В.Н. Борбат, С.Н. Батан

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 2

1 семестр

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И АЛГЕБРА

Могилев 2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
"МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. КУЛЕШОВА"

В. Н. Борбат, С. Н. Батан

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Часть вторая

1 семестр

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И АЛГЕБРА

Для студентов факультета экономики и права

им. А.А. Кулешова

Могилев 2013

Электронный аналог печатного издания:

Борбат В.Н., Батан С.Н.
Практические занятия по высшей математике: в 3 ч. Ч. 2. – Семестр 1:
Математический анализ и алгебра
Могилев : МГУ имени А.А. Кулешова, 2013. – 72 с. : ил.

Предлагаемое издание предназначено для оказания помощи студентам факультета экономики и права специальности экономика управления на предприятии при подготовке к практическим занятиям по вышей математике в первом семестре. Все содержание разбито на восемь занятий. Каждое занятие содержит контрольные вопросы, рекомендуемую литературу, образцы решения задач и задачи для самостоятельного решения. Материал апробировался одним из авторов при проведении практических занятий по высшей математике в МГУ имени А. А. Кулешова.

Часть первая вышла в издательстве МГУ имени А. А. Кулешова в 2012 г.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1

Борбат В.Н., Батан С.Н. Практические занятия по высшей математике : в 3 ч. Ч. 2. – Семестр 1: математический анализ и алгебра. – Электр. данные. – Могилев : МГУ имени А.А. Кулешова, 2013. – Загол. с экрана.

212022, г. Могилев,
ул. Космонавтов, 1
Тел.: 8-0222-28-31-51
E-mail: alexpzn@mail.ru
http://www.msu.mogilev.by

ЗАНЯТИЕ 1

Предел последовательности. Предел функции

Вопросы к занятию

1. Окрестность точки. Предельные точки множества.
2. Числовая последовательность и ее предел.
3. Конечный предел функции в точке.
4. Теоремы о пределах суммы, произведения и частного двух функций.
5. Конечный предел функции на бесконечности.
6. Бесконечные пределы функции.
7. Бесконечно малые функции и их свойства.
8. Бесконечно большие функции и их свойства.

Литература: [1, с. 161 – 170, 198 – 199, 204 – 207], [2, с. 141 – 156], [3, с. 326 – 335], [4, с. 158 – 161], [5, с.77 – 80, 88 – 92], [6, с. 13 – 19, 21 – 26].

Образцы решения задач

Задача 1. Найти пределы

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+2}{3n+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{\sqrt{n^4+n}}$.

Решение. а) Разделим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{7n+2}{3n+3}$ на n и перейдем к пределу. Получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n+2}{3n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{2}{n}}{3+\frac{3}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(7+\frac{2}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{3}{n})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}7+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}=\frac{7+0}{3+0}=\frac{7}{3}.$$

Здесь использованы теоремы о пределе частного и суммы, а также принято во внимание, что предел постоянной равен самой постоянной и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{n}=0$, где c – постоянная.

б) разделим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{3n+2}{\sqrt{n^4+n}}$ на n^2, поднесем $\dfrac{1}{n^2}$ под знак квадратного корня и выполним почленное деление на n^4

$$\frac{3n+2}{\sqrt{n^4+n}}=\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\sqrt{n^4+n}}=\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\sqrt{\frac{n^4+n}{n^4}}}=\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^4+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}=\frac{0+0}{\sqrt{1+0}}=\frac{0}{1}=0.$$

Задача 2. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x+4}{x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2+4x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+20}-5}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$.

Решение. а) Используя теоремы о пределах суммы, произведения и частного функций имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x+4}{x^2+3x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x+4)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}2x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}4}{\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}1}=$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to 2}x^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+4}{\lim\limits_{x\to 2}x^2+3\lim\limits_{x\to 2}x+1}=\frac{2(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-3\cdot 2+4}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+3\cdot 2+1}=\frac{2\cdot 2^2-6+4}{2^2+6+1}=\frac{6}{11}.$$

б) Поскольку $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+6)=0$ и $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$, то здесь имеется неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Раскроем эту неопределенность. Разлагая на множители числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$, находим $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$. Сокращая полученную дробь на $x-3$ (это можно делать, так как если $x\to 3$, то x не равен 3) и переходя к пределу при $x\to 3$, имеем

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

в) Поскольку при $x\to -2$ числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x+2}{x^2-4}$ стремятся к нулю, то имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Разлагая знаменатель этой дроби на множители и сокращая ее на $x+2$, получаем

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)=0$, то функция $x+2$ является бесконечно малой при $x\to -2$. Следовательно функция $\dfrac{1}{x+2}$ является бесконечно большой при $x\to -2$, то есть $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x+2}=\infty$.

г) Поскольку при $x\to 5$ числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+20}-5}$ стремятся к нулю, то опять имеет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в знаменателе домножив числитель и знаменатель дроби

$\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+20}-5}$ на выражение $\sqrt{x+20}+5$, предварительно разложив ее числитель на множители. Затем переходя к пределу, получим:

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+20}-5}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+20}+5\right)}{\left(\sqrt{x+20}-5\right)\left(\sqrt{x+20}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+20}+5\right)}{x+20-25}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+20}+5\right)}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to5}(x-1)\left(\sqrt{x+20}+5\right)=4\cdot10=40.$$

д) Здесь имеем неопределенность $\infty-\infty$. Чтобы раскрыть ее приведем выражение в скобках к общему знаменателю. Получим:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}-\frac{1}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3-x^2-x-1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-x^2-x+2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}.$$

Поскольку числитель и знаменатель дроби $\dfrac{-x^2-x+2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$ стремятся к нулю при $x\to1$, то получили неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, которую как и ранее раскроем разложив на множители числитель дроби. Имеем

$$\lim_{x\to1}\frac{-x^2-x+2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{x^2+x+1}=\frac{-3}{3}=-1.$$

е) Введем новую переменную z, положив $x = z^6$. Тогда $z \to 1$, когда $x \to 1$. И, следовательно, имеем

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{z\to1}\frac{\sqrt[3]{z^6}-1}{\sqrt{z^6}-1}=\lim_{z\to1}\frac{z^2-1}{z^3-1}=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)}=$$

$$=\lim_{z\to1}\frac{z+1}{z^2+z+1}=\frac{2}{3}.$$

ж) При $x \to 1$ числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$ стремятся к нулю, получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Разлагая числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$ на множители, сокращая ее, получаем

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x-1}.$$

Далее непосредственно применить теорему о пределе частного нельзя, так как предел знаменателя равен 0. В числителе имеем ограниченную величину отличную от 0. Таким образом под знаком предела будет произведение ограниченной функции $x-2$, отличной от нуля, на бесконечно большую функцию $\dfrac{1}{x-1}$ при $x \to 1$. Поэтому

$$\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x-1}=\infty.$$

Задача 3. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{5x^3+3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+7}{x^2+2x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{0{,}1x^3}{10x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)$.

Решение. а) Теорему о пределе частного здесь применять нельзя, так как числитель и знаменатель дроби конечного предела не имеют. В этом случае говорят: имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. В подобных примерах для раскрытия неопределенности как и в задаче 1 целесообразно числитель и знаменатель дроби $\frac{4x^3-2x+1}{5x^3+3x^2-2}$ разделить на степень х с наивысшим показателем, а затем перейти к пределу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{5x^3+3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3}}=\frac{4}{5}.$$

б) Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^2 , получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+7}{x^2+2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

в) Здесь также имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{0{,}1x^3}{10x^2+1}$ на x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{0{,}1x^3}{10x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{0{,}1}{\frac{10}{x}+\frac{1}{x^3}}.$$

Поскольку $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{10}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=0$, то функция $\frac{10}{x}+\frac{1}{x^3}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$. Следовательно функция $\frac{0{,}1}{\frac{10}{x}+\frac{1}{x^3}}$ является бесконечно большой при $x\to\infty$, т.е

$$\lim_{x\to\infty}\frac{0{,}1}{\frac{10}{x}+\frac{1}{x^3}}=\infty.$$

г) Рассмотрим два случая:

1) Найдем предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим выражение $\sqrt{x^2+2}-x$ на $\sqrt{x^2+2}+x$ и перейдем к пределу. Получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0.$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=+\infty$, так как в этом случае функции $\sqrt{x^2+2}$ и $-x$ бесконечно большие функции одного знака.

д) Здесь имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Как и в случае 1 из примера г) разделим и домножим выражение $\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+1}$ на $\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+1}$ и перейдем к пределу, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+1}}.$$

Получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель дроби на x, имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\dfrac{2}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{4}{1+1}=2.$$

Домашнее задание

№ 1

Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-\sqrt{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x+1}-x^2\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^5+2}-\sqrt[3]{x^2+3}}{\sqrt[5]{x^4+1}-\sqrt{x^3+2}}$; з) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$.

ЗАНЯТИЕ 2

Первый и второй замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций

Вопросы к занятию

1. Первый замечательный предел.
2. Второй замечательный предел.
3. Сравнение бесконечно малых функций.
4. Эквивалентные бесконечно малые функции.
5. Односторонние пределы функций.

Литература: [1, с. 202 – 204, 207 – 211], [2, с. 156 – 159], [3, с. 335 – 336, 347 – 349, 355 – 359], [4, с. 161 – 163], [5, с. 92 – 93], [6, с. 26 – 28, 30 – 31].

Образцы решения задач

Задача 1. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

Решение. а) Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности используем первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1}$$

Преобразуем выражение $\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ так, чтобы задача была сведена к пределу (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}.$$

Мы воспользовались теоремой о пределе частного и формулой (1).

б) Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Воспользуемся формулой $1-\cos 3x=2\sin^2\dfrac{3x}{2}$. Тогда имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{3x}{2}\cdot\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{3x}{2}}=$$

$$=2\cdot\frac{9}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{2}}=\frac{9}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{9}{2}.$$

в) Здесь имеем неопределенность вида $\infty \cdot 0$. Сведем ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, сделав замену переменной $t=\frac{1}{x}$, тогда если $x\to\infty$, то $t\to 0$. Следовательно

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

г) Здесь так же можно произвести замену переменной, сведя неопределенность вида $0\cdot\infty$ к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Положим $t=1-x$, тогда $x=1-t$ и если $x\to 1$, то $t\to 0$. Следовательно, имеем

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}t\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)=\lim_{t\to 0}t\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}t=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}=\lim_{t\to 0}\cos\frac{\pi}{2}t\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi}{2}t}=1\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}t}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{\pi}.$$

д) Так как для любого $\alpha\in R$ $|\sin\alpha|\le 1$, то функция $y=\sin\alpha$ ограничена в своей области определения. Следовательно функция $y=\sin\frac{1}{x}$ ограничена в своей области определения, т.е. на множестве $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}x=0$, то функция $y=x$ является бесконечно малой при $x\to 0$. Произведение бесконечно малой функции в некотором процессе на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция в том же процессе. Следовательно

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

Задача 2. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{6x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)^{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+5x^2\right)^{1/x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 4x\right)^{1/\sin^2 2x}$.

Решение. а) Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}6x=\infty$, то имеем неопределенность вида 1^{∞}. Выражение под знаком предела преобразуем так, чтобы задача сводилась ко второму замечательному пределу

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x}=e. \tag{2}$$

Получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{x}\cdot 6x}=e^{12},$$

так как

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+t\right)^{1/t}=e$, где $t=\dfrac{2}{x}$, а показатель степени $\dfrac{2}{x}\cdot 6x$ равен

12.

б) Здесь также имеем неопределенность вида 1^{∞}. Раскроем ее

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2}{x+1}-1\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{3x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{-\frac{3}{x+1}\cdot(3x+1)}=e^{-9}=\frac{1}{e^{9}},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}}=e$ по формуле (2) и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3(3x+1)}{x+1}=-9$.

в) Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{1+2x}=\dfrac{1}{2}\neq 1$, то здесь нет неопределенности вида 1^{∞}. Рассмотрим два случая, когда $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=0$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2^{x}=+\infty$.

г)

$$\lim_{x\to0}\left(1+5x^2\right)^{1/x}=\lim_{x\to0}\left(\left(1+5x^2\right)^{1/5x^2}\right)^{5x^2\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\left(1+5x^2\right)^{1/5x^2}\right)^{5x}=e^{0}=1,$$

так как

$\lim\limits_{x\to0}\left(1+5x^2\right)^{1/5x^2}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{1/t}=e$, где $t=5x^2$ и $\lim\limits_{x\to0}5x=0$.

д) Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Воспользуемся формулой $1-\cos4x=2\sin^2 2x$ и вторым замечательным пределом

$$\lim_{x\to0}(\cos4x)^{1/\sin^2 2x}=\lim_{x\to0}\left(1+\cos4x-1\right)^{1/\sin^2 2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\left(-2\sin^2 2x\right)\right)^{1/\sin^2 2x}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(1+\left(-2\sin^2 2x\right)\right)^{-1/2\sin^2 2x}\right)^{-\frac{2\sin^2 2x}{\sin^2 2x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Задача 3. Доказать, что при $x\to 0$ бесконечно малые функции $\sqrt[3]{1+x}-1$ и $\frac{x}{3}$ являются эквивалентными.

Решение. Найдем предел отношения бесконечно малых функций $\sqrt[3]{1+x}-1$ и $\frac{x}{3}$ при $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{x}{3}} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)} =$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)} = 3\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1} =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{3} = 1.$$

Так как указанный предел равен 1, то бесконечно малые функции $\sqrt[3]{1+x}-1$ и $\frac{x}{3}$ эквивалентны при $x\to 0$.

Задача 4. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\sqrt{1+4x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{\mathrm{arctg}3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{e^{3x}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x-\frac{1}{2}}$.

Решение. Как известно предел отношения бесконечно малых функций не изменяется при замене этих функций эквивалентными им бесконечно малыми функциями. Учитывая, что при $\alpha \to 0$

$$\sin\alpha \sim \alpha \ (3), \quad \mathrm{tg}\alpha \sim \alpha \ (4), \quad \arcsin\alpha \sim \alpha \qquad (5),$$

$$\sqrt{1+\alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{2} \ (6), \quad \mathrm{arctg}\alpha \sim \alpha \ (7), \quad \ln(1+\alpha) \sim \alpha \qquad (8),$$

$$1 - \cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2} \ (9), \quad e^{\alpha} - 1 \sim \alpha \qquad (10).$$

Тогда имеем:

а) Из (4) следует, что при $x \to 0$ $\mathrm{tg}3x \sim 3x$, $\mathrm{tg}5x \sim 5x$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

б) Из (5) и (6) имеем, что при $x \to 0$ $\arcsin 4x \sim 4x$, $\sqrt{1+4x} - 1 \sim 2x$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{\sqrt{1+4x} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x} = 2.$$

в) Из (7) и (8) заключаем, что при $x \to 0$ $\mathrm{arctg}3x \sim 3x$, $\ln(1+6x) \sim 6x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{\mathrm{arctg}3x} = \lim_{x\to 0}\frac{6x}{3x} = 2.$$

г) Используя (9) и (10) заключаем, что при $x \to 0$ $1 - \cos 4x \sim 8x^2$, $e^{3x} - 1 \sim 3x$. Следовательно

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{e^{3x} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{8}{3}x = 0.$$

д) Сделаем замену переменной, положив $t = x - \dfrac{\pi}{3}$. Тогда $x = t + \dfrac{\pi}{3}$ и если $x \to \dfrac{\pi}{3}$, то $t \to 0$. Следовательно

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos x - \frac{1}{2}} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{-2\sin\frac{t + \frac{2\pi}{3}}{2} \cdot \sin\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2}\lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin\frac{t + \frac{2\pi}{3}}{2} \cdot \frac{t}{2}} =$$

$$= -\lim_{t \to 0} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Здесь мы воспользовались условием (3) из которого следует, что при $t \to 0$ $\sin t \sim t$, $\sin\frac{t}{2} \sim \frac{t}{2}$.

Задача 5. Найти односторонние пределы

а) $\lim\limits_{x \to 2+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x \to 2-0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{2 + 2^{\frac{1}{x}}}$;

г) $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{2 + 2^{\frac{1}{x}}}$; д) $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{\ln|x|}$.

Решение. а) Положим $t = \dfrac{1}{x-2}$, тогда если $x \to 2+0$, то $t \to +\infty$. Следовательно

$$\lim_{x\to 2+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

б) Сделав ту же замену переменной, что и пункте а) имеем, что при $x\to 2-0$, $t\to-\infty$ и

$$\lim_{x\to 2-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{2}.$$

в) Учитывая, что $\lim\limits_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} 2^t = +\infty$ имеем

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{2+2^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

г) Так как $\lim\limits_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to-\infty} 2^t = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{2^t} = 0$ получаем :

$$\lim_{x\to-0} \frac{1}{2+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$

д) Так как $\lim\limits_{x\to+0} \ln x = -\infty$, то

$$\lim_{x\to-0} \frac{1}{\ln|x|} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

Домашнее задание

№ 1

Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot\sin\frac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-x}{6-x}\right)^{\frac{2-x^3}{x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\ln(x+2)-\ln x\right)$.

№ 2

Найти односторонние пределы

а) $\lim\limits_{x\to-0}\frac{|x|}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{1}{\ln x}$; в) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to2+0}\frac{1}{1-e^{2-x}}$.

ЗАНЯТИЕ 3

Непрерывность функции

Вопросы к занятию

1. Непрерывная функция.
2. Классификация точек разрыва функции.
3. Свойства функций непрерывных в точке.
4. Свойства функций непрерывных на отрезке.

Литература: [1, с. 215 – 223], [2, с. 161 – 174], [3, с. 336 – 343], [4, с. 163 – 166], [5, с. 93 – 97], [6, с. 31 – 46, 58 – 60].

Образцы решения задач

Задача 1. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики

а) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$; б) $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$; в) $f(x)=\frac{x+1}{|x+1|}$;

г) $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x\le 0 \\ 2x+3, \text{ если } x>0 \end{cases}$; д) $f(x)=\begin{cases} x+1{,}5 \quad ,\text{если } x<-2 \\ \frac{1}{x}, \text{ если } -2\le x<0 \\ \frac{1}{2}x, \text{ если } x\ge 0 \end{cases}$;

е) $f(x)=\log_2|x|$.

Решение. а) Функция определена на всей числовой прямой, за исключением точки $x=1$. Следовательно функция $f(x)$ непрерывна на интервалах $(-\infty\ ;\ 1)$, $(1;+\infty)$ (по теореме о непрерывности частного двух функций) и в точке $x=1$ имеет разрыв. Найдем односторонние пределы функции в этой точке

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Так как односторонние пределы функции в точке $x=1$ бесконечны, то точка $x=1$ является точкой разрыва функции с бесконечным скачком. Строим график функции

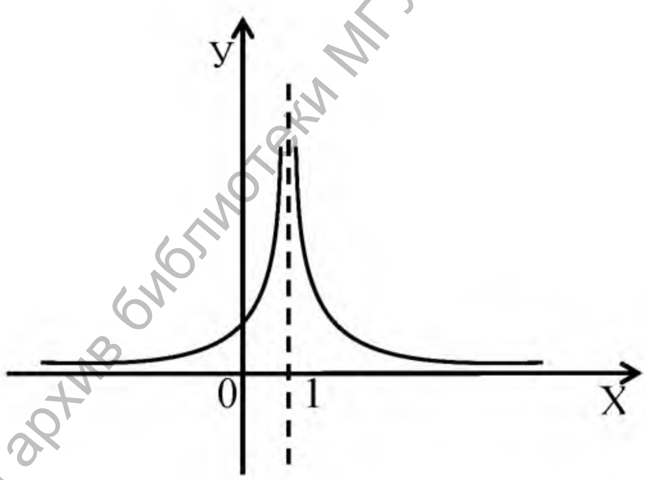


Рис. 1

б) Функция определена на всем множестве действительных чисел за исключением точки $x=2$. Следовательно функция $f(x)$ непрерывна на интервалах $(-\infty\ ;\ 2)$, $(2;+\infty)$ (как частное двух непрерывных функций), а в точке $x=2$ имеет разрыв. Учитывая, что

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12,$$

заключаем что в точке 2 существуют оба односторонних предела функции равные 12. Таким образом, в точке $x=2$ функция имеет устранимый разрыв. Если эту функцию доопределить в точке $x=2$, положив $f(2)=12$, то функция будет непрерывной на всей числовой прямой. График данной функции представляет собой параболу, заданную уравнением $y = x^2 + 2x + 4$, без точки (2; 12) (Рис. 2)

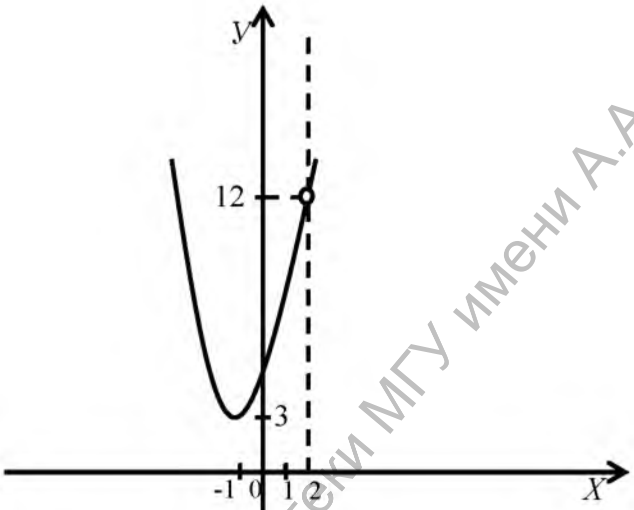


Рис. 2

в) Функция определена на всей числовой прямой, за исключением точки $x=-1$, следовательно на интервалах $(-\infty\ ;\ -1)$, $(-1; +\infty)$ функция непрервна, а в точке $x=-1$ функция имеет разрыв. Найдем односторонние пределы функции в этой точке

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{x+1}{|x+1|} = \lim_{x \to -1-0} \frac{x+1}{-x-1} = -1,$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \frac{x+1}{|x+1|} = \lim_{x \to -1+0} \frac{x+1}{x+1} = 1.$$

Поскольку односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x=-1$ конечны и не равны между собой, то $x=-1$ является точкой разрыва функции с конечным скачком. Скачок функции в точке $x=-1$ равен разности

$f(-1+0)-f(-1-0)=1-(-1)=2$. График функции изображен на рисунке 3.

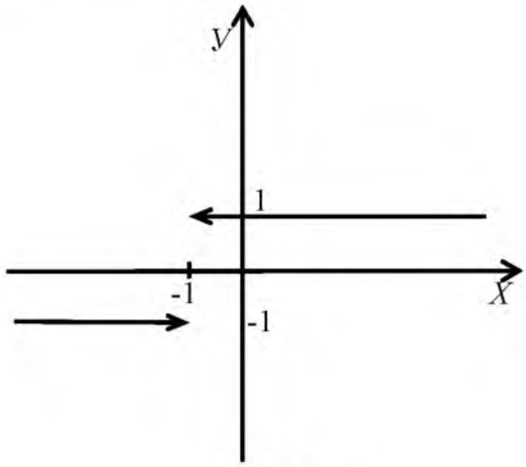


Рис. 3

г) На интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна, как многочлен. Разрыв у функции может быть лишь в точке в которой функция меняет свое аналитическое выражение, то есть в точке $x=0$. Найдем односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x=0$

$$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0} x^2=0, \quad \lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0} (2x+3)=3.$$

Так как односторонние пределы функции в точке $x=0$ конечны, но $f(-0)\neq f(+0)$, то в точке $x=0$ функция $f(x)$ имеет разрыв с конечным скачком. Скачок равен разности $f(+0)-f(-0)=3-0=3$. График функции изображен на рисунке 4.

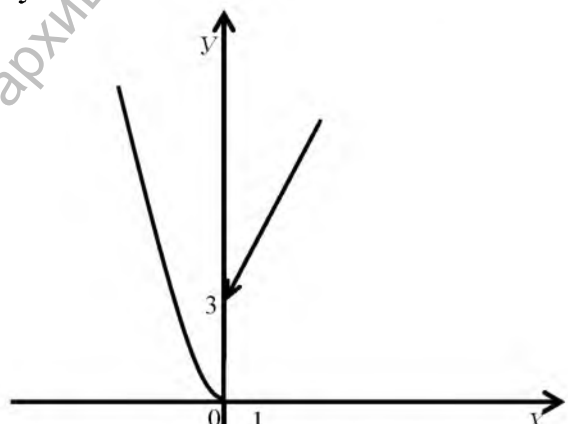


Рис. 4

д) На интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;+\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна как многочлен и дробно-рациональная функция, у которой знаменатель не обращается в нуль. Разрыв функция может иметь лишь в точках, в которых она меняет свое аналитическое выражение, то есть в точках $x=-2$ и $x=0$. Исследуем на непрерывность функцию в точке $x=-2$. Найдем односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x=-2$:

$$\lim_{x\to-2-0} f(x)=\lim_{x\to-2-0}(x+1{,}5)=-0{,}5,$$

$$\lim_{x\to-2+0} f(x)=\lim_{x\to-2+0}\frac{1}{x}=-0{,}5.$$

Значение функции $f(x)$ в точке $x=-2$ равно $f(-2)=-0{,}5$. Поскольку оба односторонних предела функции в точке $x=-2$ равны между собой и их общее значение равно значению функции в этой точке, то функция непрерывна в точке $x=-2$. Исследуем сейчас на непрерывность функцию в точке $x=0$. Так же найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty, \quad \lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2}x=0.$$

Таким образом в точке $x=0$ функция имеет разрыв с бесконечным скачком . Строим график функции

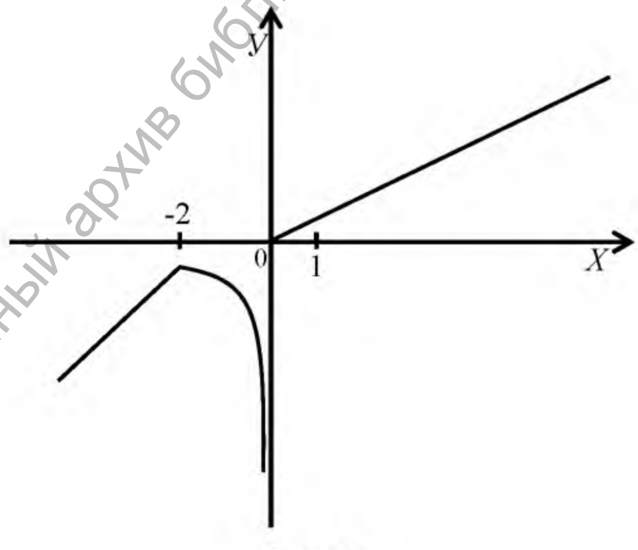


Рис. 5

е) Функция определена на всей числовой прямой, за исключением точки $x=0$ следовательно функция непрерывна на интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, а в точке $x=0$ функция имеет разрыв. Нетрудно видеть, что $f(-0)=f(+0)=-\infty$. Следовательно в точке $x=0$ функция $f(x)$ имеет разрыв с бесконечным скачком (рис. 6)

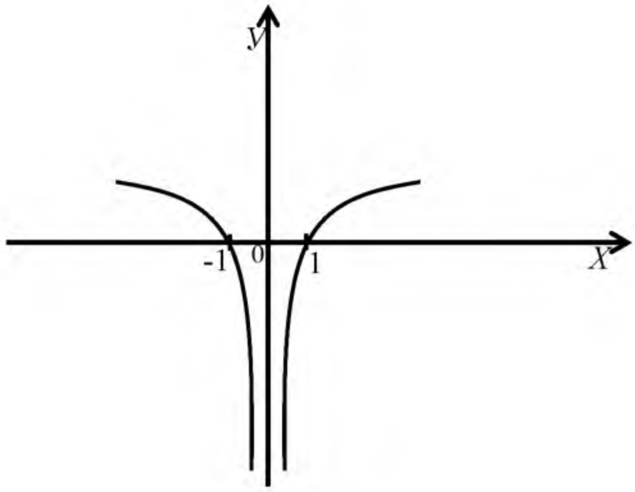


Рис. 6

Задача 2. Исследовать на непрерывность функции

а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$; в) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$;

г) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$; д) $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x|}$; е) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}-1}$.

Решение. а) Функция определена и непрерывна во всем множестве действительных чисел, за исключением точки $x=0$. Следовательно, в этой точке функция имеет разрыв. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

то в точке $x=0$, существуют оба односторонних предела функции $f(-0)=f(+0)=1$. Таким образом, в точке $x=0$ функция имеет устранимый разрыв.

б) Функция определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;0),(0;+\infty)$ и имеет разрыв в точке $x=0$. Для определения характера разрыва найдем односторонние пределы функций в точке $x=0$:

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{\cos x}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{\cos x}{x}=+\infty.$$

Таким образом $x=0$ точка разрыва функции с бесконечным скачком.

в) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой за исключением точки $x=2$ в которой функция имеет разрыв. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}} = 0, \quad \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}} = +\infty .$$

Следовательно, заключаем, что $x=2$ точка разрыва функции с бесконечным скачком.

г) функция определена и непрерывна на всей числовой прямой за исключением точки $x=0$, в которой функция имеет разрыв. Поскольку

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

(см. задача 1 (д) из занятия 2), то в точке $x=0$ существуют оба односторонних предела функции общее значение которых равно 0. Следовательно, $x=0$ точка устранимого разрыва функции.

д) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой за исключением точек $x=-1$, $x=0$, $x=1$ в которых функция разрывна. Для определения характера разрывов найдем односторонние пределы функции в каждой из точек $x=-1$, $x=0$, $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{\ln|x|} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{1}{\ln|x|} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \frac{1}{\ln|x|} = 0, \quad \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} \frac{1}{\ln|x|} = 0,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{\ln|x|} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{\ln|x|} = +\infty .$$

Таким образом в точке $x=0$ функция имеет устранимый разрыв, а точки $x=-1$ и $x=1$ являются точками разрыва функции с бесконечным скачком.

е) Функция определена и непрерывна во всем множестве действительных чисел за исключением точки $x=0$, в которой функция имеет разрыв. Поскольку

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}-1}=-2,\quad \lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}-1}=1,$$

то есть оба односторонних предела функции конечны и неравны между собой, то $x=0$ точка разрыва функции с конечным скачком.

Задача 3. Исследовать характер разрыва функции $f(x)$ в точке $x=x_0$. Можно ли так доопределить функцию при $x=x_0$, чтобы функция стала непрерывной в этой точке?

а) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $x_0=0$; б) $f(x)=arcctg\frac{1}{x}$, $x_0=0$.

Решение . а) Так как

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

то в точке 0 существуют оба односторонних предела $f(-0)=f(+0)=e$. Следовательно в точке $x_0=0$ функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв. Если доопределить функцию в точке $x_0=0$, положив $f(0)=e$,то функция $f(x)$ станет непрерывной в точке $x_0=0$.

б) Найдем односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x_0=0$

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\lim_{t\to -\infty}\operatorname{arcctg}t=\pi,$$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\lim_{t\to +\infty}\operatorname{arcctg}t=0.$$

Таким образом $x_0=0$ точка разрыва функции $f(x)$ с конечным скачком. Доопределить функцию в точке $x_0=0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке, нельзя.

Домашнее задание

№ 1

Пусть $f(x)=\begin{cases} x-3, \text{ если } x\le 2 \\ 3-ax^2, \text{ если } x>2 \end{cases}$. При каком значении числа a функция $f(x)$ будет непрерывной? Постройте ее график.

№ 2

Иcледовать на непрерывность функции

а) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{2-x}}$; б) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{3-3^{\frac{1}{x}}}$; г) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\le 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$;

№ 3

Исследовать характер разрыва функции $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^x$ в точке $x=-1$.

ЗАНЯТИЕ 4

Производная функции

Вопросы к занятию

1. Производная функции.
2. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной.
3. Производные простейших элементарных функций.
4. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.
5. Основные правила нахождения производных.
6. Производные высших порядков.

Литература: [1, с. 224 – 227, 231 – 236], [2, с. 176 – 193], [3, с. 359 – 374], [4, с. 189 – 193], [5, с. 98 – 101], [6, с. 67 – 82].

Образцы решения задач

Задача1. Найти производную функции $y=\dfrac{2x+3}{x}$, используя определение производной.

Решение. Придадим аргументу x приращение Δx, тогда функция получит приращение

$$\Delta y = \frac{2(x+\Delta x)+3}{x+\Delta x} - \frac{2x+3}{x} = \frac{2x^2+2x\Delta x+3x-2x^2-3x-2x\Delta x-3\Delta x}{(x+\Delta x)x} =$$

$$= \frac{-3\Delta x}{(x+\Delta x)x}.$$

Найдем предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3\Delta x}{(x+\Delta x)x\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3}{(x+\Delta x)x} = -\frac{3}{x^2},$$

т.е. $y' = -\frac{3}{x^2}$.

Задача2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования найти производные функций:

а) $y = 4x^3 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 5$; б) $y = 2^x \cdot \sin x$; в) $y = e^x \cdot \mathrm{tg} x - \log_3 x$;

г) $y = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}$; д) $y = \frac{\mathrm{arctg} x}{\ln x} + \arccos x$.

Решение. Будем использовать основные правила нахождения производных. Если функция $u(x)$ и $v(x)$ имеют конечные производные u', v' в некоторой точке x и c постоянная ,то справедливы следующие правила:

$$(cu)' = cu' \ (1), \quad (u+v)' = u' + v' \ (2), \quad (u \cdot v)' = u'v + v'u \ (3),$$

и если функция $v(x)$ в указанной точке отлична от нуля, то

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (4).$$

а) используя (2) и (1) и таблицу производных основных элементарных функций, имеем:

$$y' = (4x^3 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 5)' = (4x^3)' + (2\sqrt{x})' - \left(\frac{3}{x^2}\right)' + (5)' =$$

$$= 4\cdot(x^3)' + 2(x^{\frac{1}{2}})' - 3\cdot(x^{-2})' + 0 = 4\cdot 3x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3\cdot(-2)\cdot x^{-3} =$$

$$= 12x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3}.$$

б) Используя (3) получаем

$$y' = (2^x \cdot \sin x)' = (2^x)' \cdot \sin x + 2^x \cdot (\sin x)' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sin x + 2^x \cdot \cos x.$$

в) По правилу (2), а затем (3) имеем

$$y' = (e^x \cdot \mathrm{tg}x - \log_3 x)' = (e^x \mathrm{tg}x)' - (\log_3 x)' = (e^x)' \mathrm{tg}x +$$

$$+ e^x (\mathrm{tg}x)' - \frac{1}{x \ln 3} = e^x \cdot \mathrm{tg}x + e^x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x \ln 3}.$$

г) Используя правило (4), а затем (2) получаем

$$y' = \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right)' = \frac{(\cos x + 1)'(\cos x - 1) - (\cos x + 1)(\cos x - 1)'}{(\cos x - 1)^2} =$$

$$= \frac{((\cos x)' + (1)')(\cos x - 1) - (\cos x + 1)((\cos x)' - (1)')}{(\cos x - 1)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \cos x + \sin x + \sin x \cdot \cos x + \sin x}{(\cos x - 1)^2} = \frac{2\sin x}{(\cos x - 1)^2}.$$

д) Пользуясь правилом (2), а затем (4) получаем

$$y' = \left(\frac{\text{arctg}x}{\ln x} + \arccos x\right)' = \left(\frac{\text{arctg}x}{\ln x}\right)' + (\arccos x)' =$$

$$= \frac{(\text{arctg}x)' \cdot \ln x - \text{arctg}x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln x - \text{arctg}x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{(1+x^2) \cdot \ln x} - \frac{\text{arctg}\, x}{x \ln^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Задача 3. Найти производные функций

а) $y = ctg^2 x$; б) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$; в) $y = \sqrt[3]{(x^2+3)^5}$;

г) $y = 5^{7-3x}$; д) $y = \arcsin\sqrt{x}$.

Решение. Если дана сложная функция $y = f(\varphi(x))$, причем функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x, производную $u' = \varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ в соответствующей точке u производную $y'_u = f'(u)$.

Тогда

$$y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x) \quad (5) \text{ или } y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad (5')$$

а) Имеем $y = u^2$, где $u = ctgx$. Тогда по $(5')$ получаем $y' = 2 \cdot u \cdot u'$ или

$$y' = 2\text{ctg}x \cdot (\text{ctg}x)' = 2\text{ctg}x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}.$$

б) Здесь имеем $y = u^4$, где $u = \frac{x-1}{x+1}$. Тогда, используя $(5')$ и (4), получаем $y' = 4u^3 \cdot u'$ или

$$y' = 4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = 4\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \cdot \frac{(x-1)'\cdot(x+1)-(x+1)'(x-1)}{(x+1)^2} =$$

$$=4\cdot\frac{(x-1)^3}{(x+1)^3}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{8\cdot(x-1)^3}{(x+1)^5}.$$

в) Имеем $y=u^{\frac{5}{3}}$, где $u=x^2+3$. Тогда $y'=\frac{5}{3}u^{\frac{2}{3}}\cdot u'$ или

$$y'=\frac{5}{3}(x^2+3)^{\frac{2}{3}}\cdot(x^2+3)'=\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{(x^2+3)^2}\cdot 2x=\frac{10}{3}x\cdot\sqrt[3]{(x^2+3)^2}.$$

г) Имеем $y=5^u$, где $u=7-3x$. Следовательно $y'=5^u\cdot\ln 5\cdot u'$ или

$$y'=5^{7-3x}\cdot\ln 5\cdot(7-3x)'=5^{7-3x}\cdot\ln 5\cdot(-3)=-3\cdot 5^{7-3x}\cdot\ln 5.$$

д) Здесь $y=\arcsin u$, где $u=\sqrt{x}$. Тогда $y'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ или

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Задача 4. Найти производные функций

а) $y=\operatorname{arcctg}^4 2^x$; б) $y=10^{1-\sin^5 x^2}$; в) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

г) $y=\cos 2x\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}$; д) $y=\frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. а) Используя формулу производной сложной функции (5'), имеем:

$$y' = (\mathrm{arcctg}^4 2^x)' = 4\mathrm{arcctg}^3 2^x \cdot (\mathrm{arcctg} 2^x)' =$$

$$= 4\mathrm{arcctg}^3 2^x \cdot \left(-\frac{1}{1+(2^x)^2} \right) \cdot (2^x)' = -\frac{4\mathrm{arcctg}^3 2^x}{1+2^{2x}} \cdot 2^x \cdot \ln 2.$$

б) Здесь также используем формулу производной сложной функции (5')
:

$$y' = (10^{1-\sin^5 x^2})' = 10^{1-\sin^5 x^2} \cdot \ln 10 \cdot (1-\sin^5 x^2)' =$$

$$= 10^{1-\sin^5 x^2} \cdot \ln 10 \cdot (-5\sin^4 x^2) \cdot (\sin x^2)' =$$

$$= -5 \cdot 10^{1-\sin^5 x^2} \cdot \ln 10 \cdot \sin^4 x^2 \cdot \cos x^2 \cdot (x^2)' =$$

$$= -5 \cdot 10^{1-\sin^5 x^2} \cdot \ln 10 \cdot \sin^4 x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x =$$

$$= -10^{2-\sin^5 x^2} \cdot x \cdot \ln 10 \cdot \sin^4 x^2 \cdot \cos x^2.$$

в) Здесь целесообразно вначале преобразовать функцию, используя свойства логарифма

$$\ln \sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \frac{1}{3}\Big(\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x)\Big).$$

Тогда

$$y' = \left(\frac{1}{3}\Big(\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x)\Big) \right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\sin x} \cdot (1+\sin x)' - \frac{1}{1-\sin x}(1-\sin x)' \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} \right) = \frac{2\cos x}{3\cos^2 x} = \frac{2}{3\cos x}.$$

г) Применяя формулы производной произведения (3) и производной сложной функции (5'), получаем

$$y'=\left(\cos 2x\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}\right)'=\left(\cos 2x\right)'\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos 2x\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)'=-\sin 2x\cdot(2x)'\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}\ +\ \cos 2x\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot\left(1+\sin^2 x\right)'=-2\sin 2x\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}\ +$$

$$+\frac{\cos 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot 2\sin x\cdot\left(\sin x\right)'=-2\sin 2x\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}\ +$$

$$+\ \frac{2\cos 2x\cdot\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}=\frac{-4\sin 2x\left(1+\sin^2 x\right)+\cos 2x\cdot\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

д) Используя формулы производной частного (4) и производной сложной функции (5'), имеем

$$y'=\left(\frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{\left((x-1)^3\right)'\cdot\sqrt{x^2+1}\ -\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\cdot(x-1)^3}{x^2+1}=$$

$$=\frac{3(x-1)^2\cdot(x-1)'\cdot\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x^2+1\right)'(x-1)^3}{x^2+1}=$$

$$=\frac{3(x-1)^2\sqrt{x^2+1}-\frac{x\cdot(x-1)^3}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2\cdot\frac{3\left(x^2+1\right)-x(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$$

$$=\frac{(x-1)^2\left(3x^2+3-x^2+x\right)}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}=\frac{(x-1)^2\left(2x^2+x+3\right)}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

Задача 5. Пользуясь логарифмической производной найти производные функций:

а) $y=(x)^{\cos x}$; б) $y=(\mathrm{arctg}x)^{\ln x}$.

Решение: а) Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ln y=\cos x\cdot\ln x.$$

Производную от левой части последнего равенства находим по правилу дифференцирования сложной функции, а от правой по правилу дифференцирования произведения:

$\frac{1}{y}\cdot y'=(\cos x)'\cdot\ln x+\cos x\cdot(\ln x)'$. Или $\frac{y'}{y}=-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}$.

Отсюда $y'=y\cdot\left(-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$. Или

$$y'=x^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}\right).$$

б) Имеем $\ln y = \ln x \cdot \ln \operatorname{arctg} x$. Тогда

$$\frac{y'}{y} = (\ln x)' \ln \operatorname{arctg} x + \ln x (\ln \operatorname{arctg} x)'.$$

Или $\frac{y'}{y} = \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Отсюда

$$y' = y\left(\frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x} + \frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2)}\right).$$ Или

$$y' = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x} + \frac{\ln x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right).$$

Задача 6. Найти производные неявных функций

а) $2^{xy} + x^4 - y^3 = 0$; б) $xy^2 + 5 = \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}$.

Решение. а) Дифференцируем обе части данного уравнения, считая y функцией от x:

$$2^{xy} \cdot \ln 2 \cdot (y + x \cdot y') + 4x^3 - 3y^2 \cdot y' = 0.$$

Тогда $2^{xy} \cdot \ln 2 \cdot x \cdot y' - 3y^2 y' = -2^{xy} y \ln 2 - 4x^3$. Откуда

$$y' = \frac{2^{xy} \cdot y \cdot \ln 2 + 4x^3}{3y^2 - 2^{xy} x \cdot \ln 2}.$$

б) Дифференцируя по x, получаем

$$y^2 + x \cdot 2y \cdot y' = \frac{-1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(\frac{1}{y} + x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) \cdot y'\right).$$

Или

$$y^2 + 2xy \cdot y' = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{xy'}{x^2+y^2},$$

или $-2xy\cdot y' + \dfrac{xy'}{x^2+y^2} = y^2 + \dfrac{y}{x^2+y^2}$. Откуда

$$y' = \frac{y^2x^2 + y^4 + y}{x - 2x^3y - 2xy^3}.$$

Задача 7. Найти производные функций, заданных параметрически

$$\text{а) } \begin{cases} x = t^3 \\ y = \ln t \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}.$$

Решение. Учитывая,что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{6}$$

имеем:

а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{1}{t}}{3t^2} = \dfrac{1}{3t^3}$.

б) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos t\cdot(-\sin t)}{2\sin t\cdot\cos t} = -1$.

Задача 8. Записать уравнение касательной к графику функции $y = \ln(x^2 - 6x + 9)$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \tag{7}$$

Найдем производную данной функции

$$y'=(\ln(x^2-6x+9))'=(\ln(x-3)^2)'=(2\ln(x-3))'=\frac{2}{x-3}.$$

Тогда искомое уравнение касательной примет вид

$$y=\ln 1+\frac{2}{-1}\cdot(x-2) \text{ или } y=-2x+4.$$

Задача 9. Найдите производные указанного порядка от данных функций

а) $y=(1+9x^2)\cdot\operatorname{arctg}3x,\ y''$; б) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ y''$;

в) $y=\cos x^2,\qquad y'''$; г) $y=\sin^2 x,\qquad y'''(\frac{\pi}{2})$;

д) $y=2^{3x+2},\qquad y^{(n)}$.

Решение. а) Найдем первую производную

$$y'=18x\cdot\operatorname{arctg}3x+(1+9x^2)\cdot\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3=18x\cdot\operatorname{arctg}3x+3.$$

Тогда

$$y''=(y')'=(18x\operatorname{arctg}3x+3)'=18\operatorname{arctg}3x+\frac{18x}{1+9x^2}\cdot 3=$$

$$=18\operatorname{arctg}3x+\frac{54x}{1+9x^2}.$$

б) Имеем

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$y''=((1+x^2)^{-0,5})'=-0,5\cdot\left(1+x^2\right)^{-1,5}\cdot 2x=-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

в) Находим производную первого порядка, а затем производные второго и третьего порядков:

$$y'=-\sin x^2\cdot 2x,$$

$$y''=-2\sin x^2-2x\cdot\cos x^2\cdot 2x=-2\sin x^2-4x^2\cos x^2,$$

$$y'''=-4x\cdot\cos x^2-8x\cdot\cos x^2+4x^2\cdot\sin x^2\cdot 2x=$$

$$=-12x\cdot\cos x^2+8x^3\cdot\sin x^2,$$

г) имеем

$$y'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x,\quad y''=2\cos 2x,\quad y'''=-4\sin 2x.$$

Тогда $y'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-4\sin\pi=0$.

д) Имеем $y'=3\cdot 2^{3x+2}\cdot\ln 2,\ y''=3^2\cdot 2^{3x+2}\cdot\ln^2 2,\ \ldots,$

$$y^{(n)}=3^n\cdot 2^{3x+2}\cdot\ln^n 2.$$

Домашнее задание

№ 1

Найти производные функций

а) $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; б) $y=\sin^2\dfrac{1}{x}$; в) $y=\operatorname{arctg}^3\dfrac{x^2-1}{x}$;

г) $y=\lg(\log_2(\ln x))$; д) $y=e^{\sqrt{x\cdot\cos^3 x}}$; е) $y=x^{x^2}$;

ж) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$; з) $\begin{cases} x=\ln(\sin t) \\ y=\ln(\sin 2t) \end{cases}$; и) $x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{2}{3}}\cdot x=\sin y$.

№ 2

Найти вторые производные функций

а) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; б) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$.

№ 3

Найти точки в которых касательная к графику функции $y=\cos 2x-5\cos x$ параллельно оси абсцисс.

ЗАНЯТИЕ 5

Дифференциал функции. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правила Лопиталя

Вопросы к занятию

1. Дифференциал функции и его геометрический смысл.
2. Теоремы Ферма и Ролля.
3. Теоремы Лагранжа и Коши.
4. Правила Лопиталя.

Литература: [1, с. 227 – 228, 255 – 262], [2, с. 209 – 215], [3, с. 377 – 389, 400 – 404], [4, с. 198 – 204], [5, с. 104 – 106], [6, с. 102 – 108].

Образцы решения задач

Задача 1. Найти дифференциалы функций:

а) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$; б) $y=\ln\cos(2x+1)$.

Решение. Учитывая, что $dy=y'dx$ (1)

имеем

а) $dy=\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)'dx=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2xdx=\frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}dx$.

б)

$$dy=\left(\ln\cos\left(2x+1\right)\right)'dx=\frac{1}{\cos\left(2x+1\right)}\cdot\left(-\sin\left(2x+1\right)\right)\cdot 2\cdot dx=$$

$$=-2\operatorname{tg}\left(2x+1\right)dx.$$

Задача 2. Вычислить приближенно

а) $\sqrt[4]{256{,}5}$; б) $\ln 0{,}97$.

Решение. Если функция $y=f\left(x\right)$ в точке x имеет конечную производную y', то ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y=y'\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \qquad (2),$$

где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Учитывая, что $dy=y'\Delta x$ из равенства (2) следует, что при достаточно малых $\left|\Delta x\right|$

$$\Delta y\approx dy \quad . \qquad (3)$$

Перепишем (3) в виде:

$$f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\approx f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x.$$

Тогда

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x. \qquad (3`)$$

а) Воспользовавшись формулой (3`), получим

$$\sqrt[4]{x_0+\Delta x} \approx \sqrt[4]{x_0} + \frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x_0^3}}\cdot\Delta x.$$

Пусть $x_0 = 256$, тогда $\Delta x = 0,5$, следовательно,

$$\sqrt[4]{256,5} \approx \sqrt[4]{256} + \frac{1}{4\sqrt[4]{256^3}}\cdot 0,5 = 4 + \frac{1}{512} \approx 4,002.$$

б) Используя формулу (3`) имеем

$$\ln\left(x_0+\Delta x\right) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0}\cdot\Delta x.$$

Пусть $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,03$ тогда

$$\ln 0,97 = \ln\left(1-0,03\right) \approx \ln 1 + \frac{1}{1}\cdot\left(-0,03\right) = -0,03.$$

Задача 3. Удовлетворяет ли функция $f(x) = 3 - \sqrt[5]{x^4}$ условиям теоремы Ролля на отрезке [–1;1]?

Решение. Функция непрерывна на [–1; 1] и на концах этого отрезка принимает равные значения $f(1) = f(-1) = 2$. Однако внутри отрезка имеется точка $x = 0$, в которой производная $f'(x) = -\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$ не является конечной. Следовательно условия теоремы Ролля не выполнены. И действительно, $f'(x)$ не равняется нулю на отрезке [–1;1], т.е. не существует точки $c \in (-1;1)$, в которой $f'(c) = 0$.

Задача 4. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin x - x^3 + 6x}{2x^5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 3x}$.

Решение. В примерах а) – в) имеем неопределенности вида $\frac{0}{0}$, в примерах г) – д) – вида $\frac{\infty}{\infty}$.

а) Рассмотрим функции $f(x)=x^3-8$ и $g(x)=x^2-5x+6$, их производные $f'(x)=3x^2$ и $g'(x)=2x-5$ существуют и конечны, например, на интервале $(1,5;2,5)$, причем для всех x из этого интервала $g'(x)\neq 0$ (по теореме Лопиталя требуется выполнения этих условий в некоторой проколотой δ-окрестности точки 2) Существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Применяя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{2x-5}=\frac{12}{-1}=-12.$$

б)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^2 x}{\cos^2 x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x}{\cos x+1}=$$

$$=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

Здесь, применив правило Лопиталя один раз, получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую раскрыли сократив дробь на $\cos x-1$.

в) При вычислении предела $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ иногда правило Лопиталя приходится применять последовательно несколько раз, если условиям теорем Лопиталя удовлетворяют не только функции $f(x)$ и $g(x)$, но и их производные $f'(x)$ и $g'(x)$. Тогда вычисление предела $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ можно свести к вычислению предела $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ и т.д.

$$\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x - x^3 + 6x}{2x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{-6\cos x - 3x^2 + 6}{10x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{6\sin x - 6x}{40x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6\cos x - 6}{120x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-6\sin x}{240x} = -\frac{1}{40}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{40}\cdot 1 = -\frac{1}{40}.$$

Здесь правило Лопиталя применим четыре раза, а затем воспользовались первым замечательным пределом.

г) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2} = 0.$$

Здесь правило Лопиталя применили два раза.

д)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{\frac{1}{\sin 3x}\cdot 3\cos 3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\cos 3x} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{\cos x} = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1.$$

Здесь правило Лопиталя применили два раза.

Задача 5. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x})$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\pi - 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{3}{2x-2}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$.

Решение. а) Здесь имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Сведем ее к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, а затем применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=-1\cdot 1\cdot 0=0.$$

б) В этом примере имеем сумму двух бесконечно больших величин разного знака, т.е. неопределенность вида $\infty-\infty$. Выражение $\mathrm{ctg}x+\dfrac{1}{\sin x}$ представим в виде дроби и сведем неопределенность вида $\infty-\infty$ к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, затем применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\pi}\left(\mathrm{ctg}x+\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{\cos x}=\frac{0}{-1}=0.$$

в) В этом примере имеем неопределенность вида 0^0. Положим $y=(\sin x)^x$, тогда $\ln y=x\cdot\ln\sin x$. Получили логарифм от функции принимает неопределенность вида $0\cdot\infty$. Раскрывая эту неопределенность найдем предел $\ln y$, а затем найдем предел и самой функции

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}x\ln\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos x-x^2\sin x}{\cos x}=0,$$

отсюда $\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1$.

г) Здесь имеем неопределенность ∞^0. Аналогично, как и в примере в) полагаем $y=(\mathrm{tg}x)^{\pi-2x}$ и логарифмируем обе части полученного равенства: $\ln y=(\pi-2x)\mathrm{tg}x$. Найдем предел $\ln y$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\mathrm{tg}x.$$

Полученную неопределенность вида $0\cdot\infty$ преобразуем к неопределнности вида $\frac{0}{0}$, а затем применем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-2x)\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi-2x}{\cos x}\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi-2x}{\cos x}\cdot 1 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi-2x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{-\sin x} = \frac{-2}{-1} = 2 \quad ,$$

отсюда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^2.$

д) Здесь имеем неопределенность 1^∞. Также полагаем $y = x^{\frac{3}{2x-2}}$, тогда $\ln y = \frac{3}{2x-2}\cdot\ln x$ и

$$\lim_{x\to1} \ln y = \lim_{x\to1} \frac{3\ln x}{2x-2} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{3}{x}}{2} = \frac{3}{2},$$

отсюда $\lim\limits_{x\to1} y = e^{\frac{3}{2}}.$

е) Заметим, что правило Лопиталя применимо тогда, когда выполняются условия теоремы, в частности, когда существует предел отношения производных. Может оказаться, что предел отношения функций существует, а предел отношения производных не существует. В этом случае нужно раскрывать неопределенность другим способом.

В этом примере мы имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, но отношение производных $\frac{1+\cos x}{1}$ при $x\to\infty$ предела не имеет, поэтому правило Лопиталя не применимо. Поделив числитель и знаменатель дроби $\frac{x+\sin x}{x}$ на x, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Домашнее задание

№ 1

Найти приближенное значение функции $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ при $x=3{,}95$.

№ 2

Из теоремы Лагранжа определить значение c для функции $y=3x^2-4x+1$ на отрезке [0; 2].

№ 3

Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{\sin(x-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^{2x}}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x^2-4}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{2}{3+\ln x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}2x)^{\cos x}$; е) $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{ctg}\,x)^{\frac{2}{\ln x}}$.

ЗАНЯТИЕ 6

Возрастание и убывание функции, экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Вопросы к занятию

1. Условия постоянства, возрастания и убывания функции .
2. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума.
3. Критические точки первого рода функции.
4. Достаточное условие экстремума по знаку первой производной.
5. Достаточное условие экстремума по знаку второй производной.
6. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Литература: [1, с. 273 – 284], [2, с. 216 – 224], [3, с. 404 – 411], [4, с. 205 – 208], [5, с. 107 – 110], [6, с. 115 – 123].

Образцы решения задач

Задача 1. Найти интервалы возрастания и убывания функций

а) $y = x^3 - 12x + 5$; б) $y = x^2 - 2\ln x$; в) $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$;

г) $y = x - \operatorname{arctg} x$; д) $y = \dfrac{4}{3}x^2 \cdot \sqrt[3]{6x-7}$.

Решение. а) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, имеет производную $y' = 3x^2 - 12$, которая также определена на всей числовой прямой. Найдем промежутки знакопостоянства производной. Для этого найдем стационарные точки функции, решив уравнение $3x^2 - 12 = 0$, получаем $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Эти точки разбивают числовую прямую на интервалы $(-\infty; -2)$, $(-2;\, 2)$, $(2; +\infty)$, на каждом из которых производная функции непрерывна и сохраняет свой знак, $y' > 0$ при $x \in (-\infty; -2)$ и $x \in (2;\, +\infty)$; $y' < 0$ при $x \in (-2;\, 2)$. По достаточному условию возрастания и убывания функции на промежутке имеем, что на каждом из интервалов $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$ функция возрастает, а на интервале $(-2;\, 2)$ – убывает.

б) Данная функция определена и непрерывна при $x > 0$. Ее производная $y' = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2 - 2}{x}$ определена и непрерывна для любого $x \in (0; +\infty)$. Из условия $y' = 0$ найдем стационарную точку функции: $x_1 = 1$. Эта точка разбивает интервал $(0; +\infty)$ на два интервала $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ на каждом из которых производная сохраняет свой знак. На рисунке 7 расставлены знаки y'

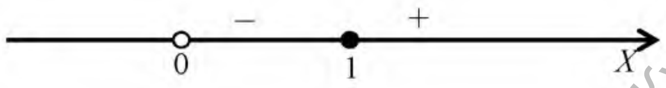


Рис. 7

Следовательно, на интервале $(0; 1)$ функция убывает, на интервале $(1; +\infty)$ функция возрастает.

в) Функция определена и непрерывна во всех точках числовой прямой, кроме точки $x = -1$, имеет производную

$$y' = \frac{(x+1)^2 - x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x+1-2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

при $x \neq -1$. Стационарной точкой функции будет точка $x = 1$. Определим промежутки знакопостоянства производной

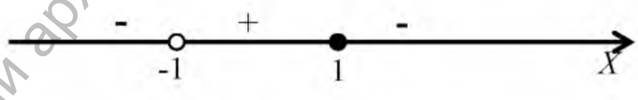


Рис. 8

Таким образом на каждом из интервалов $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция убывает, а на интервале $(-1; 1)$ функция возрастает.

г) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Ее производная

$$y' = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

также определена и непрерывна на всей числовой прямой. Стационарной точкой функции будет точка $x=0$. На рисунке 9 расставлены знаки производной

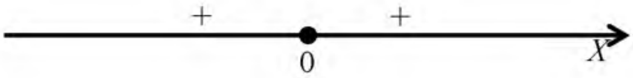


Рис. 9

Следовательно функция возрастает на каждом из интервалов $(-\infty;\, 0)$ и $(0;\, +\infty)$. В силу непрерывности функции в точке $x=0$ делаем вывод, что функция возрастает на всей числовой прямой.

д) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Найдем ее производную

$$y'=\frac{4}{3}(2x\cdot\sqrt[3]{6x-7}+x^2\cdot\frac{1}{3}(6x-7)^{-\frac{2}{3}}\cdot 6)=\frac{4}{3}(2x\cdot\sqrt[3]{6x-7}+$$

$$+\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}})=\frac{8x}{3}\cdot\frac{6x-7+x}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}=\frac{8x(7x-7)}{3\sqrt[3]{(6x-7)^2}}.$$

Из условия $y'=0$ находим стационарные точки функции $x_1=0$, $x_2=1$. В точке $x_3=\frac{7}{6}$ производная функции бесконечна. Учитывая, что эта точка является внутренней точкой области определения функции, заключаем $x_3=\frac{7}{6}$ – критическая точка первого рода функции. Определим промежутки знакопостоянства производной

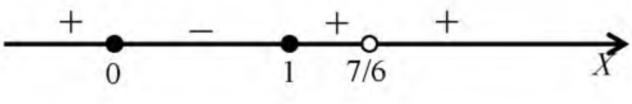


Рис. 10

Следовательно на каждом из интервалов $(-\infty;0)$, $(1;\frac{7}{6})$, $(\frac{7}{6};+\infty)$ функция возрастает, на интервале $(0;1)$ функция убывает. Так как функция непрерывна в точке $x_3 = \frac{7}{6}$ можно сделать вывод о ее возрастании на интервале $(1;+\infty)$. И так имеем: функция возрастает на каждом из интервалов $(-\infty;0)$, $(1;+\infty)$ и убывает на интервале $(0;1)$.

Задача 2. Исследовать на экстремум функции, используя достаточное условие экстремума по знаку первой производной

а) $y = e^{x^2-4x+3}$; б) $y = \sqrt{-x^2-6x+7}$; в) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$;

г) $y = (x-2)^2 \cdot (x-1)^3$; д) $y = x^2 \cdot \sqrt[5]{(x-3)^2}$.

Решение. а) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Находим ее производную $y' = e^{x^2-4x+3} \cdot (2x-4)$, которая также определена на всей числовой прямой. Критической точкой первого рода функции будет стационарная точка $x_1 = 2$. В интервале $(-\infty;2)$ $y'<0$, в интервале $(2;+\infty)$ $y'>0$, то есть при переходе через точку 2 производная функции меняет знак с минуса на плюс. Следовательно по достаточному условию экстремума по знаку первой производной в точке $x_1 = 2$ функция имеет минимум: $y(2) = \frac{1}{e}$.

б) Для нахождения области определения функции решим неравенство $-x^2-6x+7 \geq 0$. Получаем, что функция определена и непрерывна на отрезке $[-7;1]$. Найдем производную функции

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{-x^2-6x+7}} \cdot (-2x-6) = \frac{-x-3}{\sqrt{-x^2-6x+7}}.$$

Полагая $y' = 0$, из уравнения $\frac{-x-3}{\sqrt{-x^2-6x+7}} = 0$ находим стационарную точку: $x_1 = -3$. В точках $x_2 = -7$ и $x_3 = 1$ производная функции бесконечна, однако указанные точки не будут критическими точками первого рода функции поскольку они не являются внутренними точками ее области определения. Следовательно $x_1 = -3$ единственная критическая точка первого рода функции. Определим промежутки знакопостоянства производной

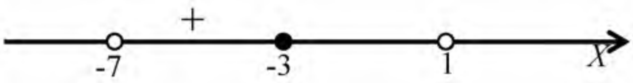


Рис. 11

Так как $y' > 0$, в интервале $(-7; -3)$, $y' < 0$ на интервале $(-3;1)$, то точка $x_1 = -3$ – точка максимума функции, ее максимум $y(-3) = 4$.

в) Область определения функции интервал $(0; +\infty)$. Функция непрерывна и дифференцируема в своей области определения, причем $y' = \dfrac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$. Из условия $y' = 0$, то есть $\dfrac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = 0$ находим стационарные точки функции $x_1 = 1$, $x_2 = e^2$. На рисунке 12 расставлены знаки y':

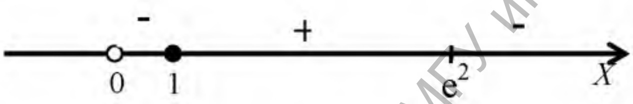


Рис. 12

Следовательно по достаточному условию экстремума функции по знаку первой производной в точке $x_1 = 1$ функция имеет минимум: $y(1) = 0$, в точке $x_2 = e^2$ – максимум $y(e^2) = \dfrac{4}{e^2}$.

г) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$y' = 2(x-2)\cdot(x-1)^3 + (x-2)^2\cdot 3(x-1)^2 = (x-2)\cdot(x-1)^2\cdot(5x-8).$$

Полагая $y' = 0$, из уравнения $(x-2)(x-1)^2(5x-8) = 0$ находим стационарные точки функции: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{8}{5}$, $x_3 = 2$. Других критических точек первого рода функция не имеет, поскольку она дифференцируема на всей числовой прямой. На рисунке 13 расставлены знаки y'

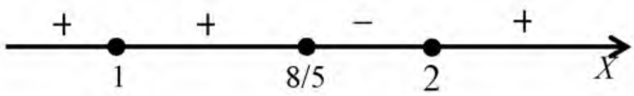


Рис. 13

Таким образом в точке $x_2 = \frac{8}{5}$ функция имеет максимум: $y\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{108}{3025}$, в точке $x_3 = 2$ – минимум: $y(2) = 0$. В точке $x_1 = 1$ экстремума нет, поскольку при переходе через эту точку производная не меняет знак.

д) Функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел. Найдем производную функции

$$y' = 2x \cdot \sqrt[5]{(x-3)^2} + x^2 \cdot \frac{2}{5}(x-3)^{-\frac{3}{5}} = 2x \cdot \left(\sqrt[5]{(x-3)^2} + \frac{x}{5\sqrt[5]{(x-3)^3}}\right) =$$

$$= \frac{6x \cdot (2x-5)}{5\sqrt[5]{(x-3)^3}}.$$

Из условия $y' = 0$ находим стационарные точки функции $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{2}$. В точке $x_3 = 3$ функция не дифференцируема (производная функции в этой точке бесконечна), следовательно $x_3 = 3$ – критическая точка первого рода функции. На рисунке 14 расставлены знаки производной

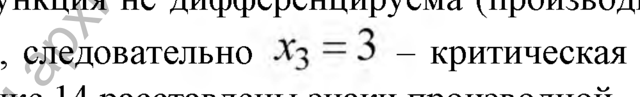


Рис. 14

С учетом перемены знаков производной и непрерывности функции в критических точках имеем, что в точках $x_1 = 0$ и $x_3 = 3$ функция имеет минимумы: $y(0)=0$, $y(3)=0$, в точке $x_2=\dfrac{5}{2}$ функция имеет максимум: $y\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{25}{4\sqrt[5]{4}}$.

Задача 3. Исследовать функции на экстремум, используя достаточное условие экстремума по знаку второй производной

а) $y=x^3-6x^2+9x+4$; б) $y=x-\ln(x+1)$.

Решение. а) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Найдем ее производную и стационарные точки

$$y'=3x^2-12x+9.\ 3x^2-12x+9=0,\ x_1=1,\ x_2=3.$$

Других критических точек первого рода функция не имеет, поскольку она дифференцируема на всей числовой прямой. Найдем вторую производную функции и значения второй производной в стационарных точках

$$y''=6x-12,\ y''(1)=-6,\ y''(3)=6.$$

Поскольку $y''(1)<0$ по достаточному условию экстремума по знаку второй производной заключаем, что в точке $x_1=1$ функция имеет максимум: $y(1)=8$, а так как $y''(3)>0$, то в точке $x_2=3$ функция имеет минимум: $y(3)=4$.

б) Функция определена и непрерывна на интервале $(-1;+\infty)$. Находим ее производную $y'=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$ и стационарную точку $x_1=0$. Находим вторую производную функции $y''=\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Так как $y''(0)=1>0$, то в точке $x_1=0$ функция имеет минимум: $y(0)=0$.

Задача 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x^4-16x^2+5$ на отрезке $[-1;3]$.

Решение. Функция непрерывна на данном отрезке $[-1;3]$ и следовательно, принимает на нем свои наименьшее и наибольшее значения. Функция дифференцируема на всей числовой прямой, причем $y'=8x^3-32x$. Из уравнения $8x^3 - 32x = 0$ найдем критические точки первого рода функции: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$. Из них на отрезке $[-1;3]$ находятся только точки $x_1 = 0$, $x_3 = 2$. Следовательно для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на данном отрезке требуется найти значения функции в точках $x_1 = 0$, $x_3 = 2$ и на концах отрезка, а затем среди них выбрать наибольшее и наименьшее значения. То есть

$$\max_{[-1;3]} y = \max\{y(0), y(2), y(-1), y(3)\} = \max\{5, -27, -9, 23\} = 23.$$

$$\min_{[-1;3]} y = \min\{y(0), y(2), y(-1), y(3)\} = \min\{5, -27, -9, 23\} = -27.$$

Задача 5. Бак цилиндрической формы должен иметь объем 128π. Найти его радиус основания и высоту при которых площадь его поверхности (с крышкой) будет наименьшей.

Решение. Обозначим через x радиус основания цилиндра, через h его высоту. Тогда объем V цилиндра находится по формуле $V = \pi x^2 h$, откуда, учитывая, что $V = 128\pi$, находим $h = \dfrac{128}{x^2}$. Пусть S площадь поверхности цилиндра. Тогда $S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + \dfrac{256\pi}{x}$. Следовательно, требуется найти точку в которой функция $S(x) = 2\pi x^2 + \dfrac{256\pi}{x}$ принимает свое наименьшее значение, где $x \in (0; +\infty)$. Функция $S(x)$ дифференцируема на промежутке $(0; +\infty)$, причем $S'(x) = 4\pi x - \dfrac{256\pi}{x^2}$ обращается в нуль в единственной точке $x_1 = 4$. Так как $S'(x) < 0$ при $x \in (0;4)$ и $S'(x) > 0$ при $x \in (4; +\infty)$, то точка $x_1 = 4$ – точка минимума функции $S(x)$. Поскольку она единственная на интервале $(0; +\infty)$, то в этой точке функция $S(x)$ принимает свое наименьшее значение. И так, радиус цилиндра $x = 4$, высота цилиндра $h = \dfrac{128}{x^2} = \dfrac{128}{16} = 8$.

Домашнее задание:

№ 1

Найти интервалы монотонности и экстремумы функций

а) $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$; б) $y=\sqrt{x^2+9}-x$; в) $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{3}x$;

г) $y=x^3-3x^2-9x+8$; д) $y=x+\ln(x^2-3)$.

№ 2

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$ на отрезке [–1; 2].

№ 3

Найти наибольшее значение площади прямоугольника, вписанного в треугольник с основанием 4 и высотой 3, если две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие на его боковых сторонах.

ЗАНЯТИЕ 7

Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба. Асимптоты графика функции. Схема исследования функции

Вопросы к занятию

1. Выпуклость и вогнутость кривой.
2. Достаточное условие выпуклости, вогнутости графика функции.
3. Точки перегиба.
4. Критические точки второга рода функции.
5. Достаточное условие точки перегиба графика функции.
6. Асимптоты графика функции.
7. Схема исследования функции.

Литература: [1, с. 285 – 289], [2, с. 224 – 235], [3, с. 414 – 420], [4, с. 208 – 213], [5, с. 111 – 117], [6, с. 130 – 139].

Задача 1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графиков функций

а) $y = 3x^5 - 10x^4 + 5x + 47$; б) $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot (x-2)$; в) $y = 2x^2 + \ln x$.

Решение. а) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой и имеет там непрерывные производные

$$y' = 15x^4 - 40x^3 + 5; \qquad y'' = 60x^3 - 120x^2 = 60x^2(x-2).$$

Производная второго порядка обращается в нуль при $x_1 = 0, x_2 = 2$. При этом $y'' < 0$ на каждом из интервалов $(-\infty;0),(0;2)$ и $y''>0$ на интервале $(2;+\infty)$. Следовательно, учитывая непрерывность функции в точке 0, на основании достаточного условия выпуклости , вогнутости графика функции заключаем: график функции выпуклый на интервале $(-\infty;2)$, вогнутый на интервале $(2;+\infty)$. Поскольку y'' при переходе через критическию точку второго рода $x_2 = 2$ меняет знак, то по достаточному условию точки перегиба имеем, что точка $(2;-7)$ есть точка перегиба графика функции. Так при переходе через критическую точку $x_1 = 0$ вторая производная функции не меняет знака, то в точке с абсциссой 0 график функции перегиба не имеет.

б) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Ее производные первого и второго порядков

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cdot (x-2) + \sqrt[3]{x^2} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}},$$

$$y'' = \frac{15\sqrt[3]{x} - (5x-4)\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{9\sqrt[3]{x^2}} = \frac{10x+4}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

существуют на множестве $\mathbb{R}/\{0\}$. Критическими точками второго рода функции будут точки $x_1 = -\frac{2}{5}$, $x_2 = 0$. При этом $y''<0$ на интервале $(-\infty;-\frac{2}{5})$, $y'' > 0$ на каждом из интервалов $(-\frac{2}{5};0),(0;+\infty)$. Следовательно, учитывая непрерывность функции в точке 0 заключаем, что график функции выпуклый на интервале $(-\infty;-\frac{2}{5})$, вогнутый на интервале

$(-\frac{2}{5};+\infty)$, Аналогично, как и в пункте а) имеем, что точка $(-\frac{2}{5};-\frac{12}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}})$ – точка перегиба графика функции, в точке с абсциссой 0 график функции перегиба не имеет.

в) Функция определена и непрерывна на интервале $(0;+\infty)$ и имеет на этом интервале непрерывные производные

$$y' = 4x + \frac{1}{x}, \; y'' = 4 - \frac{1}{x^2}.$$

Критической точкой второго рода функции является точка $x_1 = \frac{1}{2}$. Поскольку $y'' < 0$ на интервале $(0;\frac{1}{2})$, $y'' > 0$ на интервале $(\frac{1}{2};+\infty)$ график функции выпуклый на интервале $(0;\frac{1}{2})$ и вогнутый на интервале $(\frac{1}{2};+\infty)$. Точка $(\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\ln 2)$ – точка перегиба графика функции.

Задача 2. Найти асимптоты графиков функций

а) $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 1}{(x-1)^3}$; б) $y = (x+1)\cdot e^{\frac{1}{x}}$;

в) $y = 3x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$; г) $y = x + e^{2x}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на множестве $(-\infty;1)\bigcup(1;+\infty)$, $x_1 = 1$ точка разрыва функции. График функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$, так как

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x^3 + x^2 + x + 1}{(x-1)^3} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{2x^3 + x^2 + x + 1}{(x-1)^3} = +\infty,$$

то есть оба односторонних предела бесконечны. График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=2$, так как

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x^2+x+1}{(x-1)^3}=2,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2+x+1}{(x-1)^3}=2.$$

б) Функция определена и непрерывна на множестве $(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. Точка $x_1=0$ – точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции в точке 0

$$\lim_{x\to-0}(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x}}=0,\quad \lim_{x\to+0}(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

Так как один из односторонних пределов в точке $x_1=0$ бесконечен, то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой графика функции. График функции имеет непрерывные бесконечные ветви, как в положительном, так и в отрицательном направлении оси Ox. Имеем

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}((x+1)\cdot e^{\frac{1}{x}}-x)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}(x\cdot e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)+\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+1=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}+1=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}+1=2.$$

При нахождении предела было использовано правило Лопиталя. Таким прямая $y=x+2$ – наклонная асимптота графика функции.

в) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Следовательно вертикальных асимптот график функции не имеет. График функции имеет непрерывные бесконечные ветви как в положительном так и в отрицательном направлении оси Ox. Имеем

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(3+\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x})=3,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}(3x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-3x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(3x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-3x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом в положительном направлении оси Ox график функции имеет наклонную асимптоту $y=3x+\dfrac{\pi}{2}$, в отрицательном – $y=3x-\dfrac{\pi}{2}$.

г) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Следовательно график функции не имеет вертикальных асимптот. График функции имеет непрерывные бесконечные ветви в обоих направлениях оси Ox. Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+e^{2x}}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}(x+e^{2x}-x)=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=0.$$

Следовательно прямая $y=x$ – наклонная асимптота графика функции в отрицательном направлении оси Ox. В положительном направлении оси Ox имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^{2x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2e^{2x}}{1}=+\infty.$$

Следовательно в положительном направлении оси Ox график функции наклонных асимптот не имеет

Задача 3. Исследовать функции и построить их графики

а) $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$; б) $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

Решение. Исследование функции и построение ее графика будем проводить по следующей схеме:

1) Находим область определения функции.

2) Находим точки пересечения с осями координат.

3) Выясняем является ли функция четной, нечетной, периодической.

4) Находим точки разрыва функции и односторонние пределы в них.

5) С помощью первой производной находим критические точки первого рода функции, промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы функции.

6) С помощью второй производной находим критические точки второго рода функции, промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба графика функции.

7) Находим асимптоты графика функции.

8) Все данные сводим в таблицу.

9) Строим график функции.

а) 1) $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

2) При $y=0$ из уравнения $\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}=0$ имеем $x=1$. Следовательно график функции пересекает ось Ox в точке $(1;0)$. При $x=0$ получаем $y=-0,25$, то есть график функции пересекает ось Oy в точке $(0;-0,25)$.

3) Поскольку область определения функции не симметрична относительно точки 0, то функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не является периодической.

4) Точка $x=2$ – точка разрыва функции. Так как

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 2+0}\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}=+\infty,$$

то $x=2$ точка разрыва функции с бесконечным скачком.

5) $$y'=\frac{3(x-1)^2\cdot(x-2)^2-(x-1)^3\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3},$$

критическими точками первого рода функции будут стационарные точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Определим промежутки знакопостоянства производной:

Рис. 15

С учетом непрерывности функции в точке $x_1 = 1$ заключаем, что функция возрастает на каждом из интервалов $(-\infty; 2)$, $(4; +\infty)$ и убывает на интервале $(2; 4)$. В точке $x_2 = 4$ функция имеет минимум: $y(4) = \frac{27}{4}$.

$$y'' = \frac{(2(x-1)\cdot(x-4)+(x-1)^2)\cdot(x-2)^3-(x-1)^2\cdot(x-4)\cdot 3(x-2)^2}{(x-2)^6} =$$

6)

$$= \frac{(x-2)^2(x-1)\cdot((3x-9)(x-2)-(3x-3)(x-4))}{(x-2)^6} = \frac{6(x-1)}{(x-2)^4},$$

критической точкой второго рода функции является точка $x_1 = 1$. На рисунке 16 расставлены знаки y'':

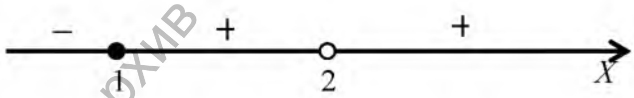


Рис. 16

Следовательно график функции выпуклый на интервале $(-\infty; 1)$ и вогнутый на каждом из интервалов $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$. Точка $(1; 0)$ – точка перегиба графика функции.

7) Поскольку оба односторонних предела функции в точке $x = 2$ бесконечны, то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции. График функции имеет бесконечные непрерывные ветви, как в положительном, так и в отрицательном направлении оси Ох. Имеем

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x-2)^2} = 1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-1}{(x-2)^2}=1.$$

Следовательно прямая $y=x+1$ – наклонная асимптота графика функции.

8) В таблицу заносим точки разрыва, критические точки первого и второго родов функции и интервалы на которые они разбивают область определения функции, отмечаем знаки первой и второй производных и делаем вывод о поведении функции на каждом из участков

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;4)$	4	$(4;+\infty)$
y'	+	0	+		–	0	+
y''	–	0	+		+	+	+
y	⌒	Точка перегиба y=0	◡	Точка разрыва	◡	Точка минимума $y_{\min}$=27/4	◡

9) Вначале строим асимптоты графика функции, а затем и сам график (рис. 17)

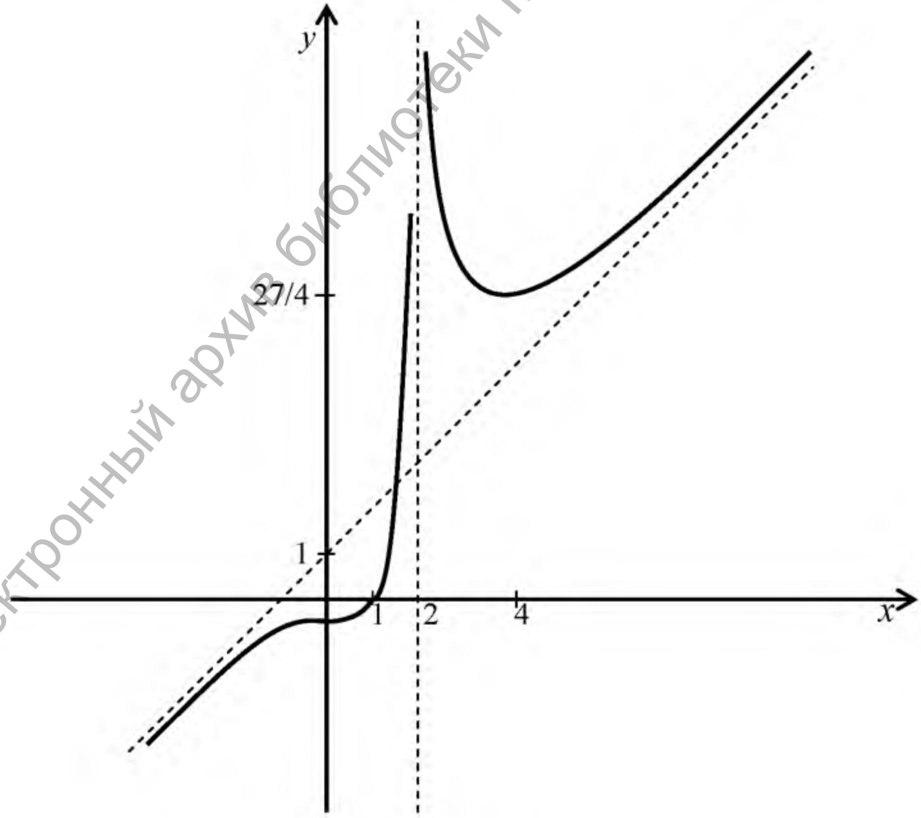


Рис. 17

б) 1) Функция определена на всей числовой прямой.

2) При $y=0$ из уравнения $\sqrt[3]{x^3-6x^2}=0$ имеем $x=0$, $x=6$, то есть график функции пересекает ось Ох в точках $(0;0)$, $(6;0)$, ось Оу в точке $(0;0)$.

3) Так как $y(-x)=\sqrt[3]{-x^3-6x}$ и не верно, что для каждого $x\in\mathbb{R}$ $y(-x)=y(x)$ или $y(-x)=-y(x)$, то функция не является ни четной ни нечетной. Функция не является периодической.

4) Функция не имеет точек разрыва.

5) $y'=\frac{1}{3}(x^3-6x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2-12x)=\frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}$. Из условия $y'=0$ находим стационарную точку функции $x_1=4$. Поскольку в точках $x_2=0$ и $x_3=6$ производная функции бесконечна, то указанные точки также являются критическими точками первого рода функции. Определим промежутки знакопостоянства производной

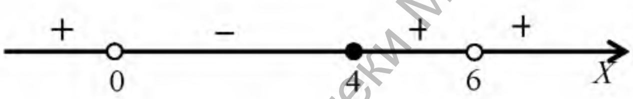


Рис. 18

Так как функция непрерывна в точке $x_3=6$, то заключаем, что функция возрастает на каждом из интервалов $(-\infty;0)$, $(4;+\infty)$ и убывает на интервале $(0;4)$. В точке $x_2=0$ функция имеет максимум: $y(0)=0$, в точке $x_1=4$ – минимум: $y(4)=-\sqrt[3]{32}$.

6)

$$y''=\frac{\sqrt[3]{x(x-6)^2}-(x-4)\cdot\frac{1}{3}(x(x-6)^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2-24x+36)}{\sqrt[3]{x^2\cdot(x-6)^4}}=$$

$$=\frac{-8x+48}{\sqrt[3]{x^4\cdot(x-6)^8}}=-\frac{8}{\sqrt[3]{x^4\cdot(x-6)^5}}.$$

Критическими точками второго рода функции являются точки $x_2 = 0$ и $x_3 = 6$, в которых вторая производная функции бесконечна. На рисунке 19 расставлены знаки y'':

Рис. 19

Следовательно в силу непрерывности функции в точке $x_2 = 0$ график функции вогнутый на интервале $(-\infty; 6)$, выпуклый на интервале $(6; +\infty)$. Точка $(6;0)$ – точка перегиба графика функции.

7) Вертикальных асимптот график функции не имеет. График функции имеет бесконечные непрерывные ветви, как в положительном, так и в отрицательном направлениях оси Ох. Имеем

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - k\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - x)\cdot(\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2)^2} + x\cdot\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} + x^2)}{\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2)^2} + x\cdot\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2)^2} + x\cdot\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} + x^2} = -2.$$

Следовательно прямая $y = x - 2$ является наклонной асимптотой графика функции.

8)

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;6)$	6	$(6;+\infty)$
y'	+		–	0	+		+
y''	+		+	+	+		–
y		Точка максимума $y_{max}=0$		Точка минимума $y_{min}= -\sqrt[3]{32}$		Точка перегиба $y=0$	

9) График функции построен на рисунке 20.

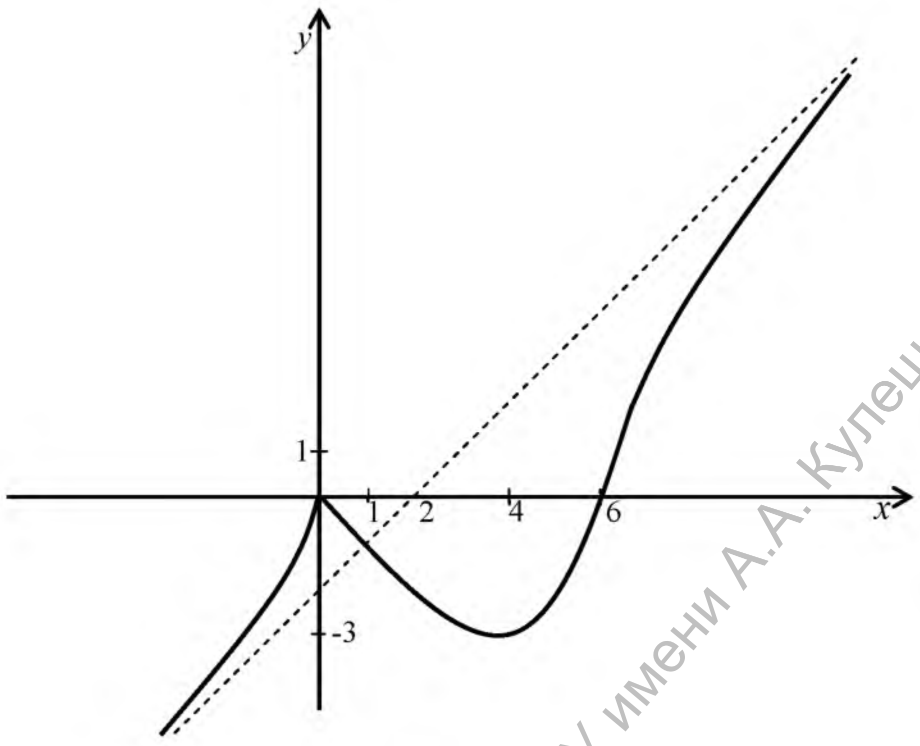


Рис. 20

Домашнее задание

№ 1

Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графиков функций

а) $y=-x^4+2x^2-3$; б) $y=4x+3\sqrt[3]{x^2}$.

№ 2

Найти асимптоты графиков функций

а) $y=e^{\frac{x}{x+1}}$; б) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

№ 3

Исследовать функцию и построить ее график

$$y=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{x^2}.$$

ЗАНЯТИЕ 8

Комплексные числа

Вопросы к занятию

1. Алгебраическая форма комплексного числа .
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
3. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
4. Модуль и аргумент комплексного числа.
5. Тригонометрическая форма комплексного числа.
6. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Литература: [1, с. 36 – 42], [2, с. 438 – 444], [3, с. 76 – 91], [7, с. 9 – 12].

Образцы решения задач

Задача 1. Сложить $(-4+7i)+(2-3i)$.

Решение. При сложении комплексных чисел записанных в алгебраической форме, их действительные части и коэффициенты при мнимых частях складываются:

$$(-4+7i)+(2-3i)=(-4+2)+(7+(-3))\,i=-2+4i.$$

Задача 2. Перемножить $(4-3i)(5+2i)$.

Решение. Для того чтобы перемножить два комплексных числа, надо перемножить их как двучлены и затем заменить i^2 на –1:

$$(4-3i)(5+2i)=20+8i-15i-6i^2=(20+6)+(8-15)\,i=$$

$$=26-7i.$$

Задача 3. Разделить $(7+6i):(3-i)$

Решение. Для вычисления частного умножим делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\frac{7+6i}{3-i}=\frac{(7+6i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{21+7i+18i+6i^2}{9-i^2}=\frac{15+25i}{10}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i.$$

Задача 4. Вычислить $(3+i)^3-(4-2i)^2$.

Решение. Воспользуемся формулами сокращенного умножения:

$$(3+i)^3-(4-2i)^2 = 27+3\cdot3\cdot i^2 + 3\cdot3^2\cdot i + i^3 - (16-16i+4i^2) =$$
$$= 27-9+27i-i-16+16i+4 = 6+42i.$$

Задача 5. Вычислить $\sqrt{-5+12i}$.

Решение. Пусть $\sqrt{-5+12i}=x+yi$, где x, y – действительные числа. Возведем обе части равенства в квадрат: $-5+12i = x^2-y^2+2xyi$. Полученное равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=12 \end{cases}. \qquad (1)$$

Решим ее:

$$\begin{cases} y=\dfrac{6}{x} \\ x^2-\dfrac{36}{x^2}=-5 \end{cases}.$$

Решим второе уравнение системы $x^2-\dfrac{36}{x^2}=-5$ или $x^4+5x^2-36=0$.

Сделаем замену $t=x^2$, получаем $t^2+5t-36=0$, корни последнего уравнения $t_1=4$, $t_2=-9$. Тогда $x^2=4$ или $x^2=-9$, так как. $x\in R$, то $x_1=2$, $x_2=-2$. Таким образом решения системы $(2;3)$, $(-2;-3)$. Они дают два значения квадратного корня $\sqrt{-5+12i}=\pm(2+3i)$.

Задача 6. Решить уравнение $z^2+6z+25=0$.

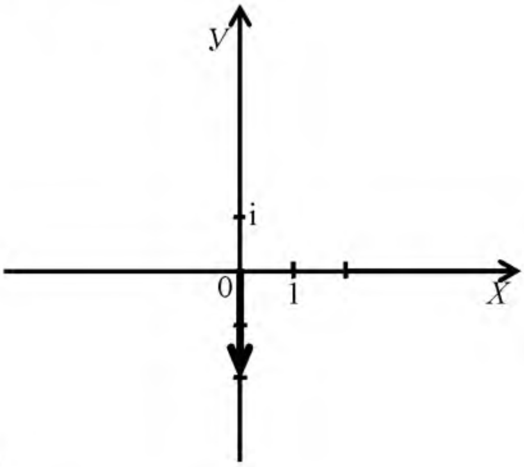
Решение. Находим дискриминант $D=36-4\cdot25=-64$, тогда $\sqrt{D}=8i$. По формуле корней квадратного уравнения получаем

$$z_1=\frac{-6-8i}{2}=-3-4i,\quad z_2=\frac{-6+8i}{2}=-3+4i.$$

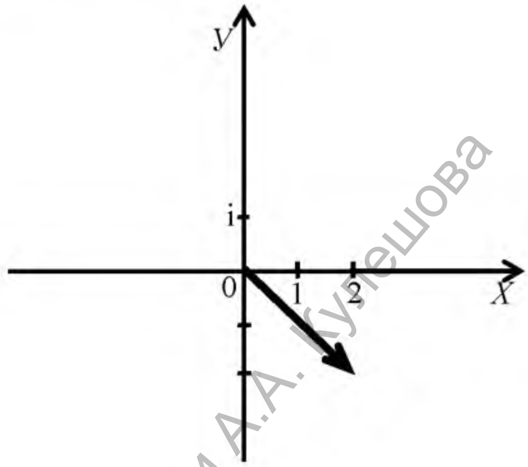
Задача 7. Изобразить на комплексной плоскости и записать в тригонометрической форме комплексные числа а) $-2i$, б) $2-2i$, в) $-\sqrt{12}+2i$.

Решение. Откладывая действительную часть по оси Ох, а мнимую по оси Оу получим вектор, изображающий комплексное число

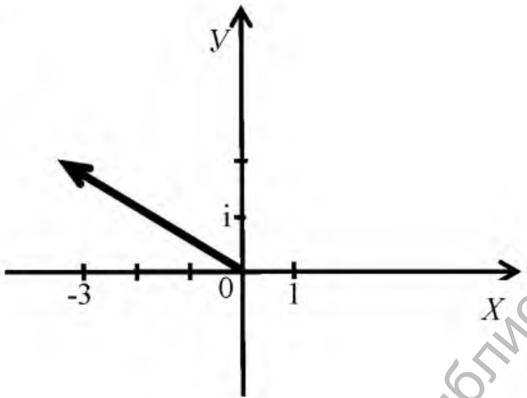
а)



б)



в)



Модуль комплексного числа $z = a + bi$ вычисляется по формуле $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Аргумент комплексного числа есть угол, отсчитанный от оси Ох против часовой стрелки до вектора, изображающего комплексное число. Поэтому для нахождения аргумента ϕ комплексного числа достаточно определить в какой четверти располагается вектор, изображающий комплексное число, а так же использовать формулу $tg\,\phi = \dfrac{b}{a}$.

а) $|-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$, очевидно $\arg(-2i) = \dfrac{3\pi}{2}$, тогда $-2i = 2(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2})$.

б) $\left|2-2i\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$. Учитывая, что вектор, изображающий комплексное число, лежит в четвертой четверти и $tg\,\phi=\dfrac{-2}{2}=-1$, то получаем, что $\phi=\arg(2-2i)=\dfrac{7\pi}{4}$. Тогда $2-2i=2\sqrt{2}\,(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4})$.

в) $\left|-\sqrt{12}+2i\right|=\sqrt{(-\sqrt{12})^2+2^2}=4$. Так как вектор, изображающий комплексное число, лежит во второй четверти и $\mathrm{tg}\phi=\dfrac{2}{-\sqrt{12}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, то получаем, что $\phi=\arg(-\sqrt{12}+2i)=\dfrac{5\pi}{6}$. Тогда $-\sqrt{12}+2i=4(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6})$.

Задача 8. Вычислить $\left(\dfrac{(1+\sqrt{3}\,i)(-1-i)}{-1+i}\right)^{15}$

Решение. Переведем числа $1+\sqrt{3}\,i$, $-1-i$, $-1+i$ в тригонометрическую форму:

$$1+\sqrt{3}\,i=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3});\quad -1-i=\sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4});$$

$$-1+i=\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}).$$

При умножении комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются, а при их делении модули делятся, а аргументы вычитаются. Таким образом получаем

$$\left(\frac{(1+\sqrt{3}\,i)(-1-i)}{-1+i}\right)^{15}=\left(\frac{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4})}{\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4})}\right)^{15}=$$

$$=(2(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}))^{15}=$$

$$=(2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}))^{15}.$$

Далее воспользуемся формулой Муавра

$$(r(\cos\phi+i\sin\phi))^{n}=r^{n}(\cos n\phi+i\sin n\phi),$$

по которой имеем

$$(2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}))^{15}=2^{15}\cdot(\cos\frac{25\pi}{2}+i\sin\frac{25\pi}{2})=$$

$$=2^{15}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=2^{15}\,i.$$

Задача 9. Найти значения $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}$.

Решение. Переведем подкоренное выражение в тригонометрическую форму и применим формулу

$$\sqrt[n]{r(\cos\phi+i\sin\phi)}=\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\phi+2\pi k}{n}+\sin\frac{\phi+2\pi k}{n}),$$

$k=0, 1, 2, \ldots, n-1.$

Получаем $-8-8\sqrt{3}\;i=16(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$ и

$$\sqrt[4]{16(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})}=2(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{4}+\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{4}),$$

$k=0, 1, 2, 3.$

Тогда четыре значения корня имеют вид:

$$u_0=2(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}}{4})=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=1+\sqrt{3}\,i.$$

$$u_1 = 2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i,.$$

$$u_2 = 2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}\,i\,,$$

$$u_3 = 2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

Домашнее задание

1. Вычислить $\dfrac{(2-i)^2 + (2+i)^2}{(1+2i)^3 - (1-2i)^3}$.

2. Решить уравнение $(2+i)z^2 + (5-i)z + 2 - 2i = 0.$

3. Записать в тригонометрической форме числа:

а) -2; б) $-1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$; в) $\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

4. Вычислить $\dfrac{(1+\sqrt{3}\,i)^{12} - (1-\sqrt{3}\,i)^6}{(-1+i)^{12}}$.

5. Найти значения $\sqrt[6]{-27}$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. **Кастрица, О.А.** Высшая математика для экономистов / О.А. Кастрица. – Минск : ООО «Новое знание», 2005. – 491 с.

2. **Кремер, Н.Ш.** Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путно. – М. : Банки и биржи ЮНИТИ, 1998. – 470 с.

3. **Гусак, А.А.** Высшая математика : в 2 т. / А.А. Гусак. – Минск : Тетрасистемс, 2007. – Т. 1. – 544 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие в 4 частях / под ред. А.П. Рябушко. – Минск : Высшая школа, 2004. – Ч. 1. – 304 с.

5. **Белько, И.В.** Высшая математика для экономистов. 1 семестр / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. – М. : Новое знание, 2007. – 140 с.

6. **Солодовников, А.С.** Математика в экономике в 2 частях / А.С. Солодовников, А.В. Бабанцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. – М. : Финансы и статистика, 1999. – Ч. 1. – 347 с.

7. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие в 4 частях / под ред. А.П. Рябушко. – Минск : Высшая школа, 2009. – Ч. 2. – 396 с.

СОДЕРЖАНИЕ