ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 10, с. 1416–1418

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

ТОЧНАЯ ГРАНИЦА ПОДВИЖНОСТИ ВВЕРХ СТАРШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ, МАЛЫХ В СРЕДНЕМ С ВЕСОМ

© 2005 г. И. В. Марченко

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с ограниченной и кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов A такой, что $\|A(t)\| \leq M < +\infty$ при всех $t \geq 0$, и матрицей Коши $X(t,\tau)$. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной матрицей возмущений Q, удовлетворяющей условию интегральной ограниченности [1, с. 252], т.е. неравенству $\int_t^{t+1} \|Q(\tau)\|\, d\tau \leq C_Q < +\infty$ при всех $t \geq 0$, где C_Q – некоторая константа, зависящая от Q. Для старшего показателя системы (2) будем использовать обозначение $\lambda_n(A+Q)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольный класс возмущений. Величина $\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\}$ называется точной верхней границей подвижности старшего показателя системы (2) с возмущениями из класса $\mathfrak{M}$.

Решению задачи о вычислении границ подвижности старшего показателя при различных возмущениях посвящены работы многих авторов. В [2] построена оценка для старшего показателя при малых возмущениях (так называемый центральный показатель $\Omega(A)$). Достижимость этой оценки доказана В.М. Миллионщиковым в [3] с помощью его ставшего уже классическим метода поворотов [3, 4, см. также 5, с. 90]. В работе [6] введено понятие старшего сигма-показателя как точной верхней границы подвижности старшего показателя системы с σ-возмущениями и дан алгоритм его вычисления. Старший экспоненциальный показатель, соответствующий классу экспоненциально убывающих возмущений, вычислен в [7]. Возмущения, убывающие на бесконечности медленнее, чем экспоненциальные, рассмотрены в [8, 9]. Точные границы подвижности показателей Ляпунова при малых в среднем линейных возмущениях найдены в [10], а при бесконечно малых возмущениях – в [11]. В [12] получены достижимые оценки для старшего показателя системы (2) при возмущениях, суммируемых на полуоси с монотонным положительным весом, а также при возмущениях, суммируемых со степенью.

В настоящей работе вычислена точная граница подвижности вверх старшего показателя системы (2) при возмущениях, малых в среднем с весом, т.е. возмущениях из класса $\mathfrak{L}[\varphi]$, который составляют кусочно-непрерывные и интегрально ограниченные матрицы Q, удовлетворяющие условию $J(Q) := \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\int_0^t \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|\, d\tau = 0$, где $\varphi(t)$ – кусочно-непрерывная положительная функция, определенная на промежутке $[0, +\infty[$.

Теорема. *Если функция $\varphi(t)$ монотонно возрастает к $+\infty$, то справедливо равенство $\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, где последовательность η_m определяется рекуррентным соотношением $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|\varphi^{-1}(k)\eta_k)$, $k, m \in \mathbb{N}$, с произвольным начальным условием $\eta_1 > 0$.*

Доказательство. Докажем неравенство $\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) \leq \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$. Для этого зафиксируем произвольную матрицу Q, принадлежащую классу $\mathfrak{L}[\varphi]$, и воспользуемся теоремой 2 из [12], полагая, что положительная функция β задана формулой $\beta(k) = \varphi^{-1}(k)$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Рассмотрим сумму

$$S(m) := \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k)\|V_k\| = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(k)\|V_k\|,$$

где матрицы V_k определяются равенством $V_k = \int_k^{k+1} X(k,\tau)Q(\tau)Y(\tau,k)d\tau$, в котором $Y(\tau,k)$ – матрица Коши системы (2). Согласно лемме 1 из [12], справедливо неравенство $\|V_k\| \leq b\int_k^{k+1}\|Q(t)\|\, dt$, где $b := e^{2M+C_Q}$, поэтому

$$S(m) \le b \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(k) \int_{k}^{k+1} \|Q(t)\| dt.$$

Так как функция φ возрастает на всей полуоси $[0,+\infty[$, то выполняются соотношения

$$S(m) \le b \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k}^{k+1} \varphi(k)\|Q(t)\|\, dt \le b \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k}^{k+1} \varphi(t)\|Q(t)\|\, dt = b \int_{0}^{m} \varphi(t)\|Q(t)\|\, dt.$$

Отсюда имеем неравенства $0 \le m^{-1}S(m) \le bm^{-1}\int_0^m \varphi(t)\|Q(t)\|\, dt$. Переходя в них к пределу при $m \to \infty$, в силу условия теоремы получаем $\lim\limits_{m\to\infty} m^{-1}S(m) = 0$. Согласно теореме 2 работы [12], из последнего равенства вытекает оценка $\lambda_n(A+Q) \le \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, что дает требуемую оценку и для $\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi])$.

Теперь докажем обратное неравенство $\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) \ge \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$. Для этого рассмотрим однопараметрическое семейство классов возмущений $\mathfrak{B}_\sigma[\varphi]$, $\sigma > 0$, состоящих из кусочно-непрерывных матриц Q, которые при любом $t \ge 0$ удовлетворяют условию $\|Q(t)\| \le N_Q\varphi^{-\sigma}(t)$. Для таких возмущений имеет место оценка

$$J(Q) \le N_Q \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \int_0^t \varphi^{1-\sigma}(\tau)\, d\tau.$$

Так как $\varphi(t) \uparrow +\infty$ при $t \to +\infty$, то при $\sigma > 1$ функция $\varphi^{1-\sigma}(t)$ монотонно убывает к нулю на всей полуоси $[0,+\infty[$ и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что при $t > n_\varepsilon$ выполнено неравенство $\varphi^{1-\sigma}(t) < \varepsilon$. Тогда для $t > n_\varepsilon$ имеем соотношения

$$\int_0^t \varphi^{1-\sigma}(\tau)\, d\tau = \int_0^{n_\varepsilon} \varphi^{1-\sigma}(\tau)\, d\tau + \int_{n_\varepsilon}^t \varphi^{1-\sigma}(\tau)\, d\tau \le n_\varepsilon\varphi^{1-\sigma}(0) + \varepsilon t$$

и поэтому $J(Q) \le N_Q \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{-1}(n_\varepsilon\varphi^{1-\sigma}(0) + \varepsilon t) = N_Q\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем, что $J(Q) = 0$, т.е. при любом $\sigma > 1$ выполняется включение $\mathfrak{B}_\sigma[\varphi] \subset \mathfrak{L}[\varphi]$, из которого вытекает неравенство $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\varphi]) \le \Lambda(\mathfrak{L}[\varphi])$. Так как функция φ монотонно возрастает и стремится к $+\infty$ при $t \to \infty$, то из результатов работы [9] следует, что при $\sigma > 0$ имеет место равенство $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\varphi]) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m(\sigma)$, где последовательность $\eta_m(\sigma)$ при $m > 1$ определяется рекуррентным соотношением $\eta_m(\sigma) = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|\varphi^{-\sigma}(k)\eta_k(\sigma))$, $k \in \mathbb{N}$, с начальным условием $\eta_1(\sigma) = 1$, причем величина $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\varphi])$ непрерывна как функция параметра $\sigma > 0$. Поэтому, переходя в неравенстве $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\varphi]) \le \Lambda(\mathfrak{L}[\varphi])$ к пределу при $\sigma \to 1+0$, будем иметь $\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) \ge \Lambda(\mathfrak{B}_1[\varphi]) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, где последовательность η_m соответствует начальному условию $\eta_1 = 1$. Согласно теореме 2 из [12], величина $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$ не зависит от выбора $\eta_1 > 0$. Поэтому неравенство $\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) \ge \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$ будет справедливо при любом $\eta_1 > 0$. Теорема доказана.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований "Математические структуры".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. *Виноград Р.Э.* // Мат. сб. 1957. Т. 42. № 2. С. 207–222.
3. *Миллионщиков В.М.* // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
4. *Миллионщиков В.М.* // Мат. заметки. 1968. Т. 4. Вып. 2. С. 173–180.
5. *Изобов Н.А.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.
6. *Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.
7. *Изобов Н.А.* // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5–8.

8. *Барабанов Е.А.* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 197–207.
9. *Барабанов Е.А.* Точные границы крайних показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1984.
10. *Сергеев И.Н.* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1986. Вып. 11. С. 32–73.
11. *Сергеев И.Н.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 3. С. 438–448.
12. *Макаров Е.К., Марченко И.В., Семерикова Н.В.* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 215–224.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
01.06.2004 г.