УДК 517.925.42

Н. П. МОРОЗОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ $\ddot{x}+\lambda f(x, \dot{x})\dot{x}+x=0$

Уравнение $\ddot{x}+\lambda f(x, \dot{x})\dot{x}+x=0$ равносильно системе

$$\dot{x}=y, \ \dot{y}=-x-\lambda f(x, y)y, \ \lambda>0, \tag{1}$$

или в полярных координатах системе

$$\dot{\rho}=-\lambda\rho f_\rho(\varphi), \quad \dot{\varphi}=-1-\frac{\lambda}{2} f_\rho(\varphi)\sin 2\varphi, \tag{2}$$

где $f_\rho(\varphi)=f(\rho\cos\varphi, \ \rho\sin\varphi)$.

В работе для указанного выше уравнения получены достаточные условия существования периодических решений и оценки границ его существования по параметру λ.

Введем следующие обозначения: $D^-=\{(x, y)|(x, y)\in \mathbf{R}^2, f(x, y)<0\}$, $\Delta^+(\mu)=\{\varphi|\varphi\in[0; 2\pi], f_\mu(\varphi)>0\}$, $\Delta^-(\mu)=\{\varphi|\varphi\in[0; 2\pi], f_\mu(\varphi)<0\}$; для $i=\overline{1, 4}$ определим множества $\Delta_i^\pm(\mu)=\Delta^\pm(\mu)\bigcap[(i-1)\pi/2; i\pi/2]$; при $i=1$, $j=3$ или $i=2$, $j=4$ положим $\Delta_{ij}^\pm(\mu)=\Delta_i^\pm(\mu)\bigcup\Delta_j^\pm(\mu)$; пусть

$$M_i^\pm(\mu)=\max_{\varphi\in\overline{\Delta}_i^\pm(\mu)}|f_\mu(\varphi)\sin 2\varphi|, \quad M_{ij}^\pm(\mu)=\max_{\varphi\in\overline{\Delta}_{ij}^\pm(\mu)}|f_\mu(\varphi)\sin 2\varphi|,$$

причем $M_i^\pm(\mu)=0$ или $M_{ij}^\pm(\mu)=0$, если $\Delta_i^\pm(\mu)=\varnothing$ или $\Delta_{ij}^\pm(\mu)=\varnothing$ соответственно ($\overline{\Delta}$ — замыкание множества Δ); $\alpha^-=\sup\limits_{\mu\geq0}\{\mu|M_{13}^-(\mu)>0\}$, $\alpha^+=\inf\limits_{\mu\geq0}\{\mu\,|\,M_{24}^+(\mu)>0\}$, при этом если $M_{24}^+(\mu)\equiv0$, то $\alpha^+=+\infty$; $\Delta_{13}^-(\mu, \varepsilon)=([0; \pi/2+\varepsilon]\bigcup[3\pi/2+\varepsilon; 2\pi])\bigcap\Delta^-(\mu)$, где $\varepsilon>0$—достаточно малое положительное число.

Пусть функция f удовлетворяет условиям:

а) $f\in C$ при $(x, y)\in\mathbf{R}^2$ и задача Коши для системы (1) имеет единственное решение при любых начальных данных, $f_0=f(0, 0)<0$;

б) любой луч, выходящий из точки $O(0, 0)$, пересекает границу области D^- не более чем в одной точке;

в) существует достаточно малое $\varepsilon>0$ и некоторое $\mu^*\geq0$ такие, что $\Delta_{13}^-(\mu, \varepsilon)=\varnothing$ или при каждом $\varphi\in\Delta_{13}^-(\mu, \varepsilon)\neq\varnothing$ $f(\varphi)$ не убывает по μ при $\mu>\mu^*$;

г) при каждом $\varphi\in\Delta_{24}^+(\mu)$ $f_\mu(\varphi)$ не убывает по μ при $\mu>0$.

Наряду с системами (1), (2) введем в рассмотрение вспомогательные системы

$$\dot{x}=y, \ \dot{y}=-x-\lambda f_\mu(x)y \tag{3}$$

или соответственно

$$\dot{\rho}=-\lambda\rho f_\mu(\varphi)\sin^2\varphi, \quad \dot{\varphi}=-1-\frac{\lambda}{2} f_\mu(\varphi)\sin 2\varphi, \tag{4}$$

где $\mu\geq0$ — числовой параметр. Уравнение траекторий этих систем в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}=\lambda F_\mu(\varphi,\lambda),\ F_\mu(\varphi,\lambda)=\frac{f_\mu(\varphi)\sin^2\varphi}{1+(\lambda/2)f_\mu(\varphi)\sin 2\varphi}. \tag{5}$$

В пространстве параметров (μ, λ) выделим множества $P_1=\{(\mu, \lambda)|0\leqslant\mu<\alpha^-, \lambda\geqslant 2/M_{13}^-(\mu)\}$, $P_2=\{(\mu, \lambda)|\mu\geqslant\alpha^+, \lambda\geqslant 2/M_{24}^+(\mu)\}$, $P_3=\{(\mu, \lambda)|\mu\geqslant 0, \lambda\geqslant 0, (\mu, \lambda)\notin P_1\cup\cup P_2\}$. Относительно траекторий системы (4) имеют место следующие очевидные утверждения.

Лемма 1. *Если $(\mu, \lambda)\in P_3$, то при условии а) все траектории системы (4) либо спирали, либо замкнутые кривые.*

Это утверждение следует из непрерывности по $\varphi\in[0; 2\pi]$ функции $F_\mu(\varphi, \lambda)$ при $(\mu, \lambda)\in P_3$ и общего решения уравнения (5) $\rho=\rho_0\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}F_\mu(\tau, \lambda)\,d\tau$.

Лемма 2. *Если выполнено условие а) и $(\mu, \lambda)\in P_1$ или $(\mu, \lambda)\in P_2$, то существует луч $\varphi=\varphi_{13}^-(\mu, \lambda)$, $\varphi_{13}^-\in\Delta_{13}^-(\mu)$ или соответственно $\varphi=\varphi_{24}^+(\mu, \lambda)$, $\varphi_{24}^+\in\Delta_{24}^+(\mu)$, являющийся траекторией системы (4).*

В этом случае $\varphi_{13}^-\in\Delta_{13}^-(\mu)$ или $\varphi_{24}^+\in\Delta_{24}^+(\mu)$, о которых идет речь в лемме 2, являются корнями уравнения $1+(\lambda/2)f_\mu(\varphi)\sin 2\varphi=0$. Их существование при указанных условиях очевидно.

Лемма 3. *Если выполнены условия а)—в) и $(\mu, \lambda)\notin P_1$, то всякая траектория системы (1), начинающаяся на луче $\varphi=\tilde\varphi$, при продолжении ее в положительном направлении возвращается на этот же луч.*

Доказательство. Положим $f_\mu^-(\varphi)=f_\mu(\varphi)$ при $\varphi\in\Delta^-(\mu)$ и $f_\mu^-(\varphi)\equiv 0$ при $\varphi\notin\Delta^-(\mu)$. Заменив в уравнении (5) $f_\mu(\varphi)$ на $f_\mu^-(\varphi)$, получим уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}=\lambda F_\mu^-(\varphi,\lambda),\ F_\mu^-(\varphi,\lambda)=\frac{f_\mu^-(\varphi)\sin^2\varphi}{1+(\lambda/2)f_\mu^-(\varphi)\sin 2\varphi}. \tag{6}$$

Так как по условию $(\mu, \lambda)\notin P_1$, то $1+(\lambda/2)f_\mu^-(\varphi)\sin 2\varphi\geqslant 1-(\lambda/2)|f_\mu^-(\varphi)\sin 2\varphi|\geqslant\geqslant 1-(\lambda/2)M_{13}^-(\mu)>0$, т. е. $F_\mu^-(\varphi, \lambda)$ непрерывна по φ при каждом $(\mu, \lambda)\notin P_1$ и, следовательно, интегральные кривые уравнения (6)—спирали $\rho=\rho_0\exp\left(\lambda\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}F_\mu(\tau, \lambda)\,d\tau\right)$.

Пусть $\pi/2+\varepsilon<\tilde\varphi<\pi$, где $\varepsilon>0$ выбрано с учетом условия в). Построим непрерывную кривую $L=M_0M_1M_2M_3M_4M_5$, начинающуюся на луче $\varphi=\tilde\varphi$ в точке $M_0(\rho_0, \tilde\varphi)$, заканчивающуюся на этом же луче в точке $M_5(\rho_5, \tilde\varphi)$ и состоящую из вертикальных отрезков M_0M_1, M_2M_3, M_4M_5 и дуг интегральных кривых уравнения (6) M_1M_2, M_3M_4 (рис. 1). Точки M_1 и M_3 лежат на лучах $\varphi=\pi/2+\varepsilon$ и $\varphi=3\pi/2+\varepsilon$ соответственно.

Пусть $\rho_0>\mu^*$, где μ^* из условия в). Так как $f_\mu^-(\varphi)\leqslant 0$ при $\varphi\in[0; 2\pi]$ и $\mu\geqslant 0$, то на кривой L $\rho\geqslant\rho_0>\mu^*$, и в силу условия в) на дугах M_1M_2 и M_3M_4 будем иметь $f_\rho(\varphi)\geqslant f_\mu(\varphi)\geqslant f_\mu^-(\varphi)$ при $\mu\geqslant\mu^*$ и $(\mu, \lambda)\notin P_1$. Это означает, что векторное поле системы (1) на кривой L повернуто внутрь кривой L (см. рис. 1), что и доказывает лемму для выбранного $\tilde\varphi$. Если $3\pi/2+\varepsilon\leqslant\tilde\varphi<2\pi$, то построение кривой L аналогично с точностью до симметрии относительно начала координат. Мы провели доказательство

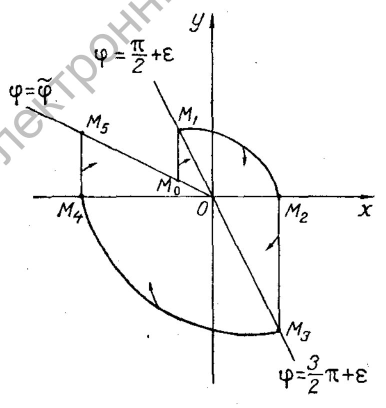

Рис. 1

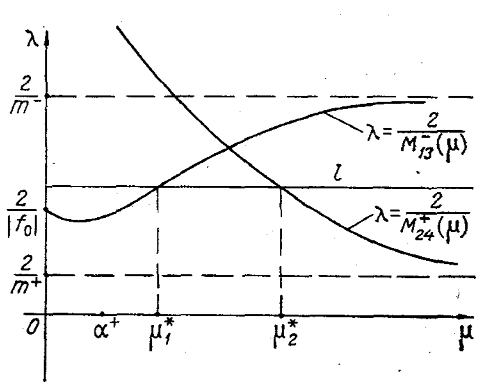

Рис. 2

для случая $\Delta_{13}^{-}(\mu, \varepsilon) \neq \varnothing$. Если же $\Delta_{13}^{-}(\mu, \varepsilon) = \varnothing$, то M_1M_2 и M_3M_4—дуги окружностей, так как в этом случае $f_{\mu}^{-}(\varphi) \equiv 0$. При этом в силу условия б) $f_{\rho}(\varphi) \geqslant 0$ при $\rho \geqslant \mu$ на M_1M_2 и M_3M_4, и утверждение леммы очевидно.

Замечание 1. Утверждение леммы справедливо при любом $\tilde{\varphi}$. При доказательстве ограничились тем случаем, который используется в дальнейшем.

Теорема. *Если выполнены условия а)—г) и* $\lim\limits_{\mu\to\infty} M_{24}^{+}(\mu) = m^{+}$, $\lim\limits_{\mu\to\infty} M_{13}^{-}(\mu) = m^{-}$, *причем* $m^{+} > m^{-}$, *то при* $2/m^{+} < \lambda < 2/m^{-}$ *система* (1) *имеет по крайней мере одну замкнутую траекторию.*

Доказательство. В пространстве параметров (μ, λ) рассмотрим луч $l:\lambda = \mathrm{const}$, $\mu \geqslant 0$, где $2/m^{+} < \lambda < 2/m^{-}$ (рис. 2). В силу условия в) при $\mu > \mu^{*}$ $M_{13}^{-}(\mu)$ не возрастает. Следовательно, существует $\mu_1^{*} \geqslant \mu^{*}$ такое, что при $\mu > \mu_1^{*}$ луч l не принадлежит области P_1. С другой стороны, при $\lambda > 2/m^{+}$ существует μ_2^{*} такое, что при $\mu > \mu_2^{*}$ прямая l принадлежит области P_2, так как в силу условия г) $M_{24}^{+}(\mu)$ не убывает при $\mu \geqslant 0$. Обозначим $\bar{\mu} = \max\{\mu_1^{*}, \mu_2^{*}\}$, и пусть $\mu > \bar{\mu}$. Тогда при $\mu > \bar{\mu}$ точка (μ, λ) луча l будет принадлежать области P_2 и, с другой стороны, $(\mu, \lambda) \notin P_1$. В силу леммы 2 существует луч $\varphi = \varphi_{24}^{+}(\mu, \lambda) \in \Delta_{24}^{+}(\mu)$, на котором $1 + (\lambda/2) f_{\mu}(\varphi_{24}^{+}) \times \sin 2\varphi_{24}^{+} = 0$. С учетом условия г) на луче $\varphi = \varphi_{24}^{+}(\mu, \lambda)$ будем иметь

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{\varphi=\varphi_{24}^{+}} \geqslant 0 \text{ при } \rho > \mu \text{ и } \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{\varphi=\varphi_{24}^{+}} \leqslant 0 \text{ при } \rho \leqslant \mu. \tag{7}$$

Рассмотрим траекторию системы (1), выходящую при $t=0$ из точки $M_0(\mu, \varphi_{24}^{+})$, $\mu > \bar{\mu}$. В силу леммы 3 при продолжении ее в сторону возрастания t она вернется на луч $\varphi = \varphi_{24}^{+}(\mu, \lambda)$ в точку M. Учитывая неравенства (7), точка M будет находиться между исходной точкой M_0 и точкой $O(0, 0)$. Через отрезок M_0M траектории системы (1) будут входить при возрастании t в построенную область Бендиксона. Для завершения доказательства отметим, что в силу условия а) точка покоя отталкивающего типа.

Замечание 2. Если $m^{+} = \infty$, а $m^{-} = 0$, то замкнутую траекторию система (1) имеет при всех $\lambda > 0$.

Замечание 3. Если $\Delta_{13}^{-}(\mu, \varepsilon) = \varnothing$ при $\mu > \mu^{*}$, где $\mu^{*} > 0$ и $\varepsilon > 0$ из условия в), то система (1) имеет замкнутую траекторию при $\lambda > 2/m^{+}$.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \lambda(P_{2n}(x, y) - 1)\,y, \ \lambda > 0, \tag{8}$$

где $P_{2n}(x, y)$ — однородный многочлен степени $2n$. Система (8) имеет хотя бы один предельный цикл при всех $\lambda > 0$, если уравнение $P_{2n}(1, k) = 0$ не имеет положительных корней и $P_{2n}(0, 1) > 0$. В данном случае $f_{\mu}(\varphi) = \mu^{2n} P_{2n}(\cos\varphi, \sin\varphi) - 1$ и выполнимость условий а)—г) при сделанных относительно P_{2n} предположениях легко проверяется. Кроме того, имеем случай $\Delta_{13}^{-}(\mu, \varepsilon) = \varnothing$ при некотором $\varepsilon > 0$, $\mu > \mu^{*}$ и $m^{+} = \infty$.

Литература

1. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., 1976.

2. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.

Могилевский государственный педагогический институт им. А. А. Кулешова

Поступила в редакцию 31 декабря 1986 г.