УДК 517.937

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

И. В. Марченко
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Н. П. Морозов
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В данной работе предлагается новый подход при изучении линейных стационарных систем на плоскости в курсе дифференциальных уравнений [1–3]. Методика основана на специальном представлении полиномиальных систем двух уравнений, полученном в [4].

Ключевые слова: Линейная стационарная система, общее решение, форма Коши, состояние равновесия.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Основные вопросы, рассматриваемые при изучении линейной системы, это: 1) приведение системы к каноническому виду; 2) построение общего решения; 3) качественное изучение системы (классификация состояний равновесия).

Рассмотрим перечисленные вопросы в указанной последовательности.

1. Приведение линейной системы к каноническому виду

Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{10}x + a_{01}y, \\ \dot{y} = b_{10}x + b_{01}y. \end{cases} \tag{1}$$

Положив $\sigma_{00} = a_{10} + b_{01}, \mu_{00} = a_{10} - b_{01}$, представим систему в виде (см. [4])

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial h}{\partial y} + \dfrac{\sigma_{00}}{2}x, \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\sigma_{00}}{2}y, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$h(x,y) = \frac{1}{2}\left(-b_{10}x^2 + \mu_{00}xy + a_{01}y^2\right) \tag{3}$$

есть естественный гамильтониан для линейной системы (1). Введем следующие обозначения

© Марченко И.В., 2015
© Морозов Н.П., 2015

$$\Delta_h = -\frac{1}{4}\mu_{00}^2 - a_{01}b_{10},\ s = sign\,\Delta_h\,.$$

Как показано в [4], вид системы (2) инвариантен относительно линейных невырожденных преобразований

$$x = \alpha u + \beta v,\ y = \gamma u + \delta v\,. \tag{4}$$

А именно, после преобразования к новым переменным u, v полученная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{\partial \bar{h}}{\partial v} + \dfrac{\sigma_{00}}{2}u, \\ \dot{v} = -\dfrac{\partial \bar{h}}{\partial u} + \dfrac{\sigma_{00}}{2}v \end{cases} \tag{5}$$

системы (2) с гамильтонианом

$$\bar{h}(u,v) = \frac{1}{\Delta}h(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \tag{6}$$

где $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ – определитель преобразования. Это свойство позволяет осуществлять линейные преобразования системы (2) путем приведения гамильтониана h к новым переменным по формуле (6) с последующей записью системы в виде (5).

Будем рассматривать три канонические формы гамильтониана $\bar{h}(u,v)$ после преобразования

$$\bar{h}(u,v) = \frac{a}{2}(u^2 + sv^2),\ \text{где } a \neq 0,\ s \in \{1; -1; 0\}.$$

Пусть сначала $\Delta_h \neq 0$ ($s = \pm 1$). Найдем линейные преобразования (4), приводящие гамильтониан к первому каноническому виду. Выразим коэффициенты гамильтониана (6) через коэффициенты линейного преобразования и исходного гамильтониана (3). Из равенства (6) после несложных преобразований находим

$$\bar{h}(u,v) = \frac{1}{\Delta}\left(h(\alpha,\gamma)u^2 + \left(\beta\frac{\partial h}{\partial x}(\alpha,\gamma) + \delta\frac{\partial h}{\partial y}(\alpha,\gamma)\right)uv + h(\beta,\delta)v^2\right). \tag{7}$$

Чтобы гамильтониан (7) принял вид канонической формы ($s = \pm 1$), потребуем выполнения условий:

1) при $\Delta_h > 0$ ($s = 1$) пусть

$$h(\alpha,\gamma) = h(\beta,\delta),\ \beta = k\frac{\partial h}{\partial y}(\alpha,\gamma),\ \delta = -k\frac{\partial h}{\partial x}(\alpha,\gamma), \tag{8}$$

2) при $\Delta_h < 0$ ($s = -1$) пусть

$$h(\alpha,\gamma) = -h(\beta,\delta),\ \beta = k\frac{\partial h}{\partial y}(\alpha,\gamma),\ \delta = -k\frac{\partial h}{\partial x}(\alpha,\gamma). \tag{9}$$

Здесь k пока произвольный параметр.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Из последних двух равенств (8) (или (9)) имеем $\beta = k(\frac{\mu_{00}}{2}\alpha + a_{01}\gamma)$, $\delta = k\left(b_{10}\alpha - \frac{\mu_{00}}{2}\gamma\right)$. Найдем коэффициент $h(\beta,\delta)$. Поскольку β и δ выражаются линейно через α и γ, воспользуемся для вычислений соотношением (7), полагая в нем $u = \alpha, v = \gamma$, $\alpha = k\frac{\mu_{00}}{2}$, $\beta = k\,a_{01}$, $\gamma = kb_{10}$, $\delta = -k\frac{\mu_{00}}{2}$. Будем иметь

$$h(\beta,\delta) = k^2\left(h\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right)\alpha^2 + \left(a_{01}\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right) - \frac{\mu_{00}}{2}\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right)\right)\alpha\gamma + \right.$$

$$\left. + h\left(a_{01}, -\frac{\mu_{00}}{2}\right)\gamma^2\right).$$

После элементарных вычислений находим

$h\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right) = -\frac{1}{2}b_{10}\Delta_h$, $a_{01}\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right) - \frac{\mu_{00}}{2}\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right) = \frac{\mu_{00}}{2}\Delta_h$, $h\left(a_{01}, -\frac{\mu_{00}}{2}\right) = \frac{1}{2}a_{01}\Delta_h$. Окончательно имеем $h(\beta,\delta) = k^2\Delta_h h(\alpha,\gamma)$.

При $\Delta_h > 0$ и $h(\alpha,\gamma) \neq 0$ из первого равенства (8) получим $k^2 = \frac{1}{\Delta_h}$.

При $\Delta_h < 0$ и $h(\alpha,\gamma) \neq 0$ из первого равенства (9) получим $k^2 = -\frac{1}{\Delta_h}$. Таким образом, условия (8), (9) выполнены при $k = \pm\frac{1}{\sqrt{|\Delta_h|}}$. Искомое линейное преобразование имеет вид

$$x = \alpha u + k\left(\frac{\mu_{00}}{2}\alpha + a_{01}\gamma\right)v,\ y = \gamma u + k\left(b_{10}\alpha - \frac{\mu_{00}}{2}\gamma\right)v, \quad (10)$$

где определитель преобразования $\Delta = -2kh(\alpha,\gamma)$ отличен от нуля при любых α и γ таких, что $h(\alpha,\gamma) \neq 0$.

Рассмотрим теперь случай $\Delta_h = 0$ или $\frac{1}{4}\mu_{00}^2 + a_{01}b_{10} = 0$. Для сокращения записей введем следующие обозначения.

$$s_1 = \begin{cases} sign\, b_{10}, \text{ если } b_{10} \neq 0, \\ -sign\ a_{01}, \text{если } a_{01} \neq 0, \end{cases} s_2 = sign\mu_{00} = sign(a_{10} - b_{01}).$$

Из условия $\Delta_h = 0$ следует, что $\frac{\mu_{00}}{2} = s_2\sqrt{|b_{10}\,a_{01}|}$, $|a_{01}| + |b_{10}| \neq 0$, или $a_{01} = b_{10} = \mu_{00} = 0$.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Пусть сначала $b_{10}\, a_{01} \le 0, |\, a_{01}\,| + |b_{10}| \ne 0$ и $\frac{\mu_{00}}{2} = s_2\sqrt{|b_{10}\, a_{01}\,|}$. Тогда система (2) при этих обозначениях принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|\, a_{01}\,|}\left(s_2\sqrt{|b_{10}|}x - s_1\sqrt{|\, a_{01}\,|}y\right) + \frac{\sigma_{00}}{2}x, \\ \dot{y} = s_2 s_1\sqrt{|b_{10}|}\left(s_2\sqrt{|b_{10}|}x - s_1\sqrt{|\, a_{01}\,|}y\right) + \frac{\sigma_{00}}{2}y, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|\, a_{01}\,|}\, p(x,y) + \frac{\sigma_{00}}{2}x, \\ \dot{y} = s_1 s_2\sqrt{|b_{10}|}\, p(x,y) + \frac{\sigma_{00}}{2}y, \end{cases} \tag{11}$$

где $p(x,y) = s_2\sqrt{|b_{10}|}x - s_1\sqrt{|\, a_{01}\,|}y$, а гамильтониан

$$h(x,y) = -\frac{s_1}{2}\, p^2(x,y). \tag{12}$$

Найдем линейные преобразования (4), приводящие гамильтониан к третьей канонической форме ($s = 0$). Из условий

$$\beta = a\frac{\partial h}{\partial y}(\alpha,\gamma),\ \delta = -a\frac{\partial h}{\partial x}(\alpha,\gamma),\ h(\beta,\delta) = 0$$

получаем $\beta = ap(\alpha,\gamma)\sqrt{|\, a_{01}\,|}$, $\delta = as_2 s_1 p(\alpha,\gamma)\sqrt{|b_{10}|}$, $h(\beta,\delta) = 0$ при любых $a \ne 0$.

Искомое преобразование имеет вид

$$x = \alpha u + ap(\alpha,\gamma)\sqrt{|\, a_{01}\,|}v,\ y = \gamma u + as_2 s_1 p(\alpha,\gamma)\sqrt{|b_{10}|}v. \tag{13}$$

Определитель преобразования

$$\Delta = as_2 s_1 p(\alpha,\gamma)\sqrt{|b_{10}|}\alpha - ap(\alpha,\gamma)\sqrt{|\, a_{01}\,|}\gamma = s_1 a p^2 = -2ah(\alpha,\gamma) \ne 0$$

при любых α,γ, таких, что $h(\alpha,\gamma) \ne 0$ и $a \ne 0$.

Таким образом, с помощью двухпараметрического семейства невырожденных при $h(\alpha,\gamma) \ne 0$ и $\Delta_h \ne 0$ линейных преобразований (10) или преобразований (13) при $h(\alpha,\gamma) \ne 0$ и $\Delta_h = 0$ гамильтониан (3) приводится к канонической форме $\bar{h}(u,v) = -\frac{1}{2k}(u^2 + sv^2)$, а система (2) (в соответствии с системой (5)) к виду

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{1}{k}sv + \frac{\sigma_{00}}{2}u, \\ \dot{v} = \frac{1}{k}u + \frac{\sigma_{00}}{2}v, \end{cases} \tag{14}$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

где $k = -\frac{1}{\omega}$, $\omega = \sqrt{|\Delta_h|}$, если $s = \pm 1$, и $k = -a$, если $s = 0$, при этом a может быть любым отличным от нуля числом ($s = sign\,\Delta_h$).

Если $a_{01} = 0$, $\mu_{00} = 0$, $b_{10} = 0$, то система (2) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\sigma_{00}}{2} x, \\ \dot{y} = \dfrac{\sigma_{00}}{2} y. \end{cases}$$

Для завершения исследования осталось рассмотреть случай равенства нулю определителя $\Delta = a_{10} b_{01} - b_{10} a_{01}$ системы (1). Это означает, что $\Delta = \frac{\sigma_{00}^2}{4} + \Delta_h = 0$ или $\frac{\sigma_{00}}{2} = s_3 \omega$, где $s_3 = sign\,\sigma_{00} = sign(a_{10} + b_{01})$. Так как $\Delta_h < 0$, то линейным преобразованием (10) система (2) приводится к виду (14). Полагая $\frac{\sigma_{00}}{2} = s_3 \omega$ и $k = -\frac{1}{\omega}$ в (14), получим

$$\begin{cases} \dot{u} = s_3 \omega (u - s_3 v), \\ \dot{v} = -\omega (u - s_3 v). \end{cases} \tag{15}$$

2. Общее решение линейной системы.

Положив

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\mu_{00}}{2} & a_{01} \\ b_{10} & -\frac{\mu_{00}}{2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

запишем систему (2) в векторном виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = H\,\boldsymbol{x} + \frac{\sigma_{00}}{2} \boldsymbol{x}. \tag{16}$$

Пусть $\Delta_h = \det H = -\frac{1}{4}\mu_{00}^2 - a_{01} b_{10} \neq 0$, $\omega = \sqrt{|\Delta_h|}$, $k = -\frac{1}{\omega}$. Из предыдущего пункта следует, что линейным преобразованием (10) $\boldsymbol{x} = B(\alpha, \gamma)\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, с матрицей

$$B(\alpha, \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & -\frac{1}{\omega}\left(\frac{\mu_{00}}{2}\alpha + a_{01}\gamma\right) \\ \gamma & -\frac{1}{\omega}\left(b_{10}\alpha - \frac{\mu_{00}}{2}\gamma\right) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

система (16) приводится к виду (14). Аналогично при $\Delta_h = 0$ преобразованием (13) с матрицей преобразования

$$B(\alpha,\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & ap(\alpha,\gamma)\sqrt{|a_{01}|} \\ \gamma & as_2 s_1 p(\alpha,\gamma)\sqrt{|b_{10}|} \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

где $p(\alpha,\gamma) = s_2\sqrt{|b_{10}|}\alpha - s_1\sqrt{|a_{01}|}\gamma$, система приводится к виду (14).

Проинтегрируем систему (16). Пусть сначала $\Delta_h > 0$ $(s = 1)$. Очевидно, что $u = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}\cos wt$, $v = -e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}\sin wt$ есть решение системы (14), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = 1$, $v(0) = 0$. Тогда, с учетом соотношения $\boldsymbol{x} = B(\alpha,\gamma)\boldsymbol{u}$, решение системы (16) имеет вид

$$\boldsymbol{x} = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}B(\alpha,\ \gamma)\begin{pmatrix}\cos wt \\ -\sin wt\end{pmatrix}.$$

Здесь матрица $B(\alpha,\gamma)$ определена равенством (17), а решение удовлетворяет начальному условию $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix}\alpha \\ \gamma\end{pmatrix}$. Как отмечалось ранее, элементы α, γ в матрице В принимают произвольные значения. Заменяя α, γ в матрице B на начальные данные x_0 и y_0, получим общее решение линейной системы в форме Коши

$$\boldsymbol{x} = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}B(x_0, y_0)\begin{pmatrix}\cos wt \\ -\sin wt\end{pmatrix},$$

где матрица $B(\alpha,\gamma)$ определена равенством (17).

Пусть теперь $\Delta_h < 0$. Очевидно, что $u = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}\operatorname{ch} wt$, $v = -e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}\operatorname{sh} wt$ есть решение системы (14), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = 1$, $v(0) = 0$. Аналогично тому, как это делалось в предыдущем случае, приходим к общему решению системы (16) вида

$$\boldsymbol{x} = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}B(x_0, y_0)\begin{pmatrix}\operatorname{ch} wt \\ -\operatorname{sh} wt\end{pmatrix},$$

где матрица $B(\alpha,\gamma)$ определена равенством (17).

Замечание. Решение задачи Коши $u(0) = 1, v(0) = 0$ для приведенной системы (11) как при $\Delta_h > 0$, так и при $\Delta_h < 0$ можно записать следующим образом

$$u = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}\cos\sqrt{s}\,wt,\ v = -e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}\sin\sqrt{s}\,wt,$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

с учетом связи $\operatorname{ch}\theta = \cos i\theta$, $\operatorname{sh}\theta = i\sin i\theta$. Тогда в обоих случаях общее решение системы (16) выражается одной формулой

$$x = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} B(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \cos\sqrt{s}\omega t \\ -\sqrt{s}\sin\sqrt{s}\omega t \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $\Delta_h = 0$ и $b_{10}\, a_{01} < 0$. В этом случае система функций $u = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}$, $v = -\frac{t}{a} e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}$ есть решение системы (11), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = 1$, $v(0) = 0$, а общее решение системы (14) имеет вид

$$x = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} B(x_0, y_0) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{t}{a} \end{pmatrix},$$

где матрица $B(\alpha, \gamma)$ определена равенством (18).

Если $\Delta = \frac{\sigma_{00}^2}{4} + \Delta_h = 0$ или, что тоже самое, $\frac{\sigma_{00}}{2} = s_3\omega$, то система функций $u = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\omega t})$, $v = -\frac{1}{2}(1 - e^{-2\omega t})$ являются решением задачи Коши $u(0) = 1$, $v(0) = 0$ для приведенной системы (14).

Решение системы (16) в этом случае имеет вид

$$x = B(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{s_3\omega t}) \\ \frac{s_3}{2}(1 - e^{s_3\omega t}) \end{pmatrix},$$

где матрица $B(\alpha, \gamma)$ определена равенством (17).

Замечание. При приведении линейной системы к каноническому виду предполагалось, что $h(\alpha, \gamma) \neq 0$. Легко убедиться, что при интегрировании системы (16) допускается равенство $h(x_0, y_0) = 0$.

3. Качественное исследование линейной системы

Приведем качественный анализ линейной системы в зависимости от двух параметров Δ_h и σ_{00} в сравнении с гамильтоновой системой, соответствующей $\sigma_{00} = 0$.

Лемма. Если:

1) $\Delta_h > 0$, то точка O(0,0) для гамильтоновой системы центр, для полной – устойчивый фокус при $\sigma_{00} < 0$ и неустойчивый фокус при $\sigma_{00} > 0$;

2) $-\frac{\sigma_{00}^2}{4} < \Delta_h < 0$, то точка O(0,0) для гамильтоновой системы седло, для полной – устойчивый узел при $\sigma_{00} < 0$ и неустойчивый при $\sigma_{00} > 0$. При этом

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

сепаратрисы седла $b_{10}x + (\omega - \frac{\mu_{00}}{2})y = 0$, $(\omega - \frac{\mu_{00}}{2})x - a_{01}y = 0$ являются траекториями полной системы;

3) $\Delta_h < -\frac{\sigma_{00}^2}{4}$, то точка O(0,0) для гамильтоновой системы седло, для полной седло с теми же сепаратрисами $b_{10}x + (\omega - \frac{\mu_{00}}{2})y = 0$, $(\omega - \frac{\mu_{00}}{2})x - a_{01}y = 0$;

4) $\Delta_h = 0$, то при

а) $a_{01}\ b_{10} \leq 0$, $|a_{01}| + |b_{10}| \neq 0$ прямая $s_2\sqrt{|b_{10}|}x - s_1\sqrt{|a_{01}|}y = 0$ для гамильтоновой системы будет прямой состояний равновесия, а прямые $s_2\sqrt{|b_{10}|}x - s_1\sqrt{|a_{01}|}y = C\ (C \neq 0)$ – траекториями. Для полной системы точка O(0,0) – вырожденный узел, устойчивый при $\sigma_{00} < 0$ и неустойчивый при $\sigma_{00} > 0$, при этом прямая $s_2\sqrt{|b_{10}|}x - s_1\sqrt{|a_{01}|}y = 0$ является траекторией полной системы;

b) $a_{01} = b_{10} = \mu_{00} = 0$, для гамильтоновой системы плоскость xOy есть плоскость состояний равновесия. Для полной системы точка O(0,0) – дикритический узел, устойчивый при $\sigma_{00} < 0$ и неустойчивый при $\sigma_{00} > 0$;

5) $\Delta_h = -\frac{\sigma_{00}^2}{4} \neq 0$, то точка O(0,0) – для гамильтоновой системы седло с сепаратрисами $b_{10}x + (\omega - \frac{\mu_{00}}{2})y = 0$, $(\omega - \frac{\mu_{00}}{2})x - a_{01}y = 0$; для полной – одна из этих прямых является прямой состояний равновесия, а траектории полной системы параллельны другой из этих прямых.

Убедимся, что прямые равновесия и сепаратрисы седла гамильтоновой системы являются также или прямыми равновесия или состоят из траекторий полной системы в случае узла или седла.

Естественный гамильтониан линейной системы имеет вид

$$h = \frac{1}{2}\left(-b_{10}x^2 + \mu_{00}xy + a_{01}y^2\right).$$

Производная гамильтониана в силу полной системы $\frac{dh}{dt} = \sigma_{00}h$. Отсюда получаем первый интеграл линейной системы

$$h(x,y) = h(x_0,y_0)e^{t\sigma_{00}}.$$

Сепаратрисы седла (или прямые равновесия) гамильтоновой системы находятся из равенства $h(x,y) = 0$. Из первого интеграла видим, что эти же прямые являются либо траекториями, либо прямыми равновесия и для полной линейной системы.

Остальные утверждения следуют из анализа характеристического уравнения гамильтоновой системы $\lambda^2 + \Delta_h = 0$ и характеристического уравнения

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

$(\lambda - \frac{\sigma_{00}}{2})^2 + \Delta_h = 0$ полной системы, либо из непосредственного исследования приведенной системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Степанов, В. В.*** Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 436 с.
2. ***Матвеев, Н. М.*** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1967. – 565 с.
3. ***Черкас, Л. А.*** Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. М. Булгаков. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2013.
4. ***Морозов, Н. П.*** О приведении полиномиальных систем к специальному виду / Н. П. Морозов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2011. – № 2(38). – С. 43–49.

Поступила в редакцию 13.05.15 г.

Контакты: vk.com/fizmat_info (Марченко Ирина Васильевна)

Marchenko I.V., Morozov N.P. NEW APPROACH TO THE STUDY OF LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS IN THE PLANE.

A new approach to the study of linear time-invariant systems in the plane in a university course of differential equations is suggested. The technique is based on a special representation of polynomial systems of two equations obtained in [4].

Key words: linear stationary system, general solution, Caushy's form, critical point.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова