

И.П. Лобанок

МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ
ПРОПЕДЕВТИКИ КАК СРЕДСТВА
ИНТЕГРАЦИИ ШКОЛЬНОГО
КУРСА МАТЕМАТИКИ

Могилев 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА»**

И.П. Лобанок

**МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ
ПРОЦЕДУР КАК СРЕДСТВА ИНТЕГРАЦИИ
ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ**

Методические рекомендации



Могилев 2010

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
УО «МГУ им. А.А. Кулешова»*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук доцент *Н.В. Сакович*;
учитель математики высшей категории лицея БРУ *М.А. Антипенко*

Лобанок, И.П.

Л68 Методика применения пропедевтики как средства интеграции школьного курса математики: метод. реком. / И.П. Лобанок. – Могилев: УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2010. – 36 с.

Одним из эффективных средств реализации интегрированного подхода в обучении математике является пропедевтика. Методические рекомендации содержат материал на пропедевтической основе, способствующий усилению межпредметных и внутрипредметных интеграционных связей курса математики при преподавании ряда ключевых тем: теорема Пифагора, квадратный корень, квадратное уравнение, линейная функция и ее график, уравнение с двумя переменными, системы уравнений с двумя переменными.

Методические рекомендации окажут помощь студентам при изучении таких предметов, как методика преподавания математики и основы школьной математики. Имещащиеся в конце каждого параграфа задания способствуют более глубокому освоению указанных дисциплин. Методические и теоретические разработки могут быть использованы студентами при написании рефератов, курсовых, дипломных работ, во время педагогической практики в школе, а также будут полезны учителям средних школ.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ВВЕДЕНИЕ

Одним из средств реализации интегрированного подхода в обучении математике является пронедеветическое изучение некоторых ключевых тем алгебры и геометрии. Изучив имеющуюся психологическую, педагогическую, философскую, методическую литературу по данной теме, мы изложили некоторые вопросы школьного курса математики с точки зрения пронедеветики.

Методические рекомендации содержат четыре параграфа. В первом параграфе выделяются виды, функции и формы пронедеветики, а также рассматриваются примеры, демонстрирующие тот или иной вид пронедеветики. Во втором - демонстрируется дидактическая модель использования пронедеветики как средства интеграции школьного курса математики. В третьем и четвертом параграфах рассматривается методика применения пронедеветики как средства внутриматериальной интеграции в алгебре и геометрии, а также как средства межматериальной интеграции алгебраического и геометрического материала.

В конце каждого пункта содержится ряд заданий, которые студенты могут выполнять как на практических и лабораторных занятиях по методике преподавания математики и лекционных занятиях по основам школьной математики, так и при самостоятельной подготовке к занятиям. Эти задания помогут лучше осознать теоретический материал, изучить учебные пособия, которые используются в школе на уроках математики, а также будут способствовать в приобретении педагогического опыта, который понадобится при работе в школе.

Данные методические рекомендации можно использовать как на занятиях по методике преподавания математики и основам школьной математики, так и при написании курсовых и дипломных работ, а также во время прохождения педагогической практики в школе.

§1. Виды, формы и функции пропедевтики в обучении математике

Изучение теоретической литературы психолого-дидактического характера, а также учебников математики для старшей школы показало, что пропедевтику не рассматривали как одно из средств интеграции, а посему не уделялось должное внимания пропедевтике математических знаний в обучении математике. Мы же рассматриваем *пропедевтику в обучении математике как формирование предварительных знаний по той или иной математической теме, излагаемое в элементарной, систематизированной и сжатой форме, предшествующее более основательному изучению данной темы и ведущее как к внутрипредметной, так и межпредметной интеграции школьного курса математики.*

Исследование проблем пропедевтики предполагает выделение ее видов, форм, частот и определение дидактически обоснованного их применения.

При обучении математике нами выделены следующие виды пропедевтики по частоте включения пропедевтического материала в содержание урока или блока уроков: точечная пропедевтика, эпизодическая пропедевтика и длительная пропедевтика.

Точечная пропедевтика – это изучение небольшого фрагмента математического материала или отдельного понятия на пропедевтическом уровне до основного изучения этого материала (на одном уроке, или части одного урока).

При изучении теоремы Пифагора учащимся можно предложить несколько задач, в ходе решения которых учителю следует сообщить учащимся тот факт, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Этот факт излагается учащимся на пропедевтическом уровне без доказательства.

Задача 1. Вокруг прямоугольного треугольника с катетами 8 см и 6 см описана окружность. Найдите ее радиус.

Задача 2. Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 10 см, а один из катетов равен 8 см. Найдите другой катет.

Задача 3. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6 м, другой – 8 м. Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.

Для решения третьей задачи следует предложить учащимся доказать, что медиана прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы с использованием изученного при решении предыдущих задач факта. Если у учащихся возникают затруднения, учитель делает рисунок прямоугольного треугольника, вписанного в окружность, на доске и обращает внимание учащихся на радиусы, проведенные в вершины треугольника.

Эпизодическая пропедевтика – это изучение математического материала или понятий на протяжении ряда уроков до основного изучения этого материала.

Прежде чем учащиеся начнут систематически изучать квадратные уравнения, они неоднократно встретятся с несколькими видами квадратных уравнений при изучении других тем.

Во-первых, учащиеся знакомятся с таким видом квадратных уравнений, которые в процессе решения сводятся к линейным. Так при изучении линейных уравнений можно предложить учащимся уравнение $3x^2 - 3x(x - 5) = 6(2x + 4)$, которое после преобразований примет вид $3x = 24$.

Во-вторых, при изучении квадратного корня учащиеся знакомятся с еще одним видом квадратного уравнения, а именно $ax^2 = b$, которое решается по определению квадратного корня.

В-третьих, с двумя выше указанными видами квадратных уравнений учащиеся встречаются и при изучении теоремы Пифагора [§4, с. 30 – 32].

Длительная пропедевтика – это пропедевтическое изучение материала задолго до его изучения по плану параллельно с основным материалом. При этом тема развивается постепенно, медленно со всеми логическими переходами. Такой вид пропедевтики еще называют перспективно-опережающим обучением.

Примером длительной пропедевтики может служить перспективно-опережающее обучение, подготавливающее к изучению теоремы Пифагора [§3, с. 20 – 25].

При рассмотрении вопроса пропедевтики можно выделить различную степень удаленности во времени пропедевтического изучения материала от его систематического изучения. Пропедевтика бывает ближней, средней и дальней.

Ближняя пропедевтика осуществляется в рамках одной учебной темы и ведет к сближению межпонятийных и внутритемных связей.

Средняя пропедевтика – это пропедевтика математического материала, в рамках одного курса (либо курса алгебры, либо курса геометрии). При средней пропедевтики наблюдается сближение как межпонятийных связей [4, с. 31], так и межтемных связей [4, с. 31] в рамках одного курса.

Таким образом, и ближняя и средняя пропедевтика ведут к внутрипредметной интеграции [7].

Дальняя пропедевтика осуществляется между целостными, содержательными связанными между собой курсами (алгебры и геометрии) в рамках одного предмета. При этом дальняя пропедевтика ведет к межпредметной интеграции.

При осуществлении пропедевтического обучения необходимо учитывать количество включений материала, изучаемого на пропедевтическом уровне.

Оптимальная частота пропедевтического включения материала – такое число включений пропедевтического материала по данному вопросу, при которой достигается максимальный результат.

Пропедевтическое изучение математического материала в процессе обучения предполагает использование различных форм пропедевтики, к которым можно отнести:

- изложение материала с элементами пропедевтики;
- самостоятельная пропедевтическая работа над теоретическим материалом;
- решение задач, которые опираются на материал будущего изучения;
- решение задач, являющихся элементами доказательств теорем, которые предстоит рассматривать позднее;
- опытное наблюдение фактов, которые позже будут изучаться на теоретическом уровне.

Причем эти формы работы могут применяться не только на уроках, но и на внеклассных занятиях или при выполнении домашних заданий.

Закономерность опережающего включения материала в учебный процесс такова, что по мере увеличения длины опережения возрастает количество возможных включений материала опережающим способом. Надо иметь в виду и обратную закономерность опережения - по мере удаления материала во времени он все более удаляется в содержательном плане, ослабляются его логические связи с изучаемым материалом.

Считаем целесообразным выделить два этапа пропедевтики в обучении математике по степени осознания учащимися пропедевтического характера выполняемых заданий: неявную и явную.

Неявная пропедевтика заключается в том, что при изучении основного математического материала используются задания пропедевтического характера, на которые не акцентируется внимания и чаще всего эти задания выполняются по аналогии.

Так при изучении темы "Уравнения" целесообразно предложить учащимся квадратные уравнения, которые с помощью преобразований сведутся к линейным уравнениям. Однако учителю не обязательно обращать внимание учащихся на то, что у нас дан новый вид уравнений, а именно квадратное уравнение. Вероятнее всего, у учащихся не возникнет вопроса о том, как же решать эти уравнения. Они просто по аналогии будут раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые и затем решать полученные линейные уравнения.

Явная пропедевтика заключается в том, что при изучении математического материала уделяется особое внимание пропедевтической информации, а также разъясняется необходимость ее изучения.

При решении задач 1, 2 и 3 [§1, с. 4] явно вводится тот факт, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы. Также следует учителю сообщить, что позже учащиеся будут этот факт доказывать и применять для решения более сложных задач.

Выделим основные функции пропедевтики в обучении математике. Пропедевтическое обучение выполняет *обучающую функцию*. Оно направлено на сближение материала смежных дисциплин или различных тем одной дисциплины, благодаря установившимся внутрипредметным или межпредметным интеграционным связям, способствует более качественному усвоению материала. Оно направлено на лучшее усвоение изучаемого в данный момент материала, поскольку материал вводится в сопоставительных целях и, таким образом, оттеняет свойство изучаемого объекта, служит различению этих свойств, что ведет к интеграции математического материала. Оперсжение способствует также лучшему осмыслению изучаемого материала, то есть осуществляется подготовка учащихся к восприятию будущего материала.

Пропедевтика выполняет *развивающую функцию*. Сравнение, сопоставление, опережающее изучение общих и отличительных черт - все это не только способствует лучшему усвоению знаний, но и, приводя мыслительную деятельность учащихся в состояние внутреннего напряжения, развивает их различные познавательные способности.

Пропедевтика обладает *мотивационной функцией*, поскольку новый материал, направленный на перспективу, при сближении со старым побуждает к деятельности. Познавательный интерес возникает при этом из нестандартности, необычности действий учащихся.

При осуществлении пропедевтики того или иного математического материала большая роль должна придаваться наглядности. Так изучению теоремы Пифагора предшествует пропедевтическая работа [§3, с 20 – 25], которая сопряжена с системой геометрических задач на нахождение площадей комбинаций геометрических фигур. Без чертежа, который является простейшим средством наглядности, при решении этих задач не обойтись.

Задание 1. Проанализировав учебники математики для начальной школы, составить контрольную работу для V класса, которую следует провести в начале учебного года, чтобы определить уровень знаний учащихся после начальной школы.

Задание 2. Разработать фрагменты уроков по алгебре с использованием различных видов и форм пропедевтики.

Задание 3. Разработать фрагменты уроков по геометрии с использованием различных видов и форм пропедевтики.

§2. Дидактическая модель использования пропедевтики как средства интеграции

Рассмотрение пропедевтики как одного из средств интеграции школьного курса математики позволяет сближать в сознании учащихся материал различных разделов математики, тем самым, повышая эффективность обучения. На основе теоретического изучения данной проблемы, анализа опыта работы учителей по использованию пропедевтики и интегративного подхода в процессе обучения математике, мы предлагаем следующую дидактическую модель использования пропедевтики как средства интеграции школьного курса математики (Схема 1).

Схема 1



Следует отметить, что анализ учебного математического материала целесообразно проводить заблаговременно не только по теме, разделу, но и по всему учебному курсу. Проведенный анализ позволяет определить темы, математический материал которых может вызвать наибольшие затруднения у учащихся данного класса. Причем в различных классах темы, требующие дополнительной подготовки, могут не совпадать.

Для выделенных тем следует определить, какие именно элементы учебного материала могут вызвать у учащихся трудности, а также - какой пропедевтический материал способствует их оптимальному преодолению. Для конкретного пропедевтического материала выбирается наиболее целесо-

образный вид пропедевтики, а также материал, при изучении которого эта пропедевтика будет осуществляться.

Пропедевтика может осуществляться как неявно, так и явно. Причем пропедевтическая работа может осуществляться по некоторому вопросу неоднократно. При первичном знакомстве это может быть один вид пропедевтики, например, точечная неявная, при следующем изучении - вид пропедевтики может измениться, а может остаться прежним.

Приведенная дидактическая модель конкретизируется в данной главе на примере изучения отдельных тем курса математики. Среди различных тем курса математики 7-9 классов нами были выявлены наиболее перспективные с точки зрения потребности использования в них пропедевтики как средства интеграции школьного курса математики:

- «Линейная функция и прямая пропорциональность»;
- «Системы линейных уравнений с двумя переменными»;
- «Квадратный корень»;
- «Квадратные уравнения»;
- «Теорема Пифагора».

Задание 4. Проанализировав учебник математики VII класса, составить контрольную работу для VIII класса, которую следует провести в начале учебного года.

Задание 5. Разработать внеклассное мероприятие в игровой форме по теме «Квадратный корень» с элементами пропедевтики.

§3. Методика применения пропедевтики как средства внутрипредметной интеграции школьного курса математики

3.1 Методика применения пропедевтики как средства внутрипредметной интеграции при изучении алгебры

В современных школьных учебниках можно встретить различные подходы к изучению тем «Линейная функция» и «Системы линейных уравнений с двумя переменными». Одни авторы [1] предлагают изучать линейную функцию и прямую пропорциональность вначале 8-го класса, а в конце того же восьмого класса - линейное уравнение с двумя переменными и системы линейных уравнений с двумя переменными. При этом в рамках изучения линейной функции пропедевтическая работа, подготавливающая

к изучению линейных уравнений с двумя переменными, не осуществляется. Другие авторы [2] сближают темы «Линейная функция» и «Линейное уравнение с двумя переменными», поскольку раннее изучение линейных уравнений с двумя переменными делает разрешимым больший круг стохастических задач. И вся пропедевтическая работа нацелена на стохастику. Однако пропедевтика систем линейных уравнений с двумя переменными при такой организации учебного процесса не ведется, а значит, не осуществляется внутрипредметная интеграция указанного алгебраического материала.

Рассмотрим применение пропедевтики как средства интеграции курса алгебры на примере тем «Линейная функция» и «Системы линейных уравнений с двумя переменными». Анализ учебного материала позволил определить основной и пропедевтический материал при изучении данной темы, которые приведены в таблице 1.

Таблица 1

Основной материал	Педагогический материал
1) Линейная функция и ее график. Прямая пропорциональность	1) Линейное уравнение с двумя переменными и его график
2) Взаимное расположение графиков линейных функций	2) Системы линейных уравнений с двумя переменными.

Рассмотрим методику применения данной схемы [§2, с. 8] более подробно.

С точки зрения пропедевтики нам кажется наиболее оптимальный следующий подход к изучению данной темы. Сначала при помощи конкретных примеров происходит актуализация жизненного опыта школьников. Учащиеся обнаруживают в практических ситуациях наличие зависимостей определенного рода, которые могут быть выражены формулами. Далее происходит обобщение этих формул и дается определение линейной функции. Добавим, что упражнения к данной теме также начинаются с заданий, иллюстрирующих наличие линейных зависимостей в окружающем мире.

Такой подход нам видится более предпочтительным, т. к. он, кроме опоры на витальный опыт учащихся, неявно стимулирует учителей на пропедевтическое знакомство учащихся с линейными зависимостями при изучении предшествующих разделов курса математики. Поэтому именно на такой подход к изучению линейных функций мы будем опираться при пропедевтическом изучении систем линейных уравнений в рамках данной темы.

Итак, изучение линейной функции предлагаем начать с актуализации витального опыта учащихся. Как ранее отмечалось актуализацию ранее полученных знаний можно осуществить на трех уровнях [4, с. 6], в нашем случае актуализация проводится на первом уровне. Данный уровень характеризуется тем, что в процессе обучения преобладает деятельность

учителя, который сам напоминает учащимся те знания, которые должны быть актуализированы при выполнении заданий или изучении новых понятий. Для этого можно использовать следующие примеры.

Основной материал

Пример 1. Мальчик купил шоколадку за 1 тыс. руб. и конфет по 150 руб. за штуку. Стоимость покупки будет зависеть от количества конфет. Обозначим количество конфет буквой x , а стоимость покупки – y . Тогда зависимость стоимости покупки от количества конфет можно выразить формулой: $y = 150x + 1000$, где x – натуральное число.

Пример 2. Токарь выточил 30 деталей. Каждый следующий час он вытачивал по 15 деталей. Тогда за t ч токарь выточит $15t$ деталь. Если обозначить буквой y общее количество деталей, то зависимость этого количества от времени можно выразить формулой: $y = 15t + 30$, где $t \geq 0$.

Под руководством учителя учащиеся делают вывод о том, что в рассмотренных примерах они встретились с функциями одного вида, которые можно задать с помощью формул следующим образом $y = kx + b$, где x – независимая переменная, k и b – некоторые числа. Такие функции называются линейными.

Далее рекомендуем учителю сообщить учащимся определение линейной функции.

Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x – независимая переменная, k и b – некоторые числа.

Следующие задачи, которые учитель ставит перед учащимися – научить графически изображать изучаемую функцию, а также исследовать взаимное расположение графиков нескольких линейных функций.

Задача 1. Построить график линейной функции $y = 2x + 1$.

Решение. Будем предполагать, что область определения функции состоит из всех чисел. Составим таблицу значений x и y :

x	-2	-1,5	-1	0	1	1,5
y	-3	-2	-1	1	3	4

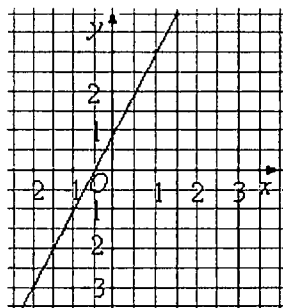


Рис. 1

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице. Все отмеченные точки лежат на одной прямой. Эта прямая является графиком линейной функции $y = 2x + 1$ (рис. 1).

Подводя итоги проведенной работы, учитель предлагает учащимся сделать вывод о том, как построить график линейной функции. Если у учащихся возникают трудности, то учитель им помогает. Также следует обратить внимание учащихся на то, что графиком линейной функции является прямая, для построения которой достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки в координатной плоскости и провести через них прямую. Зачастую в качестве одной из точек удобно взять точку с абсциссой 0.

Задача 2. Построить график функции $y = -1,5x + 1,5$.

Решение. Найдем координаты двух точек графика.

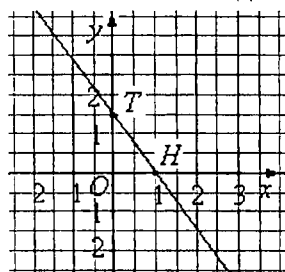


Рис. 2

Отметим точки $T(0; 1,5)$ и $H(1; 0)$ в системе координат и проведем через них прямую (рис. 2). Прямая TH – график функции $y = -1,5x + 1,5$.

x	y
0	1,5
1	0

При выполнении следующих заданий задачи 3 и примера 3 учитель демонстрирует частные случаи линейной функции. При $k=0$ линейная функция

$y = kx + b$ примет вид $y = 0x + b$, т.е. $y = b$. Линейная функция, заданная формулой

$y = b$, принимает одно и тоже значение при любом x .

Задача 3. Построить график функции $y = 1,5$.

Решение. Отметим две точки принадлежащие графику данной функции: Ордината точек одинакова и равна 1,5. Отметим точки $E(2; 1,5)$ и $C(0; 1,5)$

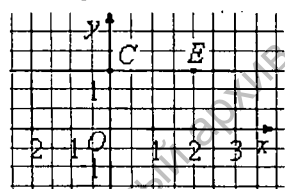


Рис. 3

x	y
0	1,5
2	1,5

в системе координат и проведем через эти точки прямую. Прямая CE – график функции $y = 1,5$ (рис. 3).

Поскольку область определения линейной функции – все числа, то на рисунке мы показываем только часть прямой.

Первичное знакомство (на пропедевтическом уровне) с еще одним частным случаем линейной функции - прямой пропорциональностью, можно начать с рассмотрения хорошо знакомой учащимся ситуации.

Пропедевтический материал

Пример 3. Поезд выехал из города A со скоростью 50 км/ч. Если время обозначить через t ч, а длину пути, проделанного поездом, через s , тогда зависимость длины пути от времени будет выражаться формулой $s = 15t$.

Зависимость расстояния от времени является примером функции, которая задается формулой вида $y = kx$, где x – независимая переменная, k – число, отличное от нуля. Такую функцию называют прямой пропорциональностью.

На основании совместных с учащимися исследований учитель формулирует определение прямой пропорциональности как частного случая линейной функции, а также делает вывод о том, какая линия является графиком прямой пропорциональности.

Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x – независимая переменная, k – не равное нулю число.

Далее рекомендуем актуализировать полученные ранее знания через проблемную ситуацию [4, с. 6], т.е. осуществить третий уровень актуализации знаний. Для этого следует предложить учащимся сделать вывод о том, как построить график прямой пропорциональности. В случае возникновения затруднений учитель оказывает посильную помощь. Поскольку формула, задающая прямую пропорциональность $y = kx$, получена из формулы, задающей линейную функцию $y = kx + b$ при $b = 0$, то прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции. Значит графиком прямой пропорциональности тоже является прямая. Эта прямая проходит через начало координат, поскольку при $x = 0$ значение y также равно 0.

Т.е. чтобы построить график прямой пропорциональности нужно отметить какую-либо точку графика отличную от нуля и провести прямую через эту точку и начало координат. Далее можно предложить задания, подтверждающие правильность сделанного вывода, причем следует рассмотреть различные случаи размещения прямых.

Задача 4. Построить график функции $y = 1,5x$.

Решение. Поскольку данная функция является прямой пропорциональностью, то достаточно найти координаты одной точки:

Отмечаем точку $P(2; 3)$ на координатной плоскости и проводим прямую через эту точку и начало координат. PO – график функции $y = 1,5x$ (рис. 4).

x	y
2	3

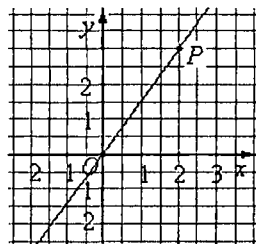


Рис. 4

Задача 5. Построить график функции $y = -2x$.

Решение. Данная функция является прямой пропорциональностью. Найдем координаты точки, принадлежащей графику этой функции:

x	-1
y	2

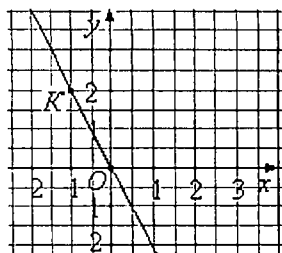


Рис. 5

Отметим точку $K(-1; 2)$ на координатной прямой и проведем прямую через эту точку и начало координат. Прямая KO – график функции $y = -2x$ (рис. 5).

Сравним расположение графиков функций задач 4 и 5. График функции $y = 1,5x$ располагается в первой и третьей координатных четвертях, а график функции $y = -2x$ – во второй и четвертой координатных четвертях. Это связано с

коэффициентом k .

Из формулы $y = kx$ находим, что если $x = 1$, то $y = k$. Значит график функции $y = kx$ проходит через точку $(1; k)$. Если $k > 0$, то эта точка располагается в первой четверти, при $k < 0$ – в четвертой. Значит при $k > 0$ график прямой пропорциональности расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при $k < 0$ – во второй и четвертой.

При такой организации учебного процесса происходит сближение в восприятии учащихся математических понятий «линейная функция с двумя переменными» и «прямая пропорциональность», их сходство и различие. В этом случае посредством ближней пропедевтики [§1, с. 5] усиливаются понятиеобразующие связи [4, с. 31], а, значит, осуществляется внутрипредметная интеграция I-го вида [7].

Пропедевтическая работа по введению понятия линейного уравнения с двумя переменными начинается с рассмотрения конкретного примера. При этом следует помнить, что чем ближе ребенку ситуация, изложенная в задании, чем ярче первичное знакомство, тем быстрее в дальнейшем произойдет актуализация полученных знаний на одном из трех уровней [4, с. 6].

Пропедевтический материал

Пример 4. Одно число больше другого на 2. Если первое число обозначить через x , а во втором – через y , то соотношение между ними можно записать в виде равенства $x - y = 2$, содержащего две переменные. Такие равенства называют уравнениями с двумя переменными или уравнениями с двумя неизвестными.

Уравнения $2y + 5x = 0$, $4x - y = -5$, $xy = 6$, $x^3 + y^3 = 10$ – также уравнения с двумя неизвестными. Причем первое и второе уравнения имеют вид $ax + by = c$, где a , b , c – числа. Такие уравнения называют линейными уравнениями с двумя переменными.

Уравнение $x - y = 2$ при $x = 6$ и $y = 4$ обращается в верное числовое равенство $6 - 4 = 2$, поэтому пару значений переменных $x = 6$, $y = 4$ называют решением этого уравнения.

Можно проверить, что решением уравнения являются также пары чисел $x = 10, y = 8$; $x = -52, y = -54$. Пары чисел, являющихся решением уравнения с двумя переменными можно записать иначе: $(10; 8)$; $(-52; -54)$, где на первом месте стоит значение переменной x , а на втором — y .

Покажем связь между понятиями линейной функции и линейного уравнения с двумя переменными на примере решения следующей задачи.

Задача 6. Решить уравнения с двумя переменными $6x + 2y = 4$.

Решение. Выразим одну переменную через другую, например y через x . Для этого перенесем слагаемое $6x$ в правую часть, изменив его знак: $2y = -6x + 4$. Разделим обе части уравнения на 2: $y = -3x + 2$.

Полученное уравнение можно рассматривать как линейную функцию. Поскольку графиком линейной функции является прямая, то линейное уравнение с двумя переменными также можно отобразить в виде некоторой прямой. Причем координаты всех точек этой прямой обращают данное уравнение с двумя переменными в верное числовое равенство. Решением данного уравнения будут пары координат точек этой прямой. Поскольку прямая состоит из бесконечного множества точек, то наше уравнение имеет бесконечное множество решений.

Линейные уравнения с двумя переменными, в которых коэффициенты при переменных одновременно не равны нулю, можно привести к виду линейной функции. Графиком уравнения с двумя переменными в этом случае является прямая, и уравнение имеет бесконечное множество решений.

Чтобы построить график линейного уравнения с двумя переменными, коэффициенты при переменных которого одновременно не равны нулю, нужно привести уравнение к виду линейной функции и построить ее график.

Линейному уравнению с двумя переменными

$6x + 2y = 4$ соответствует линейная функция $y = -3x + 2$. Для ее построения найдем координаты двух точек, принадлежащих графику данной функции, и через них проведем прямую.

Прямая AB — график уравнения $6x + 2y = 4$. Решением данного уравнения будут координаты любой точки, принадлежащей этой прямой.

x	y
0	2
1	-1

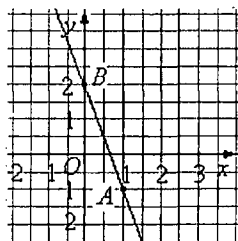


Рис. 6

Задача 7. Построим график уравнения $2y = -5$.

Решение. Приведем уравнение к виду линейной функции, для этого разделим обе части уравнения на 3, получим: $y = -2,5$.

Графиком этой функции является прямая $СК$ параллельная оси Ox и проходящая через точку с ординатой $-2,5$ (рис. 7).

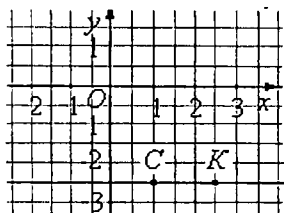


Рис. 7

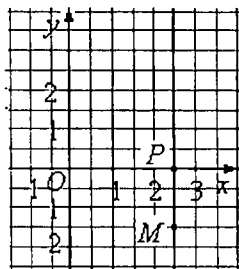


Рис. 8

Отсюда делаем вывод: если в линейном уравнении с двумя неизвестными коэффициент при x равен нулю, то такое уравнение можно привести к линейной функции, график которой параллелен оси Ox .

Задача 8. Построить график уравнения $3x = 7,5$.

Решение. Это уравнение можно записать в виде $3x + 0y = 7,5$. Его решением служат пары чисел, в которых $x = 2,5$, а y – произвольное число.

Графиком уравнения является прямая PM , параллельная оси Oy и проходящая через точку с абсциссой $2,5$ (рис. 8).

Вывод: если в линейном уравнении с двумя переменными коэффициент при y равен нулю, то графиком такого уравнения является прямая, параллельная оси Oy .

Замечание. На пропедевтическом уровне свойства линейного уравнения с двумя переменными

выводятся при помощи неполной индукции. Более строгое их обоснование будет дано позднее при систематическом изучении данной темы.

Сближение в восприятии учащихся понятий «линейная функция» и «линейное уравнение с двумя переменными» способствует усилению межпонятийных внутриспредметных связей [4, с. 31], являющихся основой средней пропедевтики [§1, с. 5], ведущей к внутриспредметной интеграции II-го вида [7].

Для закрепления понятия линейной функции и линейного уравнения с двумя переменными рекомендуется предложить учащимся серию специальных заданий для самостоятельного решения [3, с. 24–29].

Далее, через рассмотрение взаимного расположения графиков линейных функций можно перейти к пропедевтическому изучению систем линейных уравнений с двумя переменными. В этом случае еще больше усиливаются межпонятийные внутриспредметные связи [4, с. 31] между понятиями «линейная функция» и «линейное уравнение с двумя переменными», «линейное уравнение с двумя переменными» и «система линейных уравнений с двумя переменными», а также посредством средней пропедевтики [§1, с. 5] возникают межтемные внутриспредметные связи [4, с. 31] между понятиями «линейная функция» и «система линейных уравнений с двумя переменными».

Как известно, графики линейных функций представляют собой прямые, которые либо пересекаются, либо параллельны.

Задача 9. Пересекаются ли графики функций $y = 3x + 2$ и $y = -2x - 3$?

Решение.

Основной материал

Точку пересечения можно найти графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = 3x + 2$ и $y = -2x - 3$.

На рисунке 9 видно, что графики пересекаются в точке $K(-1; -1)$.

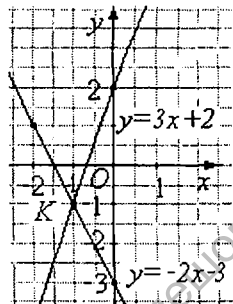


Рис. 9

Пропедевтический материал

Если графики пересекаются, значит, они имеют общую точку, координаты которой обращают в верное равенство как первое уравнение так и второе. Т.е. координата y в этом случае будет одна и та же для двух уравнений. Приравняем правые части уравнений и решим полученное линейное уравнение:

$$3x + 2 = -2x - 3;$$

$$3x + 2x = -2 - 3;$$

$$5x = -5;$$

$$x = -5 : 5;$$

$$x = -1.$$

Графики функций пересекаются в точке с абсциссой -1 . Определим ординату точки пересечения графиков. Для этого подставим $x = -1$ в одно из уравнений, например, в первое: $y = 3 \cdot (-1) + 2$; $y = -1$.

Графики функций пересекаются в точке $K(-1; -1)$.

Следует указать, что графический метод нахождения точки пересечения графиков функций является приближенным.

От графиков линейных функций можно перейти к графикам линейных уравнений.

Задача 10. Найдите точку пересечения графиков уравнений $3x + 2y = 5$ и $5x - y = 6$.

Решение.

Пропедевтический материал

Выразим в обоих уравнениях y через x . Первому уравнению соответствует линейная функция $y = -1,5x + 2,5$; второму — $y = 5x - 6$. Найдём точку пересечения их графиков. Приравняв правые части равенств и, решив уравнение: $-1,5x + 2,5 = 5x - 6$, получаем $x = 1 \frac{4}{13}$.

Координату y точки пересечения графиков уравнений найдём, подставив найденное значение x в одно из уравнений. Получаем $y = \frac{7}{13}$.

Точка пересечения графиков уравнений $\left(1\frac{4}{13}; \frac{7}{13}\right)$.

Полезно, рассмотреть случаи, когда графики функций являются параллельными прямыми.

Задача 11. Найдем точку пересечения графиков функций $y = 3x + 1$ и $y = 3x - 2$.

Решение.

Основной материал

Выполним задание графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = 3x + 1$ и $y = 3x - 2$. На рисунке 10 видно, что прямые $y = 3x + 1$ и $y = 3x - 2$ параллельны.

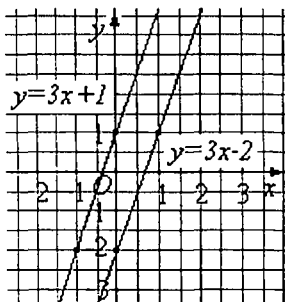


Рис. 10

Пропедевтический материал

Выполним это задание аналитически. Приравняем правые части равенств и решим получившееся уравнение: $3x + 1 = 3x - 2$; $3x - 3x = -1 - 2$; $0 = -3$.

Получили неверное числовое равенство, а значит, уравнение не имеет решений, поэтому графики функций не пересекаются. Прямые, ко-

торые не пересекаются – параллельны.

Отсюда следует, что графики двух линейных функций, заданных формулами вида $y = kx + b$, пересекаются, если коэффициенты при x различны, и параллельны, если коэффициенты при x одинаковы.

Задача 12. Найдите точку пересечения графиков уравнений $x + 2y = 6$ и $2x + 4y = 8$.

Решение.

Пропедевтический материал

Можно заметить, что во втором уравнении каждое слагаемое кратно 2. Разделив обе части этого уравнения на 2, получаем уравнение $x + 2y = 4$. Найдем точку пересечения графиков уравнений $x + 2y = 6$ и $x + 2y = 4$. Для этого приведем уравнения к виду линейной функции. Первому уравнению соответствует линейная функция $y = -0,5x + 3$; второму – $y = -0,5x + 2$.

Полученные линейные функции имеют одинаковые коэффициенты при x , а, значит, графики этих функций будут параллельны.

Задача 13. Найдите точку пересечения графиков уравнений $x + 3y = 4$ и $x - 5y = 0$.

Решение.

Пропедевтический материал

В данном задании проще найти зависимость x через y :

$$x + 3y = 4; \quad x - 5y = 0;$$

$$x = -3y + 4; \quad x = 5y.$$

Приравняв правые части равенств и, решив уравнение $-3y + 4 = 5y$, получаем $y = 0,5$. Подставив значение y в одно из уравнений, получаем $x = 2,5$.

Графики уравнений $x + 3y = 4$ и $x - 5y = 0$ пересекаются в точке $(2,5; 0,5)$. Следует отметить, что координаты этой точки будут являться решением каждого из уравнений.

Задача 14. Найти точку пересечения графиков уравнений $-6x - 2y = -10$ и $3x + y = 5$.

Решение.

Пропедевтический материал

Обе части первого уравнения разделим на -2 , тогда получим уравнение $3x + y = 5$. Полученное уравнение имеет такой же вид, как и второе уравнение, а, значит, их графики совпадают. Поэтому решением будут координаты всех точек прямой. Так как точек на прямой бесконечно много, то и решений бесконечно много.

Вывод: графики двух линейных уравнений с двумя переменными вида $ax + by = c$, совпадают, если коэффициенты при x и y , а также свободные члены пропорциональны.

В рассмотренных примерах учащиеся при нахождении точек пересечения графиков линейных уравнений с двумя переменными аналитически по существу применяют метод подстановки решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными, и таким образом, данный метод невольно становится частью их витавшего опыта [4, с. 14].

При пропедевтическом изучении систем линейных уравнений с двумя переменными в рамках темы «Линейная функция», считаем целесообразным, предложить ряд задач для самостоятельного решения учащихся [3, с. 32–34].

Обобщая решения рассмотренных выше заданий, делаем выводы:

- два линейных уравнения с двумя переменными могут иметь одно общее решение, бесконечно много общих решений или не иметь общих решений;
- два линейных уравнения с двумя переменными имеют одно общее решение, если их графики пересекаются;
- два линейных уравнения с двумя переменными не имеют решений, если соответствующие им прямые параллельны;

– два линейных уравнения с двумя переменными имеют бесконечно много решений, если соответствующие им прямые совпадают.

Задание 6. Разработать группу упражнений для закрепления знаний, полученных по данной теме.

Задание 7. Разработать наглядный материал, которым целесообразно воспользоваться при изучении темы «Линейная функция».

Задание 8. Разработать фрагмент урока по алгебре на основе внутрипредметной пропедевтики при изучении темы «Квадратичная функция».

3.2 Методика использования пропедевтики как средства внутрипредметной интеграции при изучении геометрии

Реализацию пропедевтики как средства интеграции геометрического материала рассмотрим на примере перспективно-опережающего изучения теоремы Пифагора.

Теорема Пифагора является одной из важнейших теорем геометрии. В современных школьных учебниках она вводится сравнительно рано [6]. Раннее изучение теоремы Пифагора делает разрешимыми больший класс задач геометрии. Так при изучении темы "Четырехугольники", благодаря знанию теоремы Пифагора, можно глубже изучить свойства того или иного вида параллелограмма.

При пропедевтическом изучении теоремы Пифагора активно используется длительная пропедевтика [§1, с. 5], когда материал вносится в практику решения задач задолго до его изучения по плану, начиная с самого элементарного с постепенным усложнением заданий. Благодаря такому предварительному «знакомству», ученикам при последующем изучении теоремы остается лишь теоретически осмыслить уже известный материал.

Как известно, исторически теорема Пифагора рассматривалась, прежде всего, как соотношение между площадями квадратов, построенных на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника. Поэтому, придерживаясь принципа историзма, пропедевтическое изучение теоремы Пифагора построим на ее генетической связи с понятием площади квадрата.

Анализ математического материала показал, что задания, способствующие предварительному знакомству с теоремой Пифагора, рекомендуется направить на развитие следующих навыков:

- умение вычислять площади комбинированных фигур;
- умение учащихся работать с квадратами величин;

- умение решать задачи с использованием буквенных записей, употребляя квадраты и знаки арифметических действий, а также находить значения полученных выражений;
- умение выяснять является ли треугольник прямоугольным;
- умение определять катеты и гипотенузу прямоугольных треугольников при произвольном расположении треугольников на плоскости и производить их измерение с помощью линейки;
- умение делать выводы, соответствующие условию задания.

Основываясь на общую дидактическую модель [§2, с. 8] предложим следующую методику предварительного знакомства учащихся с теоремой Пифагора и ее доказательством.

Задания, которые предлагаются учащимся при перспективно-опережающей подготовке, не должны требовать значительных затрат времени (не более 3-5 минут урока) и не должны быть сложны, они должны быть посильны даже для слабых учеников.

Долговременная пропедевтика, подготавливающая к изучению теоремы Пифагора и ее доказательства в 7 классе, рассчитана, по меньшей мере, на 10 уроков математики (8 уроков геометрии и 2 урока алгебры). Начинать пропедевтическую работу можно со следующей задачи.

Пропедевтический материал

Задача 15. Найти площадь квадрата $ABCD$ со стороной $AB = 3$ см.

Дано: $ABCD$ – квадрат; $AB = 3$ см.

Найти: S .

Решение. Найдем площадь квадрата $ABCD$:

$$S = AB^2; S = 3^2 = 9 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $S = 9 \text{ см}^2$.

На последующих уроках можно предложить более сложную задачу, при этом усложнение происходит за счет различных комбинаций квадратов.

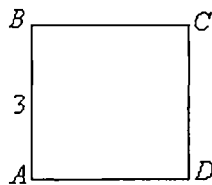


Рис. 11

Задача 16. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 12, если $ABCD$ и $DEFG$ – квадраты со сторонами $AB = 5$ см, $DE = 4$ см.

Дано: $ABCD$ и $DEFG$ – квадраты;
 $AB = 5$ см; $DE = 4$ см.

Найти: S .

Решение.

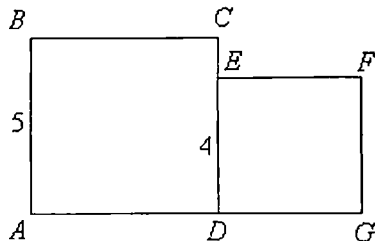


Рис. 12

1) Найдем площадь квадрата $ABCD$:

$$S_1 = AB^2.$$

2) Найдем площадь квадрата $DEFG$:

$$S_2 = DE^2.$$

3) Найдем площадь фигуры, изображенной на рисунке 12:

$$S = S_1 + S_2 = AB^2 + DE^2; S = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $S = 41 \text{ см}^2$.

Задача 17. Найдите площадь, закрашенной части фигуры (рис. 13), если $ABCD$ и $KLMN$ – квадраты со сторонами $AB = 6 \text{ см}$ и $KL = 2 \text{ см}$.

Дано: $ABCD$ и $KLMN$ – квадраты; $AB = 6 \text{ см}$; $KL = 2 \text{ см}$.

Найти: S .

Решение.

1) Найдем площадь квадрата $ABCD$:

$$S_1 = AB^2.$$

2) Найдем площадь квадрата $KLMN$:

$$S_2 = KL^2.$$

3) Найдем площадь фигуры, изображенной на рисунке 13:

$$S = S_1 - S_2 = AB^2 - KL^2; S = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$$

(см²).

Ответ: $S = 32 \text{ см}^2$.

Дальнейшее усложнение задач происходит за счет усложнения формулировок условия задачи (задачи направлены не только на нахождение площадей фигур, но и на сравнение площадей нескольких фигур, а также на доказательство некоторых свойств).

Задача 18. Доказать, что площадь квадрата $ABCD$ со стороной 5 см равна сумме площадей квадратов $KLMN$ и $PQRS$ со сторонами 3 см и 4 см соответственно.

Дано: $ABCD$, $KLMN$, $PQRS$ – квадраты; $AB = 5 \text{ см}$; $KL = 3 \text{ см}$; $PQ = 4 \text{ см}$.

Доказать: $S_{ABCD} = S_{PQRS} + S_{KLMN}$.

Доказательство: 1) Найдем площадь квадрата $ABCD$:

$$S_{ABCD} = AB^2; S_{ABCD} = 5^2 = 25 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Найдем площадь квадрата $KLMN$:

$$S_{KLMN} = KL^2.$$

3) Найдем площадь квадрата $PQRS$:

$$S_{PQRS} = PQ^2.$$

4) Найдем сумму площадей квадратов $KLMN$ и $PQRS$:

$$S_{KLMN} + S_{PQRS} = KL^2 + PQ^2;$$

$$S_{KLMN} + S_{PQRS} = 32 + 42 = 9 + 16 = 25 \text{ (см}^2\text{)}.$$

5) Сравним S_{ABCD} и $S_{KLMN} + S_{PQRS}$:

Из пунктов 1 и 4 следует, что $S_{ABCD} = S_{KLMN} + S_{PQRS} = 25 \text{ см}^2$, значит, $AB^2 = KL^2 + PQ^2$.

Задача 19. Найдите площадь заштрихованной части фигуры (рис. 14), если $ABCD$ – квадрат со стороной 5 см, $AEKM$ – квадрат со стороной 4 см. Сравните полученную площадь с площадью квадрата $TXYZ$ со стороной 3 см.

Дано: $ABCD$, $AEKM$, $TXYZ$ – квадраты;

$AB = 5 \text{ см}$; $AE = 4 \text{ см}$; $TX = 3 \text{ см}$.

Найти: S_1 , сравнить S_1 и S_2 .

Решение.

1) Найдём площадь квадрата $ABCD$:

$$S_{ABCD} = AB^2.$$

2) Найдём площадь квадрата $AEKM$:

$$S_{AEKM} = AE^2.$$

3) Найдём площадь S_1 :

$$S_1 = S_{ABCD} - S_{AEKM};$$

$$S_1 = AB^2 - AE^2;$$

$$S_1 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \text{ (см}^2\text{)}.$$

4) Найдём площадь квадрата $TXYZ$:

$$S_2 = TX^2;$$

$$S_2 = 3^2 = 9 \text{ (см}^2\text{)}.$$

5) Сравним площади S_1 и S_2 :

Из пунктов 3 и 4 следует, что $S_1 = S_2 = 9 \text{ см}^2$, значит $TX^2 = AB^2 - AE^2$.

Ответ: $S_1 = 9 \text{ см}^2$; $S_1 = S_2$.

Развитию абстрактного и логического мышления способствует использование при решении задач буквенных записей, которые содержат квадраты величин. Также решение задач в общем виде способствует в дальнейшем к свертыванию процесса мышления [4, с. 5], что сказывается на скорости протекания мыслительных операций, а также на их организации.

Следующую задачу целесообразно предложить за несколько уроков непосредственно перед изучением теоремы Пифагора. Результат ее решения является иллюстрацией теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5 (учащимся сообщается, что треугольник со сторонами 3, 4, 5 является прямоугольным и что его называют египетским).

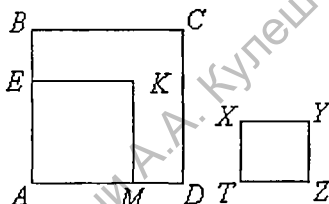


Рис. 14

Задача 20. На сторонах прямоугольного треугольника со сторонами 3 м, 4 м, 5 м построили квадраты (рис. 15). Сравнить площадь квадрата, построенного на гипотенузе, с суммой площадей квадратов, построенных на катетах.

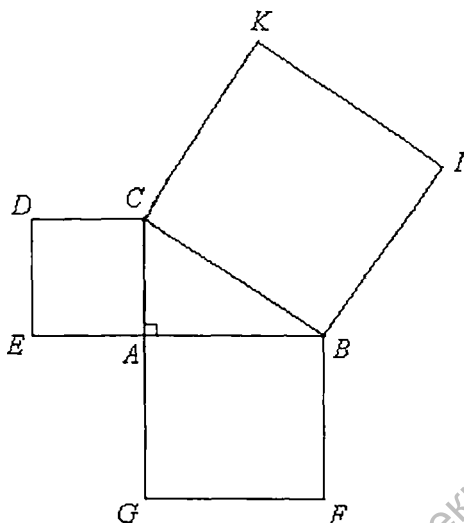


Рис. 15

Дано: ABC ; $A = 90$; $ABFG$, $ACDE$, $BCKI$ – квадраты;
 $AB = 3$ м; $AC = 4$ м; $BC = 5$ м.
 Сравнить: S_{BCKI} и $S_{ABFG} + S_{ACDE}$.

Решение.

- 1) Найдем площадь квадрата $BCKI$:
 $S_{BCKI} = BC^2$; $S_{BCKI} = 5^2 = 25$ (м²).
- 2) Найдем площадь квадрата $ABFG$:
 $S_{ABFG} = AB^2$.
- 3) Найдем площадь квадрата $ACDE$:
 $S_{ACDE} = AC^2$.
- 4) Найдем сумму площадей квадратов $ABFG$ и $ACDE$:
 $S_{ABFG} + S_{ACDE} = AB^2 + AC^2$;
 $S_{ABFG} + S_{ACDE} = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 =$

$= 25$ (м²).

5) Сравним S_{BCKI} и $S_{ABFG} + S_{ACDE}$:

Из пунктов 1 и 4 следует, что $S_{BCKI} = S_{ABFG} + S_{ACDE}$ значит $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Ответ: $S_{BCKI} = S_{ABFG} + S_{ACDE}$.

Благодаря «силе первого впечатления» [4, с. 32] учащимся запомнится рисунок к этой задаче, который иногда называют «пифагоровы штаны», и первая формулировка теоремы Пифагора, сформулированная самим Пифагором: «Площадь квадрата построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах». Небольшой исторический экскурс позволит усилить первое впечатление.

Кроме того, подведение учащихся к теореме Пифагора подобным образом, вполне соответствует историческому пути развития геометрии как науки, особенно первым его этапам, когда, по словам известного французского математика и методиста А. Фуше, «вывод результатов всегда основывался на рисунке и опирался на наглядные представления; всегда использовалась возможность наблюдения, измерения и проверки результатов умозаключений; абстрактному всегда предшествовало конкретное» [8, с. 73].

Одна из главных трудностей, возникающих при изучении систематического курса математики, заключается в неподготовленности учеников к доказательствам. Учеников пугает само слово «докажи» и они уже изначально настраиваются на то, что эта задача им не по силам. Исследования психологов школы Л. С. Выготского позволяют утверждать, что подготовку можно и нужно начинать уже в начальной школе, формулируя задачи на сложение, умножение, деление сначала с использованием слов «проверь», «убедись», «сравни», а затем и слова «докажи». Тогда ученики на уроках геометрии не будут пугаться задач на доказательства.

При пропедевтической работе, подготавливающей к изучению теоремы Пифагора и ее доказательства, следует уделять внимание на выработку навыка определения катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника. С этой целью можно предложить учащимся заполнить таблицу по определению катетов и гипотенузы прямоугольных треугольников, варьирование расположения прямоугольных треугольников на плоскости способствует развитию пространственного воображения. Наибольший эффект будет при выполнении аналогичного задания в котором, кроме определения катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника, требуется измерить их длину с помощью заданного единичного отрезка (например, можно взять единичный отрезок равный двум клеткам) и произвести соответствующие вычисления. Изменение длины единичного отрезка позволяет работать с этим заданием не один раз.

Упражнение 1. Для треугольников, изображенных на рисунке 16, заполните таблицу (Таблица 2), произведя соответствующие измерения.

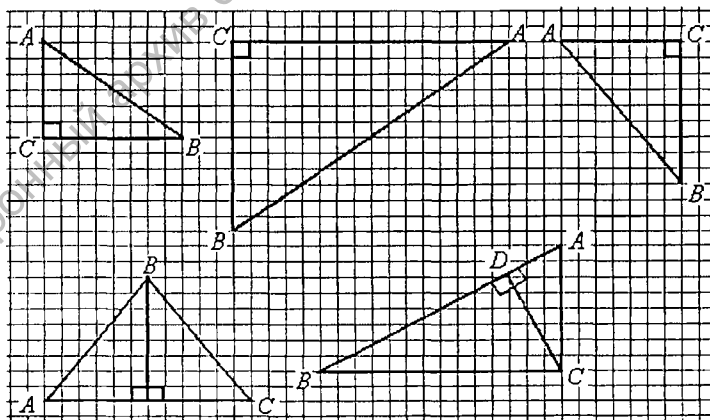


Рис. 16

Таблица 2

Треугольник	Меньший катет	Квадрат меньшего катета	Больший катет	Квадрат большего катета	Гипотенуза	Квадрат гипотенузы	Сумма квадратов катетов	Вывод
ABC	$AC =$	$AC^2 =$	$BC =$	$BC^2 =$	$AB =$	$AB^2 =$	$AC^2 + BC^2 =$	

Приступить к выполнению этого задания можно на уроке (заполнить одну – две строки), а оставшиеся строки предлагается заполнить учащимся дома, не спеша.

Следующее занятие необходимо посвятить обобщению полученных на пропедевтическом уровне знаний, связанных с теоремой Пифагора. Особое внимание следует уделить задаче про «пифагоровы штаны» [§3, с. 23] и первую формулировку теоремы. После повторения можно приступать к непосредственному изучению теоремы Пифагора и ее применению при решении геометрических и алгебраических задач. Поскольку к доказательству теоремы с помощью площадей комбинаций фигур учащиеся хорошо подготовлены, то оно будет проведено при высокой активности учащихся, некоторые шаги доказательства рекомендуется предложить для самостоятельного выполнения.

Основной материал

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный; $\angle C = 90^\circ$
(рис. 17).

Доказать: $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

Доказательство.

Обозначим $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$.

Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Перед тем, как приступить к непосредственному доказательству теоремы, полезно напомнить учащимся формулу вычисления площади прямоугольного треугольника: половина произведения катетов, или половина площади прямоугольника, построенного на катетах.

- 1) Построим квадрат со стороной $a + b$, площадь которого равна $(a + b)^2$.
- 2) Разобьем квадрат на части как показано на рисунке 18. В результате получаем квадрат со стороной c площадью c^2 и четыре равных прямоугольных треугольника со сторонами a , b , c , общая площадь которых равна

$$4 \frac{ab}{2} = 2ab. \text{ Значит площадь большого квадрата равна } c^2 + 2ab.$$

Из пунктов 1 и 2 имеем:

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab;$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab;$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab - 2ab;$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Так как a , b , c — длины сторон BC , AC , AB , то равенство можно записать в виде: $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Что нам и требовалось доказать.

Демонстрацию построения чертежа для доказательства теоремы желательно строить на доске с нарисованной клеткой, если же такой доски нет, то было бы хорошо заготовить чертеж на бумаге, что сэкономит время при последующих повторениях доказательства теоремы учениками у доски.

В «сильном» классе можно показать еще одно «изящное» доказательство теоремы Пифагора, основанное на равенстве площадей фигур. Разобьем два равных квадрата со стороной $a + b$ на части двумя способами так, как показано на рисунке 19.

Нетрудно заметить, что площади закрашенных частей на обоих рисунках равны (они состоят из четырех одинаковых прямоугольных треугольников). Тогда будут равны и площади незакрашенных частей. Отсюда и следует теорема Пифагора.

Отметим, что при изучении приведенных выше доказательств, учащиеся на пропедевтическом уровне знакомятся с аксиомами площади [6]:

1. *Равные фигуры имеют равные площади.*

2. *Если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей.*

Для самостоятельного решения учащимся можно предлагать задания не только по геометрии [3, с. 7–8], но и по алгебре [3, с. 9–10]

При изучении сложных доказательств подготовку к ним целесообразно начинать заблаговременно: сначала показать в решении задачи или доказательстве теоремы элементы «трудного» доказательства. Когда же придет время изучения этого доказательства трудностей не возникнет.

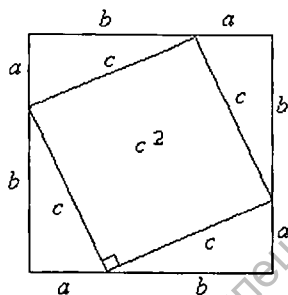


Рис. 18

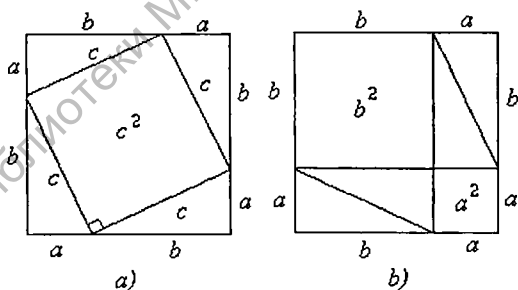


Рис. 19

Как показывает практика (СШ №№ 28, 37 г. Могилева), после описанного выше перспективно-опережающего изучения теоремы Пифагора восприятие данных доказательств у большинства учащихся не вызывает затруднений.

Организованная таким образом пропедевтическая работа способствует усилению межтемных внутрипредметных связей [4, с. 31], процесс осуществления которых проходит все необходимые этапы [4, с. 32-33], благодаря чему возникает внутрипредметная интеграция I-го вида [7] геометрического материала.

Задание 9. Разработать группу упражнений для закрепления знаний, полученных по данной теме.

Задание 10. Разработать наглядный материал, которым целесообразно воспользоваться при изучении темы «Теорема Пифагора» в VIII классе.

Задание 11. Разработать фрагмент урока по геометрии на основе внутрипредметной пропедевтики при изучении темы «Четырехугольники».

§4. Методика применения пропедевтики как средства межпредметной интеграции школьного курса математики

Реализацию пропедевтики как средства межпредметной интеграции курса математики рассмотрим на примере пропедевтического знакомства с понятием квадратного корня и квадратного уравнения при раннем изучении теоремы Пифагора.

Анализируя математический материал, связанный с данной темой, выделим основной и пропедевтический материал (Таблица 3).

Таблица 3

Основной материал	Пропедевтический материал
Теорема Пифагора	Арифметический квадратный корень, неполное квадратное уравнение, квадратное уравнение, сводимое к линейному.

На основе общей дидактической модели [§2, с. 8] предложим следующую методическую разработку пропедевтического изучения квадратного корня и квадратного уравнения в рамках темы «Теорема Пифагора».

Очевидно, что после изучения теоремы Пифагора и ее доказательства необходимо показать применение теоремы на практике. Причем начать следует с задачи, в которой числа будут образовывать пифагорову тройку. Обращаем внимание учащихся на то, что при решении геометрических задач результат должен получиться неотрицательный.

Основной материал

Задача 21. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны 6 см и 8 см.

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный; $\angle C = 90^\circ$; $AC = 6$ см; $BC = 8$ см.

Найти: AB .

Решение. Поскольку треугольник прямоугольный, то для него можно записать теорему Пифагора: $AB^2 = BC^2 + AC^2$;

$$AB^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100; AB^2 = 100.$$

Как известно $100 = 10^2$ или $100 = (-10)^2$, но длина не выражается отрицательным числом, значит $AB = 10$ см.

Ответ: $AB = 10$ см.

При решении следующей задачи необходимо показать потребность введения нового понятия «квадратный корень». Поскольку это понятие изучается на пропедевтическом уровне, то никаких свойств квадратного корня здесь изучать не следует, а вычисления производятся по определению.

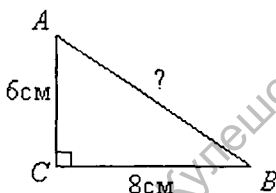


Рис. 20

Пропедевтический материал

Задача 22. В прямоугольном треугольнике катеты равны 2 см и 3 см. Найдите гипотенузу этого треугольника.

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный; $\angle C = 90^\circ$;

$AC = 2$ см; $BC = 3$ см.

Найти: AB .

Решение. Для нахождения гипотенузы прямоугольного треугольника воспользуемся теоремой Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$;

$$AB^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13; AB^2 = 13.$$

Теперь нужно найти число, квадрат которого равен 13. Однако ни одно известное нам число при умножении само на себя не дает 13. Если мы измерим линейкой гипотенузу треугольника со сторонами 2 см и 3 см, мы получим приблизительно 3,6 см, то есть гипотенуза имеет определенную длину, а значит должно существовать число, квадрат которого равен 13. Это число обозначают с помощью знака $\sqrt{\quad}$, который читают «корень квадратный из». Так как $(\sqrt{13})^2 = 13$, то $AB = \sqrt{13}$ (см).

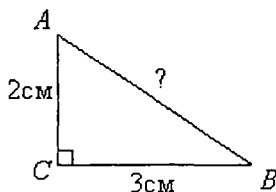


Рис. 21

Ответ: $AB = \sqrt{13}$ см.

С помощью калькулятора можно найти значение корня квадратного из 13: $\sqrt{13} = 3,605551\dots$, однако это значение приближенное и при решении задач мы будем использовать квадратный корень.

Задача 23. В прямоугольном треугольнике

катеты равны $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$. Найдите гипотенузу этого треугольника.

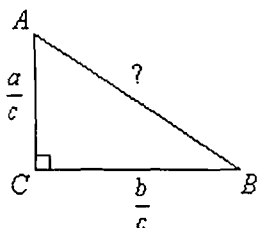


Рис. 22

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный; $\angle C = 90^\circ$;

$$AC = \frac{a}{c}; BC = \frac{b}{c}.$$

Найти: AB .

Решение. Для нахождения гипотенузы прямоугольного треугольника воспользуемся теоремой Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$;

$$AB^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2};$$

$$AB = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}. \text{ Ответ: } AB = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}.$$

Также следует показать еще одно применение теоремы Пифагора при нахождении катета прямоугольного треугольника, если известна гипотенуза и другой катет. При решении такой задачи можно случай пифагоровой тройки чисел не рассматривать. После решения следует сделать вывод о нахождении катета прямоугольного треугольника: *квадрат катета прямоугольного треугольника равен разности квадратов гипотенузы и другого катета.*

Задача 24. Определите катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $\sqrt{5}$ м, второй катет 1 м.

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный; $\angle C = 90^\circ$;

$AB = \sqrt{5}$ м; $AC = 1$ м.

Найти: BC .

Решение. Для нахождения гипотенузы прямоугольного треугольника воспользуемся теоремой Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow$

$$BC^2 = AB^2 - AC^2;$$

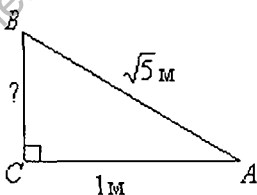


Рис. 23

$$BC^2 = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4; BC = 2 \text{ (м)}.$$

Ответ: $BC = 2$ м.

Таким образом, пропедевтическое изучение квадратного корня способствует частичной межпредметной интеграции [5, с. 11–12] посредством предшествующих (предварительных) [4, с. 41] фактических [4, с. 42] межпредметных связей. В зависимости от уровня подготовленности учащихся к изучению материала усиление указанных связей может быть организовано в двух из трех направлений [4, с. 43]:

- 1) при пропедевтическом изучении квадратного корня (алгебраический материал) в курсе геометрии, а в курсе алгебры позднее;
- 2) при изучении квадратного корня в курсе геометрии на пропедевтическом уровне, а в курсе алгебры – на систематическом.

При решении геометрических задач с помощью теоремы Пифагора, может получиться уравнение, содержащее переменную во второй степени, т.е. квадратное уравнение. В этом случае квадратные уравнения изучаются на пропедевтическом уровне эпизодически [§1, с. 5] неявно [§1, с. 6]. По нашему мнению, на данном этапе при решении задач целесообразно рассмотреть только два вида квадратных уравнений:

- 1) уравнение вида $ax^2 = b$;
- 2) квадратное уравнение, сводящееся к линейному уравнению.

Задача 25. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если их

длины относятся как $3 : 2$, а гипотенуза равна $\sqrt{52}$.

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный; $\angle C = 90^\circ$;

$$AB = \sqrt{52} \text{ см}; BC : AC = 3 : 2.$$

Найти: AC ; BC .

Решение. Поскольку у нас задано отношение катетов, то можно ввести коэффициент пропорциональности.

1) Пусть x см – коэффициент пропорциональности.

Тогда $BC = 3x$ см; $AC = 2x$ см.

Для данного прямоугольного треугольника запишем теорему Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Учитывая данные задачи получаем:

$$(2x)^2 + (3x)^2 = (\sqrt{52})^2;$$

возведем в квадрат каждое слагаемое:

$$4x^2 + 9x^2 = 52;$$

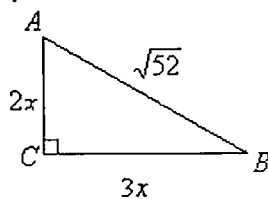


Рис. 24

$$13x^2 = 52;$$

$$x^2 = 52 : 13;$$

$$x^2 = 4;$$

квадрат 2 и (-2) есть 4, однако по смыслу задачи x не может быть отрицательным, значит: $x = 2$ см.

2) Найдем катеты прямоугольного треугольника:

$$BC = 3 \cdot 2 = 6 \text{ (см)}, AC = 2 \cdot 2 = 4 \text{ (см)}.$$

Ответ: $AC = 4$ см; $BC = 6$ см.

При решении некоторых задач может получиться квадратное уравнение, которое после применения формул сокращенного умножения и приведения подобных слагаемых может быть сведено к линейному.

Задача 26. В прямоугольном треугольнике один катет равен 6 м, а другой катет на 2 м меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу и катет.

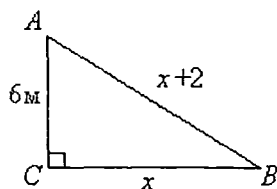


Рис. 25

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный; $\angle C = 90^\circ$;
 $AC = 6$ м; BC на 2 м меньше AB .

Найти: AB , BC .

Решение.

1) Пусть $BC = x$ м, тогда $AB = (x + 2)$ м.

Запишем теорему Пифагора для данного треугольника:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2; (x + 2)^2 = 6^2 + x^2;$$

применяя формулу квадрата суммы, получаем:

$$x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = 6^2 + x^2;$$

$$x^2 + 4x + 4 = 36 + x^2;$$

$$x^2 + 4x - x^2 = 36 - 4;$$

$$4x = 32;$$

$$x = 32 : 4;$$

$$BC = x = 8 \text{ (м)}.$$

2) Найдем AB :

$$AB = 8 + 2 = 10 \text{ (м)}.$$

Ответ: $BC = 8$ м; $AB = 10$ м.

Задача 27. В треугольнике ABC к стороне BC , равной 4 м, проведены медиана AM и высота $АН$. Найдите высоту $АН$, если $AM = 5$ м, а $AB = 6$ м.

Дано: $\triangle ABC$; AM – медиана;

$АН$ – высота; $AB = 6$ м; $BC = 4$ м; $AM = 5$ м.

Найти: $АН$.

Решение.

1) Поскольку AM – медиана, то $BM = MC$;

$$BM = 4 : 2 = 2 \text{ (м)}.$$

2) Рассмотрим $\triangle AMH$. Поскольку AH – высота, то $\angle MHA = 90^\circ$, значит $\triangle AMH$ – прямоугольный. Запишем для него теорему Пифагора:

$$AM^2 = MH^2 + AH^2;$$

$$AH^2 = AM^2 - MH^2.$$

Пусть $MH = x$ м, тогда: $AH^2 = 52 - x^2$.

3) Рассмотрим $\triangle ABH$. Так как AH – высота, то $\angle BHA = 90^\circ$, а значит $\triangle ABH$ – прямоугольный. Запишем для него теорему Пифагора:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2;$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2.$$

Поскольку $MH = x$ м, то $BH = (2 + x)$ м, тогда: $AH^2 = 6^2 - (2 + x)^2$.

4) Итак, из пункта 2 имеем: $AH^2 = 52 - x^2$;

из пункта 3 имеем: $AH^2 = 6^2 - (2 + x)^2$.

Приравняв правые части этих равенств, получим:

$$52 - x^2 = 6^2 - (2 + x)^2;$$

$$25 - x^2 = 36 - (2^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + x^2);$$

$$25 - x^2 = 36 - (4 + 4x + x^2);$$

$$25 - x^2 = 36 - 4 - 4x - x^2;$$

$$4x + x^2 - x^2 = 36 - 4 - 25;$$

$$4x = 7;$$

$$MH = x = \frac{7}{4} \text{ (м)}.$$

5) Найдем AH либо из пункта 2, либо из пункта 3:

$$AH^2 = AM^2 - MH^2; AH^2 = 52 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 25 - \frac{49}{16} = 25 - 3\frac{1}{16} = 21\frac{15}{16};$$

$$AH = \sqrt{21\frac{15}{16}} \text{ (м)}.$$

$$\text{Ответ: } AH = \sqrt{21\frac{15}{16}} \text{ м}.$$

Для закрепления изученного материала рекомендуется предложить учащимся ряд задач [3, с. 13–14, 17–18].

Организованное таким образом изучение теоремы Пифагора и ее применения способствует сближению в восприятии учащихся геометрического и алгебраического материала, т.е. возникновению частичной межпред-

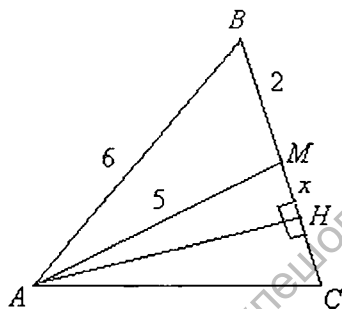


Рис. 26

метной интеграции [5, с. 11–12] посредством фактических [4, с. 42] и теоретических [4, с. 42] межпредметных связей. При этом для более эффективного установления межпредметных связей рекомендуется осуществить указанные выше этапы [4, с. 44].

Задание 12. Разработать группу упражнений для закрепления знаний, полученных по данной теме.

Задание 13. Разработать фрагмент урока по алгебре на основе межпредметной пропедевтики.

Задание 14. Разработать фрагмент урока по геометрии на основе межпредметной пропедевтики.

Задание 15. Разработать конспект интегрированного урока по теме «Решение задач с помощью квадратных уравнений».

Литература

1. Алгебра: учеб. для 7 кл. сред. шк. / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 1993. – 191 с.
2. Алгебра: учеб. для 7 кл. сред. шк. / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин, С.Б. Суворова: Под. ред. А.И. Маркушевича. – М.: Просвещение, 1981. – 239 с.
3. Лобанок, И.П. Математика: Учебные материалы с межпредметным содержанием (7–9 классы) / И.П. Лобанок. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2004. – 36 с.
4. Лобанок, И.П. Пропедевтика как средство интеграции в обучении математике: учеб.-метод. пособие / И.П. Лобанок. Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2005. – 68 с.
5. Рогановская, Е.Н. Методика разработки учебно-дидактических материалов на интеграционной основе (в курсе математики 7–9 классов): Учебное пособие / Е.Н. Рогановская. – Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2000. – 112 с.
6. Рогановский, Н.М. Геометрия: учеб. для 7–9-х кл. общеобразоват. шк. с углуб. изучением математики – 2-е изд., перераб./ Н.М. Рогановский. – Мн.: Нар. асвета, 1997. – 574 с.
7. Рогановский, Н.М. Ключевые понятия теории интегрированного школьного учебника математики / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская // Математическое образование: современное состояние и перспективы: тезисы докладов Международной конференции. – Могилев: МГУ им. А.А.Кулешова, 1999. – С. 167–169.
8. Фуше, А. Педагогика математики / А. Фуше; пер. с франц. М.З. Рабиновича; под ред. проф. И.К. Андропова. – М.: Просвещение, 1969. – 128 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
§1. Виды, формы и функции пропедевтики в обучении математике	4
§2. Дидактическая модель использования пропедевтики как средства интеграции	8
§3. Методика применения пропедевтики как средства внутрипредметной интеграции школьного курса математики	9
3.1 Методика применения пропедевтики как средства внутрипредметной интеграции при изучении алгебры	9
3.2 Методика использования пропедевтики как средства внутрипредметной интеграции при изучении геометрии	21
§4. Методика применения пропедевтики как средства межпредметной интеграции школьного курса математики	29
Литература	35

Учебное издание

Лобанок Ирина Петровна

**МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ
ПРОПЕДЕВТИКИ КАК СРЕДСТВА ИНТЕГРАЦИИ
ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ**

Методические рекомендации

Технический редактор *А.Н. Гладун*
Компьютерная верстка *Н.А. Наумович*

Подписано в печать 22.11.2010. Формат 60х84/16. Гарнитура Times New Roman.
Усл.-печ. л. 2,1. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 50 экз. Заказ № 502.

Учреждение образования "Могилевский государственный университет
им. А.А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1.
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
УО «МГУ им. А.А. Кулешова». 212022, Могилев, Космонавтов, 1.