют вид

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = -\frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = -\frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}. \quad (7)$$

Будем говорить, что система

$$\begin{cases} F(x; y; u; v) = 0, \\ G(x; y; u; v) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

задает неявно функции $u = f(x; y)$, $v = g(x; y)$ на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}^2$, если при подстановке $u = f(x; y)$, $v = g(x; y)$ в (7) при всех $(x; y) \in D$ получают тождества

$$\begin{cases} F(x; y; f(x; y); g(x; y)) \equiv 0, \\ G(x; y; f(x; y); g(x; y)) \equiv 0. \end{cases} \quad (9)$$

Теорема 3. Пусть функции $F(x; y; u; v)$, $G(x; y; u; v)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0; u_0; v_0)$ и выполняются условия:

- 1) координаты точки P_0 удовлетворяют системе (8);
- 2) якобиан

$$I(x; y; u; v) = \frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}$$

системы (8) в точке P_0 отличен от нуля, т.е. $I(x_0; y_0; u_0; v_0) \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ система (8) определяет неявно функции $u = f(x; y)$, $v = g(x; y)$ такие, что $u_0 = f(x_0; y_0)$, $v_0 = g(x_0; y_0)$, причем

- а) эти функции непрерывны в окрестности точки M_0 ;
- б) они имеют в этой окрестности частные производные.

Частные производные функций f и g , например, по переменной x могут быть найдены путем дифференцирования тождеств системы (9) по этой переменной. В результате получаем систему

$$\begin{cases} F'_x + F'_u u'_x + F'_v v'_x = 0, \\ G'_x + G'_u u'_x + G'_v v'_x = 0, \end{cases}$$

линейную относительно неизвестных u'_x и v'_x . Определителем этой системы является якобиан $I(x; y; u; v)$, который в точке P_0 отличен от нуля в силу условия 2) теоремы 3. Следовательно, система имеет единственное решение в окрестности этой точки. Решая ее, находим неизвестные частные производные u'_x и v'_x . Частные производные функций f и g по переменной y находят аналогично тому, как это делалось при нахождении частных производных u'_x и v'_x .

Пример 1. Определить задает ли уравнение $ye^x + e^y - 1 = 0$ неявно непрерывную функцию $y = f(x)$ в окрестности точки $x=1$ при условии $f(1)=0$. Выяснить имеет ли эта функция производную в окрестности этой точки и если да, то вычислить её.

Решение. Обозначим через $F(x, y) = ye^x + e^y - 1$. Проверим выполнимость условий теоремы 1. Функция $F(x, y)$ и ее частные производные $F'_x = ye^x$, $F'_y = e^x + e^y$ определены и непрерывны в окрестности точки $(1; 0)$. Так как $F(1; 0) = 0$, а $F'_y(1; 0) = e + 1 \neq 0$, то все условия теоремы 1 выполнены. Следовательно, данное уравнение задает в окрестности точки $x=1$ непрерывную и

дифференцируемую функцию $y = f(x)$. Производная этой функции в окрестности точки $x = 1$, согласно формуле (3), определяется равенством

$$y' = -\frac{ye^x}{e^x + e^y}. \quad (10)$$

В самой точке $x = 1$ имеем $y'(1) = -\frac{0}{e+1} = 0$.

Заметим, что для нахождения производной функции $y = f(x)$ можно было воспользоваться способом, указанным в замечании 1. Продифференцируем уравнение $ye^x + e^y - 1 = 0$, полагая $y = f(x)$. В результате получим соотношение

$$y'e^x + ye^x + y'e^y = 0.$$

Выражая из него y' , получим равенство (10).

Пример 2. Найти частные производные и дифференциал неявно заданной уравнением $z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$ функции $z = z(x, y)$ в точке $(1; 2; 1)$, если они существуют. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в этой точке.

Решение. Обозначим через $F(x, y, z) = z^3 + 3x^2z - 2xy$. Частные производные этой функции

$$F'_x(x, y, z) = 6xz - 2y; \quad F'_y(x, y, z) = -2x; \quad F'_z(x, y, z) = 3z^2 + 3x^2$$

непрерывны в R^3 , как многочлены. Так как точка $(1; 2; 1)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то уравнение $z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$ задает неявно в некоторой окрестности точки $(1; 2)$ непрерывно дифференцируемую функцию $z = f(x; y)$, которая, согласно формулам (5), имеет в этой окрестности частные производные

$$z'_x = \frac{2y - 6xz}{3(x^2 + z^2)}; \quad z'_y = \frac{2x}{3(x^2 + z^2)},$$

причем $z'_x(1; 2) = -\frac{1}{3}$, $z'_y(1; 2) = \frac{1}{3}$.

Функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $(1; 2)$ и ее дифференциал

$$dz(1; 2) = \frac{1}{3}(dy - dx).$$

Так как в точке $(1; 2; 1)$ выполнены все условия теоремы 2, то в этой точке существуют касательная плоскость и нормаль к поверхности $z = f(x; y)$, причем, в силу формул (6), (7), их уравнения соответственно имеют вид

$$x - y + 3z - 2 = 0 \quad \text{и} \quad x - 1 = 2 - y = \frac{z - 1}{3}.$$

Пример 3. Найти в точке $P_0(1; 1; 2)$ частные производные функций $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, заданных неявно системой

$$\begin{cases} xu + v \ln y = 2, \\ xv + u = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Решение. Координаты точки P_0 удовлетворяют данной системе. Обозначим через $F(x; y; u; v) = xu + v \ln y$, $G(x; y; u; v) = xv + u$. Найдем значение якобиана этих функций в точке P_0 .

$$I(x; y; u; v) = \frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x & \ln y \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - \ln y; \quad I(P_0) = 1 \neq 0.$$

Так как все условия теоремы 3 выполняются, то в некоторой окрестности точки $M_0(1; 1)$ система (11) определяет неявно функции $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, которые имеют в этой окрестности частные производные.

Найдем частные производные функций u и v по переменной x . Для этого продифференцируем систему (11) по x , считая $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$. В результате получим систему

$$\begin{cases} u + xu'_x + v'_x \ln y = 0, \\ v + u'_x + xv'_x = 0, \end{cases}$$

из которой находим

$$u'_x = \frac{xu - v \ln y}{\ln y - x^2}; \quad v'_x = \frac{xv - u}{\ln y - x^2}.$$

Тогда $u'_x(1; 1) = -2$, $v'_x(1; 1) = 4$. Поступая аналогично тому, как это было сделано выше, находим $u'_y(1; 1) = 2$, $v'_y(1; 1) = -2$.

Упражнения.

I. Проверить, задает ли неявно уравнение $F(x; y) = 0$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ функцию $y = f(x)$.

1) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4$, $M_0(6; 2)$; 2) $F(x, y) = x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2)$, $M_0(0; 0)$.

II. Найти производные первого и второго порядка функции $y = f(x)$, неявно заданной следующими уравнениями.

1) $xe^{2y} - y \ln x - 8 = 0$; 2) $e^x + ax^2e^{-y} - 2bx = 0$; 3) $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$; 4) $xy - \ln y = 0$;

5) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$; 6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 7) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}$; 8) $y = 1 + y^x$.

III. Проверить, задает ли неявно уравнение функцию $z = f(x; y)$, и, если да, то найти ее частные производные.

1) $x^2 + z^2 - 2x + xy^4 - 1 = 0$; 2) $e^x - xyz = 0$; 3) $z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 0$; 4) $\frac{x}{z^2} = \ln \frac{x}{y}$;

5) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1$; 6) $xyz = x + y + z$; 7) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$; 8) $z = ye^{\frac{x}{z}}$.

IV. Написать уравнения нормали и касательной плоскости в указанной точке к поверхности $z = f(x; y)$, заданной неявно уравнением:

1) $x - z = x \ln \frac{z}{y}$, $M_0(1; 1; 1)$; 2) $z^3 - xz + y = 0$, $M_0(3; -2; 2)$;

3) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0$; $M_0(1; 1; -2)$;

4) $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0$, $M_0(1; 0; -1)$; 5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$, $M_0(4; 3; 4)$;

6) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5$, $M_0(1; 2; 1)$.

V. Найти частные производные функций $u = f(x; y)$, $v = g(x; y)$, заданных неявно следующими системами.

$$1) \begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u = x + y, \\ uv = y. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} u + v = x, \\ u - yv = 0. \end{cases}$$

VI. Система уравнений

$$\begin{cases} xe^{uv} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

определяет дифференцируемые функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ такие, что $u(1; 2) = 0$ и $v(1; 2) = 0$. Найти $du(1; 2)$ и $dv(1; 2)$.

VII. Показать, что конус $z^2 = x^2 + y^2$ и сфера $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$ касаются друг друга в точке $M_0(0; 1; 1)$.

Указание. Показать, что у этих поверхностей в точке M_0 общая касательная плоскость.

VIII. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости xOz .

Тема 9. Экстремумы функций нескольких переменных

Точка $M_0(x_0; y_0) \in D(f)$ называется **точкой строгого локального максимума (строгого локального минимума)** функции $z = f(x; y)$, если существует такая окрестность $U(M_0)$, что для любых точек $(x; y) \in \dot{U}(M_0)$ выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ ($f(x; y) > f(x_0; y_0)$).

Точка $M_0(x_0; y_0) \in D(f)$ называется **точкой нестрогого локального максимума (нестрогого локального минимума)** функции $z = f(x; y)$, если существует такая окрестность $U(M_0)$, что для любых точек $(x; y) \in \dot{U}(M_0)$ выполняется неравенство $f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$ ($f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$).

Точки минимума и максимума функции называются **точками экстремума** функции, а значения функции в этих точках – ее экстремумами.

Теорема 1 (необходимое условие локального экстремума функции). Если точка $M_0(x_0; y_0)$ – точка локального экстремума функции $z = f(x; y)$, то частные производные функции $z = f(x; y)$ в этой точке, если существуют, то равны нулю.

Внутренняя точка области определения функции, в которой все частные производные функции обращаются в ноль, называется **стационарной точкой**.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна из частных производных не существует, называются **критическими**.

Критические точки функции являются «подозрительными» на экстремум, т.е. экстремум может быть только в критических точках. Следует отметить, что не во всех критических точках может быть экстремум.

$$\text{Обозначим через } \Delta(M_0) = z''_{xx}(M_0)z''_{yy}(M_0) - (z''_{xy}(M_0))^2 = \begin{vmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{xy}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}.$$

Теорема 2 (достаточное условие экстремума функции $z = f(x, y)$ в стационарной точке). Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$. Тогда точка $M_0(x_0, y_0)$:

- 1) является точкой локального минимума, если $\Delta(M_0) > 0$ и $z''_{xx}(M_0) > 0$;
- 2) является точкой локального максимума, если $\Delta(M_0) > 0$ и $z''_{xx}(M_0) < 0$;
- 3) не является точкой экстремума, если $\Delta(M_0) < 0$.

Замечание 1. Для функции $f(x_1; \dots; x_n)$ проверить стационарную точку M_0 на экстремум можно с помощью критерия Сильвестра, согласно которому точка M_0 :

- 1) является точкой строгого минимума, если все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(M_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(M_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(M_0) \end{pmatrix} \quad (1)$$

положительны;

- 2) является точкой строгого максимума, если главные миноры матрицы (1) нечетного порядка отрицательны, а четного порядка положительны.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $z = f(x, y)$ на компакте D требуется:

- 1) найти критические точки функции $z = f(x, y)$, принадлежащие внутренней области D , и вычислить значение функции в этих точках;
- 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D ;
- 3) из значений, найденных в пунктах 1) и 2), выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3.$$

Решение. Приравнявая нулю частные производные этой функции $u'_x = 6xy - 12$, $u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$, получаем систему

$$\begin{cases} 6xy - 12 = 0, \\ 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы – точки (2; 1), (-2; -1), (1; 2) и (-1; -2) – стационарные точки функции $u(x, y)$, которые, согласно теореме 1, являются «подозрительными» на экстремум.

Найдем частные производные второго порядка функции $u(x, y)$.

$$u''_{xx} = 6y, \quad u''_{xy} = 6y, \quad u''_{yy} = 6x.$$

Так как $\Delta(2;1) = \Delta(-2;-1) = 6 \cdot 6 - 144 = -108 < 0$, то, согласно теореме 2, в точках $(2; 1)$ и $(-2; -1)$ экстремума нет. Точки $(1; 2)$ и $(-1; -2)$ являются точками локального экстремума, поскольку $\Delta(1; 2) = \Delta(-1; -2) = 108 > 0$, причем точка $(1; 2)$ – точка минимума, так как $u''_{xx}(1; 2) = 12 > 0$, а точка $(-1; -2)$ – точка максимума, так как $u''_{xx}(-1; -2) = -12 < 0$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = y^4 - x^4$ на множестве $D: x^2 + y^2 \leq 9$.

Решение. Так как множество D – замкнутый круг с центром в начале координат и радиусом 3 – компакт, а функция $u(x; y)$ непрерывна на нем, то, согласно теореме Вейерштрасса, функция принимает на этом множестве свои наибольшее и наименьшее значения.

Из системы

$$\begin{cases} u'_x = -4x^3 = 0, \\ u'_y = 4y^3 = 0 \end{cases}$$

находим критическую точку $(0; 0) \in]D[$ данной функции, в которой $u(0; 0) = 0$.

На границе области D , определяемой равенством $x^2 + y^2 = 9$ или $x^2 = 9 - y^2$, где $-3 \leq y \leq 3$, значения функции $u(x; y)$ совпадают со значениями функции $u_1(y) = y^4 - (9 - y^2)^2 = 18y^2 - 81$ при $y \in [-3; 3]$. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $u_1(y)$ на $[-3; 3]$. Так как $u'_1(y) = 36y = 0$ при $y = 0$, то наибольшее и наименьшее значения функция $u_1(y)$ может принимать в точках $y_1 = 0$, $y_2 = -3$, $y_3 = 3$. Найдем значения функции $u_1(y)$ в этих точках.

$$u_1(0) = u(\pm 3; 0) = -81; \quad u_1(\pm 3) = u(0; \pm 3) = 81.$$

Тогда

$$\max_{[-3; 3]} u_1 = \max\{u_1(0); u_1(-3); u_1(3)\} = \max\{-81; 81\} = 81 = u(0; \pm 3),$$

$$\min_{[-3; 3]} u_1 = \min\{u_1(0); u_1(-3); u_1(3)\} = \max\{-81; 81\} = -81 = u(\pm 3; 0).$$

Таким образом, получаем

$$\max_D u = \max\{u(0; 0); u(0; \pm 3)\} = \max\{0; 81\} = 81 = u(0; \pm 3),$$

$$\min_D u = \min\{u(0; 0); u(\pm 3; 0)\} = \min\{0; -81\} = -81 = u(\pm 3; 0).$$

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = xy$ на множестве $D: x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

Решение. Множество D (рис. 1), является компактом. Так как функция $u(x; y)$ непрерывна на D , то по теореме Вейерштрасса она принимает на этом множестве свои наибольшее и наименьшее значения.

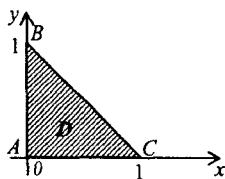


Рис. 1

Из системы

$$\begin{cases} u'_x = y = 0, \\ u'_y = x = 0 \end{cases}$$

находим критическую точку $(0; 0)$. Эта точка не принадлежит $]D[$, следовательно, функция $u(x; y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения на границе области D , представляющей собой треугольник ABC .

Исследуем функцию $u = xy$ на каждой из сторон треугольника ABC .

1) На отрезках $AB : x = 0, 0 \leq y \leq 1$ и $AC : y = 0, 0 \leq x \leq 1$ функция $u(x, y) = u(0, y) = u(x, 0) = 0$.

2) На отрезке $BC : y = 1 - x, 0 \leq x \leq 1$, значения функции $u(x, y)$ совпадают со значениями функции одной переменной $u_1(x) = u(x, 1 - x) = x(1 - x) = x - x^2$, где $x \in [0; 1]$. Функция $u_1(x)$ на $(0; 1)$ имеет одну критическую точку $x = \frac{1}{2}$, в которой $u'_1(x) = 1 - 2x = 0$. Таким образом, наибольшее и наименьшее значения на $[0; 1]$ функции $u_1(x)$ возможны в точках $x = 0, x = 1, x = \frac{1}{2}$. Найдем значения функции $u_1(x)$ в этих точках.

$$u_1(0) = 0 = u(0; 1); \quad u_1(1) = 0 = u(1; 0); \quad u_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = u\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Наибольшее и наименьшее значения функции $u = xy$ найдем из значений, полученных в пунктах 1) и 2) при исследовании функции на границе, т.е.

$$\max_D u(x, y) = \max \left\{ u(0; y); u(x; 0); u\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \right\} = \max \left\{ 0; \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{4},$$

$$\min_D u(x, y) = \min \left\{ u(0; y); u(x; 0); u\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \right\} = \min \left\{ 0; \frac{1}{4} \right\} = 0.$$

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = 3 + 2xy$ на множестве $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

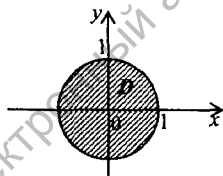


Рис. 2

Решение. Множество D (рис. 2), является компактом. Так как функция $u(x; y)$ непрерывна на D , то по теореме Вейерштрасса она принимает на этом множестве свои наибольшее и наименьшее значения.

Из системы

$$\begin{cases} u'_x = 2y = 0, \\ u'_y = 2x = 0 \end{cases}$$

находим критическую точку $(0; 0) \in]D[$, в которой $u(0; 0) = 3$.

Исследуем функцию $u(x; y)$ на границе области D . Запишем уравнение границы в параметрическом виде $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Подставив уравнения границы в функцию $u(x; y)$, получаем функцию одной переменной

$u_1(t) = u(\cos t; \sin t) = 3 + 2 \cos t \sin t = 3 + \sin 2t$, значения которой при $0 \leq t \leq 2\pi$ совпадают со значениями функции $u(x, y)$ на границе множества D .

Из равенства $u'_1(t) = 2 \cos 2t = 0$ находим критические точки $t_1 = \frac{\pi}{4}$ и $t_2 = \frac{5\pi}{4}$, принадлежащие $(0; 2\pi)$, при этом $t_1 = \frac{\pi}{4}$ соответствует точка $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а $t_2 = \frac{5\pi}{4}$ — точка $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Найдем значения функции $u_1(t)$ в этих точках и в концевых точках отрезка $[0; 2\pi]$.

$$u_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4; \quad u_1\left(\frac{5\pi}{4}\right) = u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4; \quad u_1(0) = u_1(2\pi) = u(1; 0) = 2.$$

Выбираем наибольшее и наименьшее значения функции из значений в критических точках, принадлежащих внутренности D , и критических точек, лежащих на границе области D .

$$\begin{aligned} \max_D u(x, y) &= \max \left\{ u(0; 0); u(1; 0); u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} = \\ &= \max \{3; 2; 4\} = 4 = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \min_D u(x, y) &= \min \left\{ u(0; 0); u(1; 0); u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} = \min \{3; 2; 4\} = 2 = u(1; 0). \end{aligned}$$

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = (y^2 - x^2)e^{1-x^2+y^2}$ на множестве $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

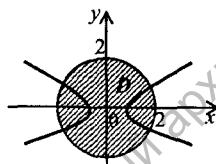


Рис. 3

Решение. Множество D (рис. 3), является компактом. Так как функция $u(x, y)$ непрерывна на D , то по теореме Вейерштрасса она принимает на этом множестве свои наибольшее и наименьшее значения.

Из системы

$$\begin{cases} u'_x = -2x(1 - x^2 + y^2)e^{1-x^2+y^2} = 0, \\ u'_y = 2y(1 - x^2 + y^2)e^{1-x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

находим критические точки $(0; 0)$ и точки (x, y) гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, лежащие внутри области D , т.е. точки $(x, y) \in D_1: x^2 = 1 + y^2$, где $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Здесь промежуток изменения переменной y легко находится из системы

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$$

решением которой являются точки пересечения гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и границы области D .

Все найденные критические точки принадлежат внутренности области D . Значения функции $u(x, y)$ в этих точках

$$u(0; 0) = 0; \quad u(x, y) = -1, \text{ если } (x, y) \in D_1.$$

Исследуем функцию $u(x, y)$ на границе области D , которая определяется равенством $x^2 + y^2 = 4$ или $y^2 = 4 - x^2$ при $-2 \leq x \leq 2$. На границе значения функции $u(x, y)$ совпадают со значениями функции одной переменной

$$\begin{aligned} u_1(x) &= (4 - 2x^2)e^{5-2x^2} \text{ при } -2 \leq x \leq 2. \\ u'_1(x) &= -4xe^{5-2x^2} + (4 - 2x^2)e^{5-2x^2}(-4x) = -4x(5 - 2x^2)e^{5-2x^2}. \\ u'_1(x) &= 0 \text{ при } x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad x_3 = -\sqrt{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Значению $x_1 = 0$ соответствуют точки $(0; \pm 2)$ границы D , значению $x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$ - точка $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, значению $x_3 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ - точка $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$. В этих точках и точках $(\pm 2; 0)$, соответствующих концевым точкам отрезка $[-2; 2]$, функция $u(x, y)$ принимает значения

$$u(0; \pm 2) = u_1(0) = 4e^5; \quad u\left(\pm \sqrt{\frac{5}{2}}; \pm \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = u_1\left(\pm \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -1; \quad u(\pm 2; 0) = u_1(\pm 2) = -4e^{-4}.$$

Выбираем наибольшее и наименьшее значения функции из значений в критических точках, принадлежащих внутренности D , и критических точек, лежащих на границе области D .

$$\begin{aligned} \max_D u(x, y) &= \max \left\{ u(0; 0); u(x, y), (x, y) \in D_1; u(\pm 2; 0); u(0; \pm 2); u\left(\pm \sqrt{\frac{5}{2}}; \pm \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \right\} = \\ &= \max \{0; -1; -4e^{-4}; 4e^5\} = 4e^5 = u(0; \pm 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_D u(x, y) &= \min \left\{ u(0; 0); u(x, y), (x, y) \in D_1; u(\pm 2; 0); u(0; \pm 2); u\left(\pm \sqrt{\frac{5}{2}}; \pm \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \right\} = \\ &= \min \{0; -1; -4e^{-4}; 4e^5\} = -1 = u\left(\pm \sqrt{\frac{5}{2}}; \pm \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = u(x, y), (x, y) \in D_1. \end{aligned}$$

Пример 6. Разложить положительное число a на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Пусть $a = x + y + z$, где x, y, z - положительные числа. Обозначим через $P = x \cdot y \cdot z$. Так как $z = a - x - y$, то $P = xy(a - x - y)$, причем по смыслу задачи $x > 0$, $y > 0$, $z = a - x - y > 0$. Так как на границе множества D функция $P = x \cdot y \cdot z = 0$, то

$$\max_D P(x, y) = \max_{D_1} P(x, y),$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0 \wedge a - x - y > 0\}$ и $D_1 = [D]$. Поэтому можно считать, что $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a - x - y \geq 0$. Это необходимо для того, чтобы множество зада-

ния, на котором рассматриваются функции $P(x, y)$, представляло собой компакт, т.е. чтобы была применима теорема Вейерштрасса.

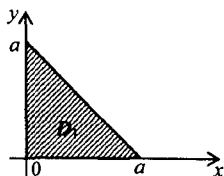


Рис. 4

Математическая модель данной задачи: найти наибольшее значение функции $P(x, y) = xy(a - x - y)$ при $(x, y) \in D_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge a - x - y \geq 0\}$. Область D_1 – это компакт (рис. 4).

Определим критические точки функции P из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = y(a - 2x - y) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = x(a - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы будут четыре точки $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; a)$, $(\frac{a}{3}; \frac{a}{3})$. Из них только точка $(\frac{a}{3}; \frac{a}{3})$ принадлежит области D .

Проверим ее на экстремум. Для этого найдем значения вторых частных производных функции P в этой точке.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3} \right) = -\frac{2a}{3}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3} \right) = -\frac{2a}{3}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3} \right) = -\frac{a}{3}.$$

Тогда

$$\Delta \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3} \right) = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} > 0$$

и, согласно теореме 2, точка $(\frac{a}{3}; \frac{a}{3})$ является точкой локального максимума функции P .

При $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$ имеем $z = a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3}$. Таким образом, при разложении положительного числа a на три положительных слагаемых, каждое из которых равно $\frac{a}{3}$, их произведение будет наибольшим.

Замечание 2. В примере 6 точку $(\frac{a}{3}; \frac{a}{3})$ можно не проверять на наличие экстремума. Действительно, по теореме Вейерштрасса функция $P(x, y)$ принимает на компакте D_1 наибольшее и наименьшее значения. Поскольку наименьшее значение функция $P(x, y)$ принимает на границе компакта D_1 , наибольшее свое значение она принимает внутри компакта D_1 . Так как критическая точка $(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}) \in D_1$ единственна, то она и будет точкой локального максимума функции $P(x, y)$.

Пример 7. Найти наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, если сумма длин его ребер равна a .

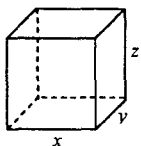


Рис. 5

Решение. Обозначим через x, y, z длины ребер данного параллелепипеда (см. рис. 5). Объем прямоугольного параллелепипеда $V = x \cdot y \cdot z$. Так как по условию $a = 4(x + y + z)$, то $x = \frac{a}{4} - y - z$. Тогда $V = \left(\frac{a}{4} - y - z\right)yz$. Из тех же соображений, что и в примере 6, будем считать, что $(y; z) \in D = \left\{ (y; z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge \frac{a}{4} - y - z \geq 0 \right\}$.

Математическая модель данной задачи заключается в следующем. Найти наибольшее значение функции

$V(y; z) = \left(\frac{a}{4} - y - z\right)yz$ при $(y; z) \in D$. Область D — это компакт (рис. 6).

Для нахождения критических точек функции V решим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial y} = z \left(\frac{a}{4} - 2y - z \right) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z} = y \left(\frac{a}{4} - 2z - y \right) = 0. \end{cases}$$

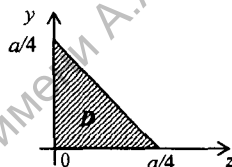


Рис. 6

Решением этой системы являются точки $(0; 0)$, $\left(\frac{a}{4}; 0\right)$, $\left(0; \frac{a}{4}\right)$, $\left(\frac{a}{12}; \frac{a}{12}\right)$. Из них только точка $\left(\frac{a}{12}; \frac{a}{12}\right)$ принадлежит внутренности области D . Так как функция $V(x, y)$ принимает наименьшее значение 0 на границе области D , то, согласно замечанию 2, точка $\left(\frac{a}{12}; \frac{a}{12}\right)$ является точкой локального максимума функции V .

При $y = \frac{a}{12}$, $z = \frac{a}{12}$ имеем $x = \frac{a}{4} - \frac{a}{12} - \frac{a}{12} = \frac{a}{12}$. Таким образом, при $x = y = z = \frac{a}{12}$ объем прямоугольного параллелепипеда при заданной сумме длин его ребер a будет наибольшим и равным $\left(\frac{a}{12}\right)^3$.

Замечание 3. Если из условия задачи ясно, что искомое (наибольшее или наименьшее) значение функции не может принимать на границе области D (примеры 6, 7), то исследование на границе можно опустить.

Упражнения.

I. Исследовать функцию u на экстремум.

- 1) $u = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$; 2) $u = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$; 3) $u = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 1$; 4) $u = (x + y^2)e^{x/2}$; 5) $u = xy^2(12 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$; 6) $u = x^3 + xy^2 - 39x - 36y + 26$;

$$7) u = 3x^2 - 2x\sqrt{y} - 8x;$$

$$8) u = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y;$$

$$9) u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x.$$

II. Найти наибольшее и наименьшее значения функции u на заданном множестве.

$$1) u = xy + x + y, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad -2 \leq y \leq 4; \quad 2) u = x^2 - 2y + 3, \quad y - x \leq 1, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0;$$

$$3) u = xy(6 - x - y), \quad x + y \leq 12, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0; \quad 4) u = x^2y, \quad x^2 + y^2 \leq 1; \quad 5) u = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2x; \quad 6) u = x^3 + y^3 - 3xy, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 2; \quad 7) u = (x+y)e^{xy}, \quad -2 \leq x + y \leq 1;$$

$$8) u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$$

III. Найти расстояние между кривой и прямой:

$$1) y = x^2, \quad x - y - 5 = 0; \quad 2) x^2 - y^2 = 3, \quad y - 2x = 0; \quad 3) 9x^2 + 4y^2 = 36, \quad 3x + y - 9 = 0.$$

IV. Найти наименьшую поверхность, которую может иметь прямоугольный параллелепипед, если его объем равен V .

V. Представить положительное число a в виде произведения трех положительных сомножителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

VI. Найти наименьшее значение для суммы $u = x + y + z$ положительных чисел при условии, что их произведение сохраняет постоянную величину $xyz = c^3$.

VII. Разложить положительное число a на три положительных слагаемых так, чтобы: 1) сумма их кубов была наименьшей; 2) сумма их обратных величин была наименьшая. Найти значения суммы.

VIII. Найти точку, для которой сумма квадратов расстояний от прямых $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ наименьшая.

IX. Найти наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, если его поверхность равна S .

X. Пусть физические величины x и y связаны неизвестной линейной зависимостью $y = ax + b$. В результате n измерений получены с некоторой погрешностью следующие пары значений: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$. Согласно методу наименьших квадратов, наиболее вероятными значениями коэффициентов a и b считаются те, при которых

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

достигает наименьшего значения. Найти наиболее вероятные значения $\bar{a}$, $\bar{b}$ коэффициентов a и b .

Список рекомендуемой литературы

1. Бермант, А.Ф. Курс математического анализа / А.Ф. Бермант. Ч. 2. – М.: Физматгиз, 1959. – 358 с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1971. – 416 с.
3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Астрель, 2002. – 558 с.
4. Ильин, В.А. Основы математического анализа: в 2 ч. Ч. 2: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 464 с.
5. Ильин, В.А. Математический анализ. Начальный курс / В.А. Ильин, В.А. Садовнический, Бл.Х. Сендов; под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 662 с.
6. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учеб. пособие для вузов / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин; под ред. Л.Д. Кудрявцева. – С.Пб.: Техн. книга, 1994. – 496 с.
7. Смирнов, В.И. Курс высшей математики: в 4 т. / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1965. – Т. 2. – 655 с.
8. Райков, Д.А. Многомерный анализ: учеб. пособие для мат. спец. вузов / Д.А. Райков. – М.: Высш. шк., 1989. – 271 с.
9. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1964. – Т. 2. – 463 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Функции нескольких переменных. Основные понятия.....	3
Тема 2. Предел ФНП.....	5
Тема 3. Непрерывность. Равномерная непрерывность. Свойства непрерывных функций	9
Тема 4. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал функций нескольких переменных	13
Тема 5. Дифференцирование композиции функций нескольких переменных. Инвариантность формы записи дифференциала первого порядка.....	17
Тема 6. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора и ряд Тейлора	21
Тема 7. Производная по направлению. Градиент	27
Тема 8. Функции одной и нескольких переменных, заданные неявно. Неявно заданные функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$	30
Тема 9. Экстремумы функций нескольких переменных	35
Список рекомендуемой литературы.....	44

Учебное издание

Марченко Ирина Васильевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания
к практическим занятиям

Технический редактор *А.Л. Позняков*
Компьютерная верстка *А.Л. Позняков*

Подписано в печать *15.04.2011* г.
Формат 60х84/16. Гарнитура Times New Roman Сут.
Усл.-печ. л. 2,8. Уч.-изд. л. 2,6. Тираж *52* экз. Заказ № *167*.

Учреждение образования «Могилевский государственный университет
им. А.А. Кулешова», 212022, Могилев, Космонавтов, 1.
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004 г.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
УО «МГУ им. А.А. Кулешова». 212022, Могилев, Космонавтов, 1.