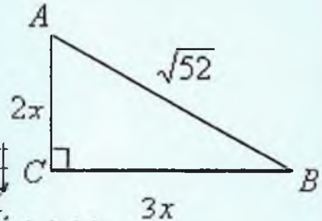
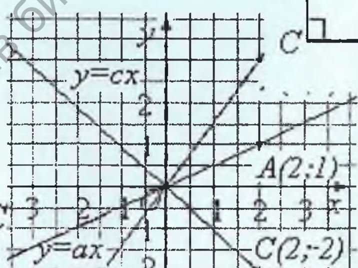
И.П. ЛОБАНОК

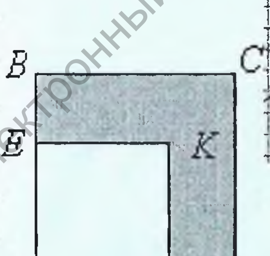
МАТЕМАТИКА

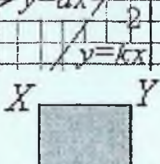
УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ С МЕЖПРЕДМЕТНЫМ СОДЕРЖАНИЕМ

7-9 КЛАССЫ









МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А.КУЛЕШОВА»

И.П. ЛОБАНОК

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ С МЕЖПРЕДМЕТНЫМ СОДЕРЖАНИЕМ

7-9 КЛАССЫ

им. А.А.Кулешова

Могилев 2004

УДК 372.851(075.8)
ББК 74.262я73
Л68

Рецензент

Кандидат педагогических наук Е. Н. Р о г а н о в с к а я

*Печатается по решению редакционно-издательского
и экспертного совета МГУ им. А.А.Кулешова*

Лобанок И.П.

Л68 **Математика:** Учебные материалы с межпредметным содержанием (7-9 классы). – Могилев: МГУ им. А.А.Кулешова, 2004. – 36 с.

Учебные материалы представляют собой разработку некоторых тем школьного курса математики (7-9 класс) на интегрированной основе с элементами пропедевтики. В них содержится как теоретическое изложение материала, так и система задач. В каждой теме ряд задач дается с решением и предлагается образец оформления.

Учебные материалы помогут освоению основного курса по дидактике математики. Могут быть использованы студентами во время прохождения педагогической практики в школе, а также учителями средних школ.

УДК 372.851(075.8)
ББК 74.262я73

ВВЕДЕНИЕ

Одним из средств реализации интегрированного подхода к обучению математике является пропедевтическое изучение некоторых ключевых тем алгебры и геометрии.

При пропедевтическом изучении темы активно используется метод опережающего обучения, когда материал вносится в практику решения задач за определенное время до его теоретического изучения. Благодаря такому предварительному “знакомству”, ученикам при последующем изучении темы остается лишь теоретически осмыслить уже известный материал.

Автор данных материалов предлагает возможный вариант осуществления интегрированного подхода при обучении математике в 7 – 9 классах через пропедевтическое изучение следующих тем: «Площади фигур», «Теорема Пифагора», «Квадратный корень», «Линейные уравнения с двумя переменными и их системы».

Поскольку теорема Пифагора не мыслима без квадратных корней, то ее раннее рассмотрение ведет к интеграции алгебраического и геометрического материала. Введение понятия квадратного корня из числа (без рассмотрения его свойств) при изучении теоремы Пифагора подготавливает учащихся к изучению этого понятия в курсе алгебры.

Более того, раннее изучение теоремы Пифагора повышает степень интеграции геометрического материала. Теперь при изучении темы “Четырехугольник” становится разрешимым больший круг задач.

В учебных материалах предлагается ряд заданий, подготавливающих учащихся к изучению теоремы Пифагора: задачи на развитие навыков работы с квадратами величин, в том числе знакомство с пифагоровыми тройками чисел, задачи на вычисление площадей фигур, составленных из квадратов, прямоугольников и т. д. Такие задачи не требуют значительных временных затрат (не более 3 – 5 минут). Имеются задания, в которых происходит предварительное знакомство с квадратными уравнениями вида $ax^2 = b$, а также уравнениями второй степени, сводящимися к линейным.

При совместном изучении тем “Линейная функция” и “Линейные уравнения с двумя переменными” наблюдается интеграция алгебраического материала. Сближение понятий “линейная функция” и “линейное уравнение с двумя переменными” готовит учащихся к восприятию понятия “система линейных уравнений” и в дальнейшем способствует более прочному его усвоению.

Предлагаемые материалы обладают дидактической гибкостью. Учителя могут использовать последовательность и дозировку материала, предложенную автором, а также варьировать ими в зависимости от уровня подготовки конкретного класса и наличия учебного времени.

§1. КВАДРАТ ЧИСЛА И ПЛОЩАДЬ

Основным материалом параграфа является "Квадрат числа", а на подготовительном уровне изучаются площади квадратов и прямоугольников.

1.1. ЗАДАНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

Урок 1

Задача 1. Найти площадь квадрата $ABCD$ со стороной $AB = 3$ см.

Дано: $ABCD$ – квадрат; $AB = 3$ см.

Найти: S.

Решение: Найдем площадь квадрата $ABCD$:

$S = AB^2$;

$S = 3^2 = 9$ (см^2).

Ответ: $S = 9$ см^2.

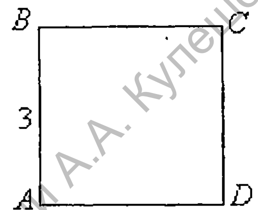


Рис. 1

Урок 2

Задача 2. Найдите площадь фигуры, изображенной рисунке 2, если $ABCD$ и $DEFG$ – квадраты со сторонами $AB = 5$ см, $DE = 4$ см.

Дано: $ABCD$ и $DEFG$ – квадраты; $AB = 5$ см; $DE = 4$ см.

Найти: S.

Решение: 1) Найдем площадь квадрата $ABCD$:

$S_1 = AB^2$.

2) Найдем площадь квадрата $DEFG$:

$S_2 = DE^2$.

3) Найдем площадь фигуры, изображенной на рисунке 2:

$S = S_1 + S_2 = AB^2 + DE^2$;

$S = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$ (см^2).

Ответ: $S = 41$ см^2.

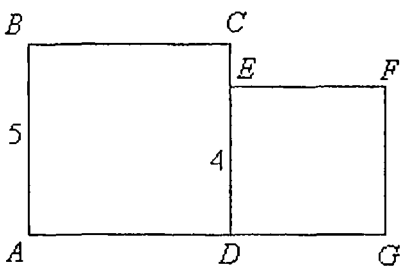


Рис. 2

Урок 3

Задача 3. Найдите площадь, закрашенной части фигуры (рис. 3), если $ABCD$ и $KLMN$ – квадраты со сторонами $AB = 6$ см и $KL = 2$ см.

Дано: $ABCD$ и $KLMN$ – квадраты; $AB = 6$ см; $KL = 2$ см.

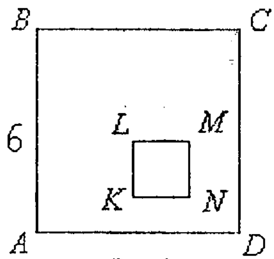


Рис. 3

Найти: S.

Решение: 1) Найдем площадь квадрата $ABCD$:

$S_1 = AB^2$.

2) Найдем площадь квадрата $KLMN$:

$S_2 = KL^2$.

3) Найдем площадь фигуры, изображенной на рисунке 3:

$S = S_1 - S_2 = AB^2 - KL^2$;

$S = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$ (см²).

Ответ: $S = 32$ см².

Урок 4

Задача 4. Доказать, что площадь квадрата $ABCD$ со стороной 5 см равна сумме площадей квадратов $KLMN$ и $PQRS$ со сторонами 3 см и 4 см соответственно.

Дано: $ABCD$, $KLMN$, $PQRS$ – квадраты; $AB = 5$см; $KL = 3$ см; $PQ = 4$ см.

Доказать: $S_{ABCD} = S_{PQRS} + S_{KLMN}$.

Доказательство: 1) Найдем площадь квадрата $ABCD$:

$S_{ABCD} = AB^2$;

$S_{ABCD} = 5^2 = 25$ (см²).

2) Найдем площадь квадрата $KLMN$:

$S_{KLMN} = KL^2$.

3) Найдем площадь квадрата $PQRS$:

$S_{PQRS} = PQ^2$.

4) Найдем сумму площадей квадратов $KLMN$ и $PQRS$:

$S_{KLMN} + S_{PQRS} = KL^2 + PQ^2$;

$S_{KLMN} + S_{PQRS} = = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ (см²).

5) Сравним S_{ABCD} и $S_{KLMN} + S_{PQRS}$:

Из пунктов 1 и 4 следует, что $S_{ABCD} = S_{KLMN} + S_{PQRS} = 25$ см², значит, $AB^2 = KL^2 + PQ^2$.

Урок 5

Задача 5. Найдите площадь заштрихованной части фигуры (рис. 4), если $ABCD$ – квадрат со стороной 5 см, $AEKM$ – квадрат со стороной 4 см. Сравнить полученную площадь с площадью квадрата $TXYZ$ со стороной 3 см.

Дано: $ABCD$, $AEKM$, $TXYZ$ – квадраты; $AB = 5$ см; $AE = 4$ см; $TX = 3$ см.

Н а й т и: S_1, сравнить S_1 и S_2.

Р е ш е н и е: 1) Найдем площадь квадрата $ABCD$:

$S_{ABCD} = AB^2$.

2) Найдем площадь квадрата $AEKM$:

$S_{AEKM} = AE^2$.

3) Найдем площадь S_1 :

$S_1 = S_{ABCD} - S_{AEKM}$;

$S_1 = AB^2 - AE^2$;

$S_1 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ (см^2).

4) Найдем площадь квадрата $TXYZ$:

$S_2 = TX^2$;

$S_2 = 3^2 = 9$ (см^2).

5) Сравним площади S_1 и S_2:

Из пунктов 3 и 4 следует, что $S_1 = S_2 = 9$ см^2, значит $TX^2 = AB^2 - AE^2$.

О т в е т: $S_1 = 9$ см^2; $S_1 = S_2$.

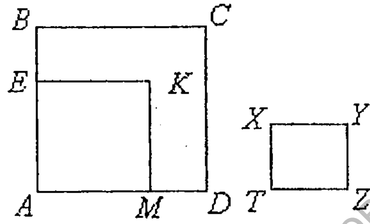


Рис. 4

Урок 6

З а д а ч а 6. На сторонах прямоугольного треугольника со сторонами 3м, 4 м, 5 м построили квадраты (рис. 5). Сравнить площадь квадрата, построенного на гипотенузе, с суммой площадей квадратов, построенных на катетах.

Д а н о: ΔABC; $\angle A = 90^0$; $ABFG$, $ACDE$, $CBIK$ – квадраты; $AB = 3$ м; $AC = 4$ м; $BC = 5$ м.

С р а в н и т ь: S_{CBIK} и $S_{ABFG} + S_{ACDE}$.

Р е ш е н и е: 1) Найдем площадь квадрата $CBIK$:

$S_{CBIK} = BC^2$;

$S_{CBIK} = 5^2 = 25$ (м^2).

2) Найдем площадь квадрата $ABFG$:

$S_{ABFG} = \mathrm{AB}^2$.

3) Найдем площадь квадрата $ACDE$:

$S_{ACDE} = \mathrm{AC}^2$.

4) Найдем сумму площадей квадратов $ABFG$ и $ACDE$:

$S_{ABFG} + S_{ACDE} = AB^2 + AC^2$;

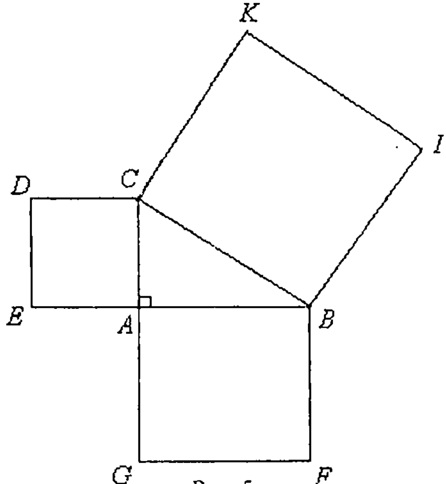


Рис. 5

$S_{ABFG} + S_{ACDE} = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ (м²).

5) Сравним S_{CBIK} и $S_{ABFG} + S_{ACDE}$:

Из пунктов 1 и 4 следует, что $S_{CBIK} = S_{ABFG} + S_{ACDE}$, значит $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Ответ: $S_{CBIK} = S_{ABFG} + S_{ACDE}$.

Результат решения этой задачи является иллюстрацией теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5 (его называют египетским). Рисунок 5 к этой задаче иногда называют "пифагоровы штаны", поскольку он напоминает плохо скроенные штаны. Сам Пифагор сформулировал теорему так: "*Площадь квадрата построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах*". Позже мы познакомимся и с другой формулировкой этой теоремы.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите площадь квадрата со стороной: а) 2 см; б) 1,52 м; в) $\frac{4}{7}$ дм; г) $2\frac{3}{10}$ мм; д) c.

2. Найдите площадь прямоугольника со сторонами: а) 2 см и 3 см; б) 1,5 см и 4 см; в) 3,2 м и 0,5 м; г) $\frac{2}{5}$ дм и 4 м; д) $2\frac{3}{8}$ мм и 1,5 мм; е) a и b.

3. Найдите площади фигур, изображенных на рисунке 6, если составляющие фигуры – квадраты.

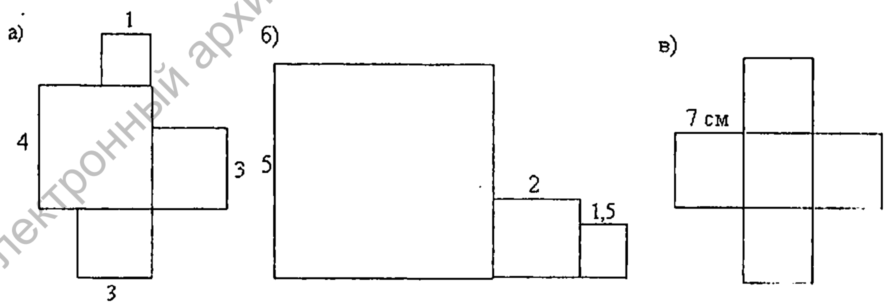


Рис. 6

4. Найдите площади заштрихованных частей фигур, изображенных на рисунке 7.

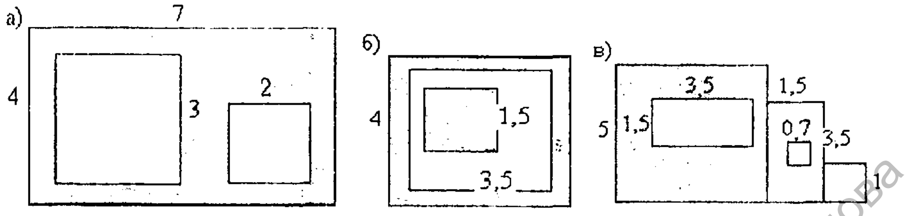


Рис. 7

5. На сторонах прямоугольного треугольника, равных 6 м, 8 м и 10 м, построены квадраты. Сравните площадь квадрата, построенного на гипотенузе с суммой площадей квадратов, построенных на катетах.

6. Найдите площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, если катеты этого треугольника равны 0,3 и 0,4.

7. Найдите катет прямоугольного треугольника и площадь квадрата, построенного на этом катете, если другой катет равен 5 м, а гипотенуза 13 м.

8. Существует ли прямоугольный треугольник со сторонами 6 дм, 8 дм, 10 дм?

Урок 7

Упражнение 1. Для прямоугольных треугольников, изображенных на рисунке 8, заполните таблицу.

Треугольник	Меньший катет	Квадрат меньшего катета	Больший катет	Квадрат большего катета	Гипотенуза	Квадрат гипотенузы	Сумма квадратов катетов
ABC	AB	AB^2	CB	CB^2	AC	AC^2	AB^2+CB^2
STH							
KLM							
KLN							
MLN							

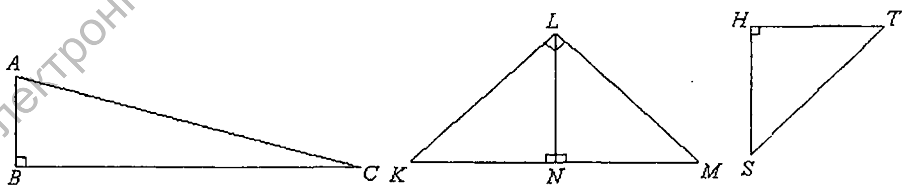


Рис. 8

Урок 8

Упражнение 2. Для треугольников, изображенных на рисунке 9, заполните таблицу, произведя соответствующие измерения.

Треугольник	Меньший катет	Квадрат меньшего катета	Больший катет	Квадрат большего катета	Гипотенуза	Квадрат гипотенузы	Сумма квадратов катетов	Вывод
ABC	$AB =$	$AB^2 =$	$CD =$	$CD^2 =$	$BC =$	$BC^2 =$	AB^2+CD^2...	
PQR								
EFG								
EFN								
GFN								
XYZ								
XYO								
XZO								
ABD								
CBD								

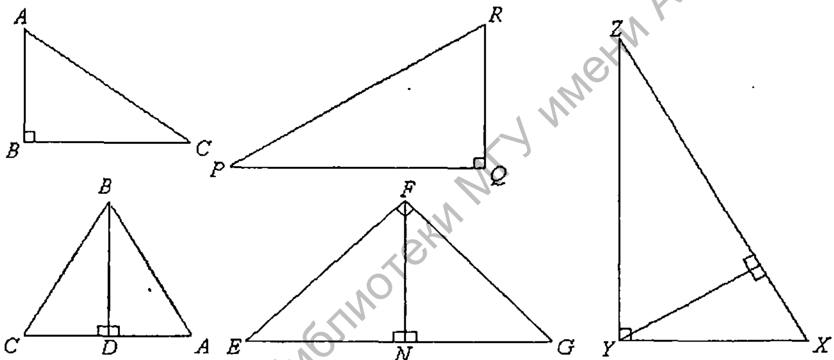


Рис. 9

1.2. ЗАДАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ

Урок 1

У п р а ж н е н и е 3. Выполните примеры по образцу: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$;

а) $8^2 + 6^2$;
б) $5^2 + 12^2$;
в) $2^2 + 2{,}1^2$;
г) $\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2$;
д) $\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2$;
е) $10^2 - 8^2$;
ж) $5^2 - 3^2$;
з) $1^2 - 0{,}8^2$;
и) $1{,}3^2 - 0{,}5^2$;
к) $1^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2$;
л) $\left(\frac{25}{27}\right)^2 - \left(\frac{24}{27}\right)^2$;

Если при сложении или вычитании квадратов двух чисел получается квадрат известного вам третьего числа, то три этих числа называют *пифагоровой тройкой чисел*.

Урок 2

Упражнение 4. Выполните примеры по образцу: $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$;

а) $7^2 + 5^2$;

б) $4{,}2^2 + 1{,}3^2$;

в) $0{,}5^2 + 2{,}5^2$;

г) $\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2$;

д) $6^2 - 3^2$;

е) $4^2 - 1^2$;

ж) $4{,}8^2 - 0{,}7^2$;

з) $3{,}4^2 - 2^2$;

и) $\left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{2}{8}\right)^2$;

к) $1^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^2$;

§ 2. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Основной материал «Теорема Пифагора», на подготовительном уровне изучается квадратный корень.

При решении задач вы уже встречались с одной формулировкой теорема Пифагора для прямоугольного треугольника (задача про «пифагоровы штаны»). Далее вам предстоит разобраться с другой формулировкой этой важной теоремы геометрии, которая часто используется при решении задач.

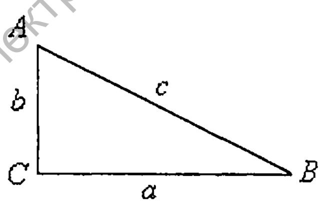


Рис. 1

Теорема Пифагора. **В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**

Дано: $\Delta\ ABC$ – прямоугольный; $\angle\ C = 90°$.

Доказать: $AB^2 = CB^2 + AC^2$.

Доказательство:

1) Обозначим $AB = c$; $CB = a$; $AC = b$.

Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$. Построим два квадрата со сторонами $a + b$ и разобьем его на части как показано на рисунке 2.

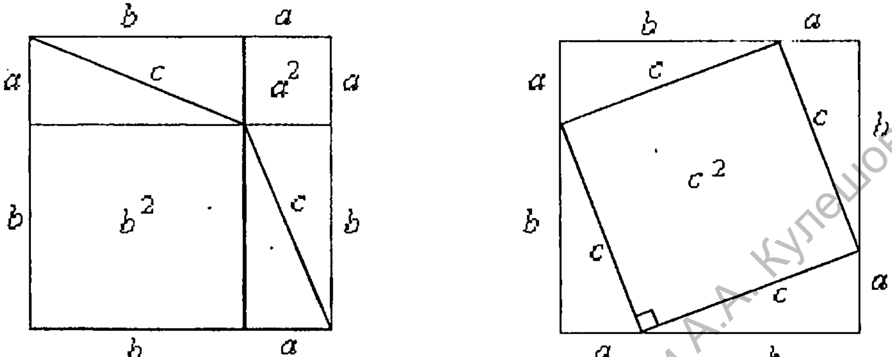


Рис. 2

2) Рассмотрим первый квадрат. Он состоит из двух квадратов со сторонами a и b, площади которых соответственно равны a^2 и b^2 и двух одинаковых прямоугольников со сторонами a и b. Проведем в этих прямоугольниках по диагонали и получим четыре равных прямоугольных треугольника со сторонами a, b, c. Площадь этих четырех треугольников равна $ab + ab = 2ab$. Тогда площадь первого квадрата равна $a^2 + b^2 + 2ab$.

3) Рассмотрим второй квадрат. В нем можно выделить также четыре равных прямоугольных треугольника со сторонами a, b, c, значит их площадь также равна $2ab$. Фигура, получившаяся в центре – квадрат со стороной c (доказать самостоятельно), площадь которого равна c^2. Площадь второго квадрата равна $c^2 + 2ab$.

4) Поскольку исходные квадраты равны, то и их площади равны, а значит:

$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab;$

$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab - 2ab;$

$a^2 + b^2 = c^2.$

Так как a, b, c – длины сторон CB, AC, AB, то равенство можно записать в виде: $AB^2 = CB^2 + AC^2$. Что нам и требовалось доказать.

Рассмотрим применение теоремы Пифагора при решении задач.

З а д а ч а 1. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны 6 см и 8 см.

Д а н о: ΔABC – прямоугольный; $\angle B = 90°$; $AB = 6$ см; $BC = 8$ см

Н а й т и: AC.

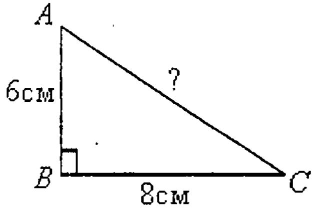


Рис. 3

Р е ш е н и е: Поскольку треугольник прямоугольный, то для него можно записать теорему Пифагора:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$;

$AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$;

$AC^2 = 100$.

Как известно $100 = 10^2$ или $100 = (-10)^2$, но длина не выражается отрицательным числом, значит $AC = 10$ см.

О т в е т: $AC = 10$ см.

Далее при решении задач, используя теорему Пифагора, мы будем брать только положительное значение величины без оговорок.

З а д а ч а 2. В прямоугольном треугольнике катеты равны 2 см и 3 см. Найдите гипотенузу этого треугольника.

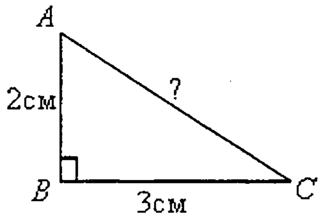


Рис. 4

Д а н о: ΔABC – прямоугольный; $B = 90°$; $AB = 2$ см; $BC = 3$ см.

Н а й т и: AC.

Р е ш е н и е: Для нахождении гипотенузы прямоугольного треугольника воспользуемся теоремой Пифагора:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$;

$AC^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$;

$AC^2 = 13$.

Теперь нужно найти число, квадрат которого равен 13. Однако ни одно известное нам число при умножении само на себя не дает 13. Если мы измерим линейкой гипотенузу треугольника со сторонами 2 см и 3 см, мы получим приблизительно 3,6 см, то есть гипотенуза имеет определенную длину, а значит должно существовать число квадрат которого равен 13. Это число обозначают с помощью знака $\sqrt{\ }$, который читают «корень квадратный из». То есть $(\sqrt{13})^2 = 13$.

Значит $AC = \sqrt{13}$ (см).

О т в е т: $AC = \sqrt{13}$ см.

С помощью калькулятора можно найти значение корня квадратного из 13: $\sqrt{13} \approx 3{,}605551\ldots$, однако это значение приближенное и при решении задач мы будем использовать квадратный корень.

З а д а ч а 3. В прямоугольном треугольнике катеты равны $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$. Найдите гипотенузу этого треугольника.

Д а н о: Δ ABC – прямоугольный; $\angle B = 90°$; $AB = \frac{a}{c}$; $BC = \frac{b}{c}$.

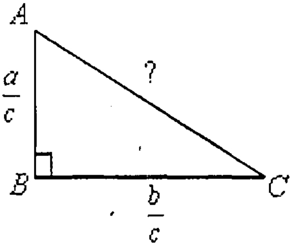


Рис. 5

Н а й т и: AC.

Р е ш е н и е: Для нахождении гипотенузы прямоугольного треугольника воспользуемся теоремой Пифагора: $AC^2 = AB^2 + BC^2$;

$$AC^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2};$$

$$AC = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}.$$

О т в е т: $AC = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$.

З а д а ч а 4. Определите катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $\sqrt{5}$ м, второй катет 1 м.

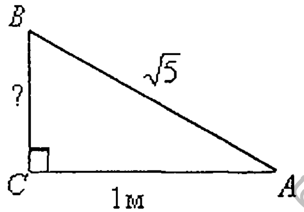


Рис. 6

Д а н о: ΔABC – прямоугольный; $\angle C = 90°$; $AB = \sqrt{5}$ м; $AC = 1$ м.

Н а й т и: BC.

Р е ш е н и е: Для нахождении гипотенузы прямоугольного треугольника воспользуемся теоремой Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$BC^2 = AB^2 - AC^2$;

$BC^2 = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4$;

$BC = 2$ (м).

О т в е т: $BC = 2$ м.

В рассмотренной задаче показан способ нахождения катета прямоугольного треугольника, если известны гипотенуза и другой катет: *Квадрат катета прямоугольного треугольника равен разности квадратов гипотенузы и другого катета.*

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) $a = 6$ см, $b = 8$ см; б) $a = 5$ м, $b = 12$ м ; в) $a = 0{,}7$ дм, $b = 2{,}4$ дм; г) $a = 5$ см, $b = 1$ см; д) $a = 0{,}5$ м, $b = 1{,}2$ м; е) $a = 7$ дм, $b = 2$ дм; ж) a и b.

2. Найдите катет прямоугольного треугольника, если гипотенуза и другой катет равны: а) $a = 25$ см, $b = 7$ см; б) $a = 0{,}5$ дм, $b = 0{,}4$ дм;

в) $a = 8$ см, $b = 10$ см; г) $a = 1$ м, $b = 0,5$ м; д) $a = 12$ дм, $b = 9$ дм; е) $a = 0,7$ м, $b = 0,2$ м; ж) a и b.

3. Две стороны прямоугольного треугольника равны 0,3 м и 0,4 м. Найдите третью сторону. (Два случая).

4. Найдите гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника, если катет равен: а) 2 см; б) 0,6 м; в) 1 дм; г) a.

5. Найдите катет равнобедренного прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна: а) $\sqrt{128}$ см; б) $\sqrt{2}$ м; в) $\sqrt{0,5}$ дм; г) 12 м; д) 0,36 дм; е) a.

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а один из катетов 5 см. Найдите площадь этого треугольника.

7. Найдите площадь прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза 313 дм, а один из катетов 312 дм.

8. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника по гипотенузе, равной $\sqrt{32}$ см.

9. Найдите площадь прямоугольного треугольника с катетом 2,5 см и гипотенузой $\dfrac{\sqrt{281}}{2}$ см.

10. Вокруг прямоугольного треугольника с катетами 8 и 6 описана окружность. Найдите ее радиус.

11. Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 10 см, а один из катетов равен 8 см. Найдите другой катет.

12. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6. Другой катет равен 8. Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.

§3. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Основной материал параграфа – "Теорема Пифагора", на подготовительном уровне рассматриваются квадратные уравнения и уравнения второй степени, сводящиеся к линейным уравнениям с одной переменной.

Часто геометрические задачи решаются с помощью уравнений. При этом может получиться уравнение, которое содержит переменную во второй степени. Такое уравнение называется квадратным. Рассмотрим квадратное уравнение вида $ax^2 = b$ и способ его решения.

Задача 1. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если их длины относятся как 3 : 2, а гипотенуза равна $\sqrt{52}$.

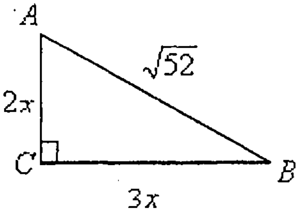


Рис. 1

Дано: Δ ABC – прямоугольный; $\angle$ C = 90°; $AB = \sqrt{52}$ см; $BC : AC = 3 : 2$.

Найти: AC; BC.

Решение: Поскольку у нас задано отношение катетов, то можно ввести коэффициент пропорциональности.

1) Пусть x см – коэффициент пропорциональности.

Тогда $BC = 3x$ см; $AC = 2x$ см.

Для данного прямоугольного треугольника запишем теорему Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Учитывая данные задачи получаем:

$$(2x)^2 + (3x)^2 = (\sqrt{52})^2;$$

возведем в квадрат каждое слагаемое:

$$4x^2 + 9x^2 = 52;$$
$$13x^2 = 52;$$
$$x^2 = 52 : 13;$$
$$x^2 = 4;$$

квадрат 2 и (-2) есть 4, однако по смыслу задачи x не может быть отрицательным, значит:

$$x = 2.$$

2) Найдем катеты прямоугольного треугольника:

$$BC = 3 \cdot 2 = 6 \text{ (см)}.$$
$$AC = 2 \cdot 2 = 4 \text{ (см)}.$$

Ответ: $AC = 4$ см; $BC = 6$ см.

Рассмотрим задачи, при решении которых используются формулы сокращенного умножения, а полученные уравнения после преобразований сводятся к линейным.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике один катет равен 6 м, а другой катет на 2 м меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу и катет.

Дано: ΔABC – прямоугольный; $\angle B = 90°$; $AB = 6$ м; BC на 2 м меньше AC.

Найти: AC, BC.

Решение: 1) Пусть x м – BC.

Тогда $AC = (x + 2)$ м.

Запишем теорему Пифагора для данного треугольника: $AC^2 = AB^2 + BC^2$;

$$(x + 2)^2 = 6^2 + x^2;$$

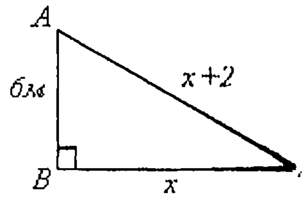


Рис. 2

Применяя формулу квадрата суммы, получаем:

$$x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = 6^2 + x^2;$$
$$x^2 + 4x + 4 = 36 + x^2;$$
$$x^2 + 4x - x^2 = 36 - 4;$$
$$4x = 32;$$
$$x = 32 : 4;$$
$$x = 8.$$

Т.е. $BC = 8$ м.

2) Найдем AC:

$AC = 8 + 2 = 10$ (м).

Ответ: $BC = 8$ м; $AC = 10$ м.

Задача 3. В треугольнике ABC к стороне BC, равной 4 м, проведены медиана AM и высота AH. Найдите высоту AH, если $AM = 5$ м, а $AB = 6$ м.

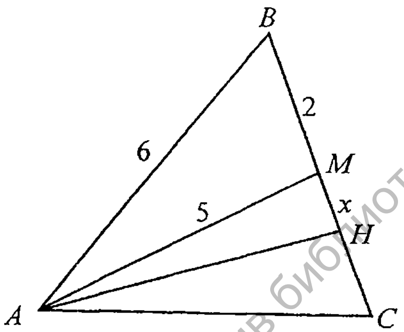


Рис. 3

Дано: ΔABC; AM – медиана; AH – высота; $AB = 6$ м; $BC = 4$ м; $AM = 5$ м.

Найти: AH.

Решение: 1) Поскольку AM – медиана, то $BM = MC$;

$BM = 4 : 2 = 2$ (м).

2) Рассмотрим $\Delta\ AMH$.

Поскольку AH – высота, то $\angle$ MHA = 90°, значит ΔAMH – прямоугольный. Запишем для него теорему Пифагора:

$$AM^2 = MH^2 + AH^2;$$
$$AH^2 = AM^2 - MH^2.$$

Пусть $MH = x$ м тогда:

$$AH^2 = 5^2 - x^2.$$

3) Рассмотрим $\Delta\ ABH$.

Так как AH – высота, то $\angle BHA = 90°$, а значит $\Delta\ ABH$ – прямоугольный. Запишем для него теорему Пифагора:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2;$$
$$AH^2 = AB^2 - BH^2.$$

Поскольку $MH = x$ м ,то $BH = (2 + x)$ м, тогда:

$$AH^2 = 6^2 - (2 + x)^2.$$

4) Итак,

из пункта 2 имеем: $AH^2 = 5^2 - x^2$;
из пункта 3 имеем: $AH^2 = 6^2 - (2 + x)^2$.

Приравняв правые части этих равенств, получим:

$$5^2 - x^2 = 6^2 - (2 + x)^2;$$
$$25 - x^2 = 36 - (2^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + x^2);$$
$$25 - x^2 = 36 - (4 + 4x + x^2);$$
$$25 - x^2 = 36 - 4 - 4x - x^2;$$
$$4x + x^2 - x^2 = 36 - 4 - 25;$$
$$4x = 7;$$
$$x = 7 : 4;$$
$$x = 1{,}75;$$

значит $MH = 1{,}75$ м.

5) Найдем AH либо из пункта 2, либо из пункта 3:

$$AH^2 = AM^2 - MH^2;$$
$$AH^2 = 5^2 - 1{,}75^2 = 2^5 - 3{,}0625 = 21{,}9375;$$
$$AH = \sqrt{21{,}9375}\ (\text{м}).$$

С помощью калькулятора найдем приближенное значение AH и округлим его до десятых:

$$AH \approx 4{,}7\ (\text{м}).$$

Ответ: $AH \approx 4{,}7$ м.

Остальные виды квадратных уравнений и способы их решений будут рассмотрены позднее в алгебре.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, а гипотенуза больше другого катета на 8 см. Найдите гипотенузу.

2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 26 см, а его катеты относятся как 5 : 12. Найдите больший катет треугольника.

3. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты относятся как 3 : 4, а гипотенуза равна 25.

4. Из вершины прямого угла A прямоугольного треугольника ABC к гипотенузе проведены медиана AM и высота AK. Найдите длину отрезка MK, если катеты равны 6 см и $\sqrt{45}$ см.

5. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 1. Найдите высоту треугольника, опущенную из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 40 дм.

6. В прямоугольный треугольник с катетами 3 м и 5 м вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

7. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат таким образом, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах. Сторона квадрата равна 5 см. Найдите длину гипотенузы.

8. В равнобедренный прямоугольник вписан прямоугольник таким образом, что он имеет с треугольником общий прямой угол. Периметр этого прямоугольника равен 25 мм. Найдите катет треугольника.

9. Из одной точки проведены перпендикуляр и две наклонные длиной 10 см и 17 см к данной прямой. Проекции наклонных относятся как 2 : 5. Найдите длину перпендикуляра.

10. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 м, а один из катетов равен 10 м. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.

11. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$. Найдите высоты треугольника, если его измерения равны: а) $AB = \sqrt{26}$, $AC = 8$; б) $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$.

12. Найдите медианы прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 3 см и 5 см; б) 6 м и 10 м; в) $\sqrt{5}$ мм и $\sqrt{4}$ мм.

13. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если основание равно a, а проведенная к нему высота - b: а) $a = 6$ м; $b = 4$ м; б) $a = 2$, $b = 5$; в) $a = 7$ дм; $b = 1{,}5$ дм; г) $a = 4$, $b = \sqrt{5}$; д) a и b.

§4. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ, ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ И ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Основной материал параграфа – "Линейная функция и прямая пропорциональность", на подготовительном уровне изучаются линейные уравнения с двумя переменными.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Мальчик купил шоколадку за 1 тыс. руб. и конфет по 50 руб. за штуку. Стоимость покупки будет зависеть от количества конфет. Обозначим количество конфет буквой x, а стоимость покупки – y. Тогда зависимость стоимости покупки от количества конфет можно выразить формулой:

$$y = 50x + 1000,$$

где x – натуральное число.

Пример 2. Токарь выточил 30 деталей. Каждый следующий час он вытачивал по 15 деталей. Тогда за t ч токарь выточит $15t$ деталь.

Если обозначить буквой y общее количество деталей, то зависимость этого количества от времени можно выразить формулой:

$$y = 15t + 30, \qquad \text{где } t \geq 0.$$

В рассмотренных примерах мы встретились с функциями одного вида, которые можно задать с помощью формул следующим образом $y = kx + b$, где x – независимая переменная, k и b – некоторые числа. Такие функции называются линейными.

Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x – независимая переменная, k и b – некоторые числа.

З а д а ч а 1. Построить график линейной функции $y = 2x + 1$.

Р е ш е н и е: Будем предполагать, что область определения функции состоит из всех чисел. Составим таблицу значений x и y:

x	–2	–1,5	–1	0	1	1,5
y	–3	–2	–1	1	3	4

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице. Все отмеченные точки лежат на одной прямой. Эта прямая является графиком линейной функции $y = 2x + 1$ (рис. 1).

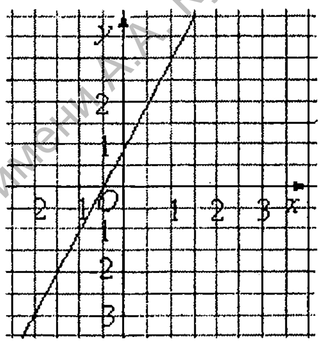


Рис. 1

Графиком линейной функции является прямая. Для построения графика линейной функции достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки в координатной плоскости и провести через них прямую. Зачастую в качестве одной из точек удобно взять точку с абсциссой 0.

З а д а ч а 2. Построить график функции $y = -1,5x + 1,5$.

Р е ш е н и е: Найдем координаты двух точек графика.

x	0	1
y	1,5	0

Отметим точки T (0; 1,5) и H (1; 0) в системе координат и проведем через них

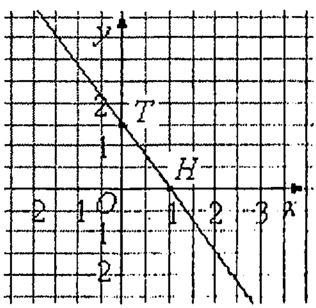


Рис. 2

прямую (рис. 2). Прямая TH – график функции $y = -1{,}5x + 1{,}5$.

При $k = 0$ линейная функция $y = kx + b$ примет вид $y = 0x + b$, т.е. $y = b$. Линейная функция, заданная формулой $y = b$, принимает одно и тоже значение при любом x.

Задача 3. Построить график функции $y = 1{,}5$.

Решение: Отметим две точки принадлежащие графику данной функции:

x	0	2
y	1,5	1,5

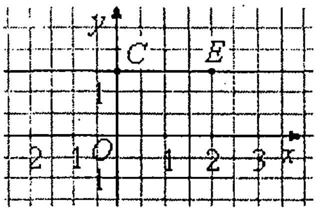


Рис. 3

Ордината точек одинакова и равна 1,5. Отметим точки E (2; 1,5) и C (0; 1,5) в системе координат и проведем через эти точки прямую. Прямая CE – график функции $y = 1{,}5$ (рис. 3).

Поскольку область определения линейной функции – все числа, то на рисунке мы показываем только часть прямой.

Пример 3. Велосипедист выехал из города А со скоростью 15 км/ч. Если время обозначить через t ч, а расстояние через s, тогда зависимость расстояния от времени будет выражаться формулой $s = 15t$.

Зависимость расстояния от времени является примером функции, которая задается формулой вида $y = kx$, где x – независимая переменная, k – число, отличное от нуля. Такую функцию называют прямой пропорциональностью.

Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x – независимая переменная, k – не равное нулю число.

Поскольку формула, задающая прямую пропорциональность $y = kx$, получена из формулы, задающей линейную функцию $y = kx + b$, при $b = 0$, то прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции. Значит графиком прямой пропорциональности тоже является прямая. Эта прямая проходит через начало координат, поскольку при $x = 0$ значение у тоже равно 0.

Чтобы построить график прямой пропорциональности нужно отметить какую-либо точку графика отличную от нуля и провести прямую через эту точку и начало координат.

Задача 4. Построить график функции $y = 1{,}5x$.

Решение: Поскольку данная функция является прямой пропорциональностью, то достаточно найти координаты одной точки:

x	2
y	3

Отмечаем точку P (2; 3) на координатной плоскости и проводим прямую через эту точку и начало координат. PO – график функции $y = 1{,}5x$ (рис. 4).

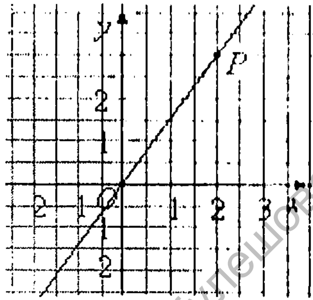


Рис. 4

З а д а ч а 5. Построить график функции $y = -2x$.

Р е ш е н и е: Данная функция является прямой пропорциональностью. Найдем координаты точки, принадлежащей графику этой функции:

x	-1
y	2

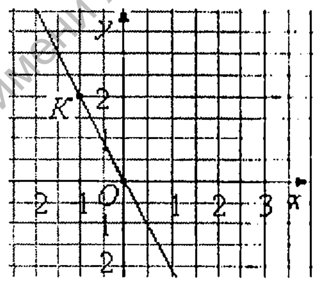


Рис. 5

Отметим точку K (-1; 2) на координатной прямой и проведем прямую через эту точку и начало координат. Прямая KO – график функции $y = -2x$ (рис. 5).

Сравним расположение графиков функций задач 4 и 5. График функции $y = 1{,}5x$ располагается в первой и третьей координатных четвертях, а график функции $y = -2x$ – во второй и четвертой координатных четвертях. Это связано с коэффициентом k.

Из формулы $y = kx$ находим, что если $x = 1$, то $y = k$. Значит график функции $y = kx$ проходит через точку (1; k). Если k>0, то эта точка располагается в первой четверти, при $k<0$ – в четвертой. Значит при $k>0$ график прямой пропорциональности расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при $k<0$ – во второй и четвертой.

П р и м е р 4. Одно число больше другого на 2. Если первое число обозначить через x, а во втором – через y, то соотношение между ними можно записать в виде равенства $x - y = 2$, содержащего две переменные. Такие равенства называют уравнениями с двумя переменными или уравне-ниями с двумя неизвестными.

Уравнения $2y + 5x = 0$, $4x - y = -5$, $xy = 6$, $x^3 + y^3 = 10$ – также уравнения с двумя неизвестными. Причем первое и второе уравнения имеют вид $ax + by = c$, где a, b, c – числа. Такие уравнения называют линейными уравнениями с двумя переменными.

Линейным уравнением с двумя переменными называют уравне-ние вида $ax + by = c$, где x и y – переменные, a, b и c – некоторые числа.

Уравнение $x - y = 2$ при $x = 6$ и $y = 4$ обращается в верное числовое равенство $6 - 4 = 2$, поэтому пару значений переменных $x = 6$, $y = 4$ называют решением этого уравнения.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Можно проверить, что решением уравнения являются также пары чисел $x = 10$, $y = 8$; $x = -52$, $y = 54$. Пары чисел, являющихся решением уравнения с двумя переменными можно записать иначе: $(10; 8)$; $(-52; 54)$, где на первом месте стоит значение переменной x, а на втором - y.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения называют – **равносильными.** Уравнения с двумя переменными, не имеющие решения также являются равносильными.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойства, что и уравнения с одной переменной:

1. Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и тоже отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

З а д а ч а 6. Решить уравнения с двумя переменными $6x + 2y = 4$.

Р е ш е н и е: Выразим одну переменную через другую, например y через x. Для этого перенесем слагаемое $6x$ в правую часть, изменив его знак:

$$2y = -6x + 4.$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$y = -3x + 2.$$

Полученное уравнение, которое равносильно исходному, задает линейную функцию. Графиком линейной функции является прямая. Координаты всех точек этой прямой обращают данное уравнение с двумя переменными в верное числовое равенство. Решением данного уравнения будут пары координат точек этой прямой. Поскольку прямая состоит из бесконечного множества точек, то, наше уравнение имеет бесконечное множество решений.

Линейные уравнения с двумя переменными, в которых коэффициенты при переменных одновременно не равны нулю, можно привести к виду линейной функции. Графиком уравнения с двумя переменными в этом случае является прямая, и уравнение имеет бесконечное множество решений.

Чтобы построить график линейного уравнения с двумя переменными, коэффициенты при переменных которого одновременно не равны нулю, нужно привести уравнение к виду линейной функции и построить ее график.

Линейному уравнению с двумя переменными 6х + 2у = 4 соответст-вует линейная функция у = -3х + 2. Для ее построения найдем координаты двух точек, принадлежащих графику данной функции, и через них проведем прямую:

x	0	1
y	2	–1

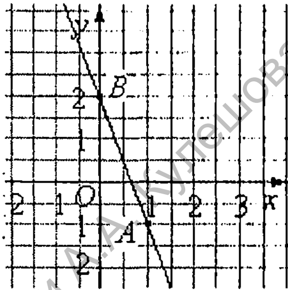


Рис. 6

Прямая AB – график уравнения $6x + 2y = 4$.

З а д а ч а 7. Построим график уравнения $3y = -6$.

Р е ш е н и е: Приведем уравнение к виду линейной функции, для этого разделим обе части уравнения на 3, получим: $y = -2$.

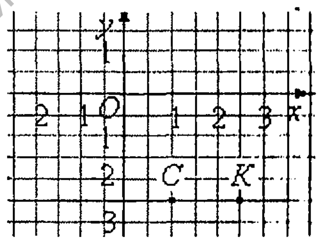


Рис. 7

Графиком этой функции является прямая CK параллельная оси Ox и проходящая через точку с ординатой -2 (рис. 7).

С л е д с т в и е: *Если в линейном уравнении с двумя неизвестными коэффициент при x равен нулю, то такое уравнение можно привести к линейной функции, график которой параллелен оси Ox.*

З а д а ч а 8. Построить график уравнения $3x = 7{,}5$.

Р е ш е н и е: Это уравнение можно записать в виде $3x + 0y = 7{,}5$. Его решением служат пары чисел, в которых $x = 2{,}5$, а y – произвольное число.

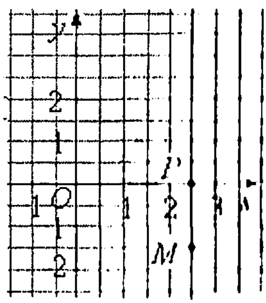


Рис. 8

Графиком уравнения является прямая РМ, параллельная оси Oy и проходящая через точку с абсциссой 2,5 (рис. 8).

С л е д с т в и е: *Если в линейном уравнении с двумя переменными коэффициент при y равен нулю, то графиком такого уравнения является прямая, параллельная оси Oy.*

Линейное уравнение с двумя переменными $ax + by = c$ при равенстве нулю обоих коэффициентов примет вид $0x + 0y = c$. Если $c = 0$, то любая пара чисел является решением этого уравнения, а его графиком является вся координатная плоскость. Если же $c \neq 0$, то уравнение не имеет решений и график не содержит ни одной точки.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. За каждую минуту человек проходит 80 м. На каком расстоянии от дома человек будет через 20 минут, если сейчас он находится в 50 м от дома и направляется в противоположную от дома сторону? Задайте формулой зависимость расстояния до дома от времени. Является ли эта зависимость линейной?

2. Девочка купила 5 тетрадей по 100 руб. и несколько ручек по 200 руб. Задайте формулой зависимость стоимости покупки от количества ручек. Является ли эта зависимость линейной?

3. Температура воздуха 0°С. Каждый час она поднимается на 2°С. Задайте формулой зависимость температуры воздуха от времени. Является ли эта зависимость линейной?

4. Является ли линейной функция, заданная формулой:

а) $y = 3x + 5$;
д) $y = \frac{5}{x} + 2$;

б) $y = \frac{6x^2 + 6}{3}$;
е) $y = 1{,}5\,x$;

в) $y = x^2 - 5$;
ж) $y = \frac{5x - 4}{2}$.

г) $y = \frac{x}{5} - 3$;

5. При каких x функция $y = -2x + 2$ принимает значения:
а) 0; б) -4; в) 3; г) 10?

6. При каком значении ординаты абсцисса функции $y = -1{,}5x - 6$ равна:
а) 6; в) -1; д) $-\frac{4}{3}$.
б) 0; г) 1;

7. При каких значениях x функция $y = 3x - 6$ будет:
а) положительной;
б) отрицательной;
в) равной нулю?

8. Построить график линейной функции, заданной формулой:

а) $y = x - 1$;

б) $y = -2x + 3$;

в) $y = 3{,}5x - 4{,}5$;

г) $y = -1{,}2x - 5$;

д) $y = \frac{3}{7}x + 2$;

е) $y = -1\frac{4}{5}x - \frac{5}{6}$.

9. Постройте график линейной функции $y = 3x - 5$. С помощью графика выясните:

а) какое значение y соответствует $x = 4$; -5; 3,5;

б) какому значению x соответствует $y = 10$; 0; -5; 2,5.

10. Принадлежат ли точки A (1; 1), B (2; 0); C (0; 1) и M(4; -1) графику функции $y = -0{,}5x + 1$?

11. Проходит ли график функции $y = 4x - 3$ через точку K (2; 5)?

12. В каких точках пересекает ось абсцисс и ось ординат график функции:

а) $y = x - 1$;

б) $y = -2x + 3$;

в) $y = 3{,}5x - 4{,}5$;

г) $y = -1{,}2x - 5$;

д) $y = \frac{3}{7}x + 2$;

е) $y = -1\frac{4}{5}x - \frac{5}{6}$?

13. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = -5$;

б) $y = 2$;

в) $y = 0$;

г) $y = 3\frac{2}{3}$;

д) $y = 4{,}5$;

е) $y = -\frac{15}{2}$;

ж) $y = -3{,}25$.

14. Является ли зависимость величин прямой пропорциональностью:

а) количество товара и его стоимость;

б) скорость и длина пройденного пути при равномерном движении;

в) длина пути и время движения при постоянной скорости;

г) цена и стоимость товара;

д) длина трубы и масса;

е) скорость и время при равномерном движении на участке пути,

ж) сторона и периметр квадрата?

15. Является ли прямой пропорциональностью функция, заданная формулой:

а) $y = -6x$;

б) $y = 3{,}5x$;

в) $y = x + 1$;

г) $y = \frac{3}{5}x$;

д) $y = 4{,}9x^2$;

е) $y = \frac{x}{6}$;

ж) $y = \frac{-5}{x}$?

16. Прямая пропорциональность задана формулой $y = -2{,}5x$. Найдите:

а) значение y, соответствующее x: -5; 0; 1; -1; 4; $\frac{16}{25}$; $-\frac{4}{5}$;

б) значение x, которому соответствует y: 1; -5; 0; 6; -2,5; $\frac{9}{16}$.

17. Без построения определите какие из точек A (0; 0), B (1; 2), C (10; 4) и D (5; 2) принадлежат графику функции $y = -2x$.

18. Постройте график прямой пропорциональности:

а) $y = 0{,}5x$; г) $y = \frac{3}{4}x$;

б) $y = -\frac{2}{3}x$; д) $y = 2x$;

в) $y = -0{,}5x$; е) $y = -3x$.

19. Постройте график функции $y = -2x$. Найдите:

а) какие значения принимает функция, при следующих значениях x: -2; -0,5; 1; 2,5; 0;

б) какие значения принимает аргумент x, если значение функции равно: 0; 2; -6; 1,5; -0,2.

20. Дана функция $y = -0{,}2x$. При каких значениях x функция принимает:

а) положительные значения;

б) отрицательные значения.

21. Постройте график функции $y = kx$, если:

а) $k = 1$; б) $k = -1$.

22. В каких координатных четвертях расположены графики функций:

а) $y = 0{,}5x$; в) $y = -0{,}5x$; д) $y = 2x$;

б) $y = -\frac{2}{3}x$; г) $y = \frac{3}{4}$; е) $y = -3x$?

23. Покажите схематически, как расположен график функции, заданной формулой:

а) $y = 0{,}5x$; в) $y = -5x$; д) $y = kx$, если $k>0$;

б) $y = -3{,}8x$; г) $y = 58x$; е) $y = kx$, если $k<0$.

24. Значение функции $y = kx$ равно 2 при $x = 3$. Найдите коэффициент пропорциональности.

25. График функции $y = kx$ проходит через точку M (2; 1). Найдите коэффициент пропорциональности.

26. Для каждого из графиков на рисунке 9 определите знак коэффициента пропорциональности.

27. На рисунке 10 построены графики функций $y = kx$; $y = ax$ и $y = cx$. Найдите коэффициенты пропорциональности k, a, c.

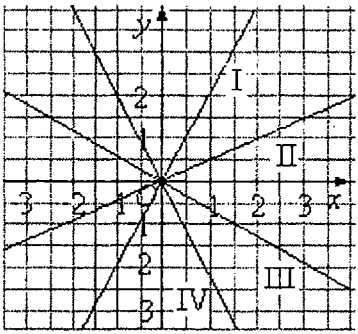


Рис. 9

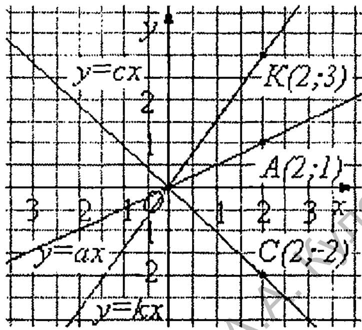


Рис. 10

27. Является ли линейным уравнение с двумя переменными. Построить графики линейных функций:

а) $2x - y = 5$;

б) $x^3 - 5xy = 25$;

в) $x - y^2 = 1$?

28. В двух классах 60 учеников. Сколько учеников в каждом классе? Приведите несколько решений.

29. Периметр прямоугольника равен 20 см. Найдите длину и ширину прямоугольника. Приведите несколько решений.

30. Найдите по два решения для следующих уравнений:

а) $x + 3y = 10$;

б) $x - y = 12$;

в) $5x - 4y = 0$.

31. Являются ли значения $x = 1$ и $y = -2$ решением уравнения:

а) $2x - 3y = 7$;

б) $4x - y = 5$;

в) $-5x - 2{,}5y = 0$?

32. Дано уравнение $5x - 2y = 6$. Укажите какая пара чисел, из перечисленных ниже, является решением данного уравнения:

а) $x = 3, y = 4$;	г) $x = 5, y = 2$;
б) $x = 2, y = 2$;	д) $x = 0, y = -3$;
в) $x = -4, y = -13$;	е) $x = 1, y = 0$.

33. Дано уравнение $x - y = 1$. Найдите несколько значений x и y, удовлетворяющих этому уравнению, и занесите их в таблицу. Принимая эти пары значений за координаты точек, постройте эти точки на координатной плоскости и соедините их прямой.

34. Составьте какое-нибудь линейное уравнение с двумя переменными, решением которого служит пара чисел:

а) $x = 6$, $y = -3$;

б) $x = 0$, $y = -3$;

в) $x = 1$, $y = 0$.

35. Составьте какое-нибудь уравнение с двумя неизвестными, чтобы график его проходил через точки:

а) O (0; 0); б) A (-3; -3); в) B (1; 4).

36. Напишите уравнение прямой, если она проходит через точки:

а) A (-2; 0) и B (0; 6); в) K (-3; -3) и H (0; 1);

б) A (4; 0) и B (0; 4); г) M (-1; 2) и P (2; -3).

37. Какие пары чисел (2; 0), (3; 1), (-3; -5), (1; 3) являются решением уравнения:

а) $x - y = 2$;

б) $x^2 + y = 4$;

в) $xy = 3$;

г) $x^2 + 2y^2 = 4$?

38. Сколько решений имеет уравнение:

а) $x + y = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 0$;

в) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$;

г) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$?

39. Известно, что $x = 3$ и $y = -1$ являются решением уравнения $3x - by = 13$. Найдите значение коэффициента b.

40. Найдите значение коэффициента а в уравнении $5x + ay = 10$, если известно, что пара $x = -1$, $y = 3$ является решением этого уравнения. Принадлежат ли графику уравнения $2x - 3y = -6$ точки A (3; 2), B (3; 5), C (-3; 0), K (6; 6)?

41. Проходят ли через начало координат графики уравнений:

а) $xy = 0$; г) $x - y^2 = 0$;

б) $3x - 4y = 0$; д) $x^2 + y^2 = 0$;

в) $x(y - 2) = 0$; е) $4x^2 - 2y = 1$?

42. Дано уравнение $3x + y = 24$. Найдите такую пару чисел $(x; y)$, чтобы они были решением данного уравнения.

43. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:

а) $3x - 2y = 0$;

б) $2x - 4y = 8$;

в) $x^2 - 4x = 0$.

44. Найдите три любых решения уравнения $5x - 3y = 15$.

45. Известно, что пара (-3; y) является решением уравнения $4x + 6y = 18$. Найдите значение y.

46. Из линейного уравнения $3x - 6y = 18$ выразите:

а) y через x; б) x через y.

47. Из уравнения $5u - 2v = 10$ выразите:

а) переменную u через v; б) переменную v через u.

48. Из данного уравнения выразите переменную y через x; используя полученную формулу, найдите три каких-либо решения этого уравнения:

а) $2x - 3y = 7$; в) $1{,}5x + 2y = 1$.

б) $-5x - 2{,}5y = 0$;

49. Из данного уравнения выразите переменную x через y, используя полученную формулу, найдите три каких-либо решения:

а) $2x - 3y = 7$; в) $-5x - 2{,}5y = 0$;

б) $4x - y = 5$; г) $1{,}5x + 2y = 1$.

§ 5. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Основной материал параграфа "Линейная функция и линейное уравнение с двумя переменными", а "Системы линейных уравнений с двумя переменными" рассматриваются на подготовительном уровне (решение систем графическим методом и методом подстановки).

Графики линейных функций представляют собой прямые, которые либо пересекаются, либо параллельны.

З а д а ч а 1. Пересекаются ли графики функций $y = 3x + 2$ и $y = -2x - 3$?

Р е ш е н и е: Если графики пересекаются, значит, они имеют общую точку, координаты которой обращают в верное равенство как первое уравнение так и второе. Т.е. координата y в этом случае будет одна и та же для двух уравнений. Приравняем правые части уравнений и решим полученное линейное уравнение:

$$3x + 2 = -2x - 3;$$
$$3x + 2x = -2 - 3;$$
$$5x = -5;$$

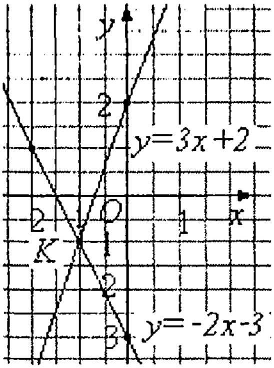


Рис. 1

$x = -5 : 5;$

$x = -1.$

Графики функций пересекаются в точке C абсциссой -1. Определим ординату точки пересечения графиков. Для этого подставим $x = -1$ в одно из уравнений, например, в первое:

$y = 3 \cdot (-1) + 2;$

$y = -1.$

Графики функций пересекаются в точке $K(-1; -1)$.

Точку пересечения можно найти графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = 3x + 2$ и $y = -2x - 3$. На рисунке 1 видно, что графики пересекаются в точке $K(-1; -1)$.

З а м е ч а н и е: *Графический метод нахождения точки пересечения графиков функций является приближенным.*

З а д а ч а 2. Найдите точку пересечения графиков уравнений $3x + 2y = 5$ и $5x - y = 6$.

Р е ш е н и е: Выразим в обоих уравнениях y через x. Первому уравнению соответствует линейная функция $y = -1{,}5x + 2{,}5$; второму – $y = 5x - 6$. Найдем точку пересечения их графиков. Приравняв правые части равенств и, решив уравнение $-1{,}5x + 2{,}5 = 5x - 6$, получаем $x = 1\frac{4}{13}$.

Координату y точки пересечения графиков уравнений найдем, подставив найденное значение x в одно из уравнений. Получаем $y = \frac{7}{13}$.

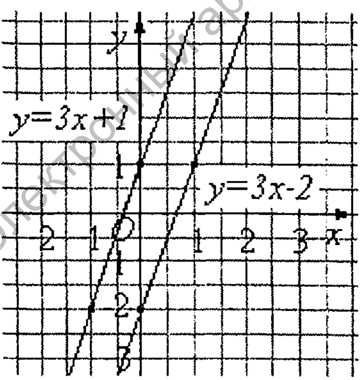


Рис. 2

Точка пересечения графиков уравнений $(1\frac{4}{13}; \frac{7}{13})$.

З а д а ч а 3. Найдем точку пересечения графиков функций $y = 3x + 1$ и $y = 3x - 2$.

Р е ш е н и е: Приравняем правые части равенств и решим получившееся уравнение:

$3x + 1 = 3x - 2;$

$3x - 3x = -1 - 2;$

$0 = -3.$

Получили неверное числовое равенство, а, значит, уравнение не имеет решений, поэтому графики функций не пересекаются. Прямые, которые не пересекаются – параллельны.

Выполним задание графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = 3x + 1$ и $y = 3x - 2$. На рисунке 2 видно, что прямые $y = 3x + 1$ и $y = 3x - 2$ параллельны.

С л е д с т в и е: *Графики двух линейных функций, заданных формулами вида $y = kx + b$, пресекаются, если коэффициенты при x различны, и параллельны, если коэффициенты при x одинаковы.*

З а д а ч а 4. Найдите точку пересечения графиков уравнений $x + 2y = 6$ и $2x + 4y = 8$.

Р е ш е н и е: Можно заметить, что во втором уравнении каждое слагаемое кратно 2. Разделив обе части этого уравнения на 2, получаем уравнение $x + 2y = 4$. Найдем точку пересечения графиков уравнений $x + 2y = 6$ и $x + 2y = 4$. Для этого приведем уравнения к виду линейной функции. Первому уравнению соответствует линейная функция $y = -0{,}5x + 3$; второму – $y = -0{,}5x + 2$.

Полученные линейные функции имеют одинаковые коэффициенты при x, а, значит, графики этих функций будут параллельны.

З а д а ч а 5. Найдите точку пересечения графиков уравнений $x + 3y = 4$ и $x - 5y = 0$.

Р е ш е н и е: В данном задании проще найти зависимость x через y:

$$x + 3y = 4;$$
$$x = -3y + 4.$$
$$x - 5y = 0;$$
$$x = 5y.$$

Приравняв правые части равенств и, решив уравнение $-3y + 4 = 5y$, получаем $y = 0{,}5$. Подставив значение y в одно из уравнений, получаем $x = 2{,}5$.

Графики уравнений $x + 3y = 4$ и $x - 5y = 0$ пересекаются в точке (2,5; 0,5).

З а д а ч а 6. Найти точку пересечения графиков уравнений $-6x - 2y = -10$ и $3x + y = 5$.

Р е ш е н и е: Обе части первого уравнения разделим на -2, тогда получим уравнение $3x + y = 5$. Полученное уравнение имеет такой же вид, как и второе уравнение, а, значит, их графики совпадают. Поэтому решением будут координаты всех точек прямой. Так как точек на прямой бесконечно много, то и решений бесконечно много.

С л е д с т в и е: *Графики двух линейных уравнений с двумя переменными вида $ax + by = c$, совпадают, если коэффициенты при x и y, а также свободные члены пропорциональны.*

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Напишите линейную функцию $y = kx + b$, график которой параллелен прямой $y = 0{,}5x - 4$ и проходит через:

а) начало координат;

б) точку A (0; 3);

в) точку B (5; 5);

г) точку C (-5; 0).

2. Каково взаимное расположение графиков функций:

а) $y = 5x + 2$ и $y = -5x - 4$;

б) $y = -2x - 5$ и $y = -2x + 6$;

в) $y = 3x + 2$ и $y = x - 3$;

г) $y = -7x - 7$ и $y = -7x + 7$;

д) $y = 6x + 1$ и $y = 5x + 1$;

е) $y = 3x$ и $y = -2x$?

3. Выпишите линейные функции, графики которых параллельны:

а) $y = 5x + 2$;

б) $y = -4x - 3$;

в) $y = 2x - 3$;

г) $y = - 4x + 4$;

д) $y = 0{,}5x + 2$;

е) $y = 2 + 2x$;

ж) $y = 5x - 2$;

з) $y = 0{,}5x$;

и) $y = - 4x$.

4. Выпишите из предыдущего задания пять пар пересекающихся прямых.

5. Дана линейная функция $y = 5{,}6x + 2$. Задайте формулой какую-либо функцию, график которой:

а) параллелен графику данной функции;

б) пересекает график данной функции.

6. Задайте формулами две линейные функции, графики которых:

а) параллельные прямые;

б) пересекающиеся прямые.

7. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 5x + 2$ и $y = 2x - 4$;

б) $y = -2x - 3$ и $y = -4x + 4$;

в) $y = 0{,}5x + 2$ и $y = -1 + 2x$;

г) $y = -5x - 2$ и $y = -4x$.

Правильность выполнения задания проверьте графически.

8. Постройте в одной системе координат графики функций:

а) $y = -x$; $y = -x + 5$; $y = -x - 5$; $y = -x + 2,5$;

б) $y = x$; $y = x + 6$; $y = x - 4,5$; $y = x + 2$; $y = x - 6,5$.

9. Покажите примерное расположение в координатной плоскости графиков функций, заданных формулами:

а) $y = 5x$; $y = 5x + 4$, $y = 5x - 5$;

б) $y = -4x$; $y = -4x - 2$; $y = -4x + 3$.

10. На прямой, являющейся графиком уравнения $5x - 2y = 10$, взята точка ордината которой равна 5. Найдите абсциссу этой точки.

11. На прямой, являющейся графиком уравнения $-5x - 4y = 8$, взята точка абсцисса которой равна 2. Найдите ординату этой точки.

12. Приведите пример линейной функции, график которой пересекает ось y в той же точке, что и график функции:

а) $y = -5x - 3$;

б) $y = 4x + 5,5$.

13. Постройте графики уравнений:

а) $2x - 3y = 7$;

б) $4x - y = 5$;

в) $-5x - 2,5y = 0$.

14. Каково расположение графиков уравнений:

а) $3x + 5y = 7$ и $-2x - 5y = 4$;

б) $x + 3y = -5$ и $2x + 6y = 6$;

в) $-x + 2y = -2,5$ и $5x - 10y = 12,5$;

г) $5x + y = 2$ и $5x = 5$;

д) $y = 5$ и $x = -6,5$;

е) $x - y = 5$ и $10x - 2y = 0$?

15. Постройте график уравнения:

а) $(2x - y) - (4y + x) = 5$;

б) $(x - 2)2 - (x + 2)2 = 10$

в) $2(x - y) + 3y = 4$;

г) $(x + 2y) - (x - 2y) = 6$.

16. Является ли точка A (-1; 2) точкой пересечения графиков уравнений:

а) $5x - 4y = 13$ и $3x + 2y = 1$;

б) $7x - 3y = -13$ и $2x + 9y = 16$?

17. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений

а) $x - y = -1$ и $y = 2x + 4$;

б) $3x + 2y = 10$ и $2x - y = 9$;

в) $3x - y = 8$ и $5x + 2y = 17$;

г) $2x + y = 1$ и $7x - 6y = 32$;

д) $7x - 5y = -11$ и $3x + 2y = -13$;

е) $5x + 4y = -22$ и $3x - 2y = 0$.

18. Постройте графики уравнений в одной системе координат. Сколько точек пересечения имеют графики функций?

а) $x - y = 2$ и $2x + 5 = 2y$;

б) $x + y = 0$ и $3x + 3y = 0$;

в) $2x - y = 5$ и $x + y = 1$;

г) $x - 2y = 1$ и $2x + y = 7$.

19. Напишите два уравнения с двумя переменными, графики которых:

а) пересекаются;

б) совпадают;

в) параллельны.

20. Графики уравнений $2x + 3y = a$ и $5x - 2y = b$ пересекаются в точке A (5; 2). Найдите значение a и b.

21. Выполните задание 20 для следующих уравнений:

а) $ax + 5y = 25$ и $7x - by = 27$;

б) $4x + by = 34$ и $ax - 5y = 20$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра: Учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений / ***Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова*** / Под ред. С.А. Теляковского. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 223 с.
2. ***Рогановская Е.Н.*** Методика разработки учебно-дидактических материалов на интеграционной основе (в курсе математики 7 9 классов): Учебное пособие. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2000. – 112 с.
3. ***Рогановский Н.М.*** Геометрия: Учеб. для 7 – 9-х кл. общеобразоват. шк. с углубл. изучением математики. – Мн.: Нар. асвета, 1992. – 270 с.
4. ***Кононов А.С.*** Задачи по алгебре: Пособие для учащихся 7 – 9 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение: Учеб. лит, 1996. – 176 с.
5. Система тренировочных задач и упражнений по математике / ***А.Я. Симонов, Д.С. Бакаев, А.Г. Эпельман и др.*** – М.: Просвещение, 1991. – 207 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Лобанок Ирина Петровна

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ С МЕЖПРЕДМЕТНЫМ СОДЕРЖАНИЕМ

7-9 КЛАССЫ

Редактор *В.А. Лобанок*
Технический редактор *А. Н. Гладун*
Компьютерная верстка *В.С. Цумарева*
Корректор *И.Г. Коржова*

Лицензия ЛВ №384 от 26.04.2003
Сдано в набор 27.02.04. Подписано в печать 5.05.04. Формат [illegible]
Бумага офсетная №1. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. [illegible]
Уч.-изд. 2,2 л. Тираж 90 экз. Заказ № [illegible]

Могилевский государственный университет
им. А.А. Кулешова, 212022, Могилев, Космонавтов 1

Напечатано на ризографе полиграфического отдела
МГУ им. А.А. Кулешова. 212022, Могилев, Космонавтов 1