УДК 517.925.52

Н. П. МОРОЗОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ *)

Наряду с основной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - \lambda f(x, y, v)\, y, \tag{1}$$

где $v = y^2 + 2G(x)$, $G(x) = \int\limits_0^x g(\tau)\, d\tau$, $\lambda > 0$ — числовой параметр, рассматривается вспомогательная система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - \lambda f(x, y, \mu)\, y, \tag{1_μ}$$

где $\mu \geqslant 0$ — числовой параметр, при следующих основных предположениях:

a) $f(x, y, v)$ и $g(x)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и таковы, что задача Коши для систем (1) и (1_μ) имеет единственное решение при любых начальных данных;

в) $f(x, y, v)$ строго монотонна по v при $v \geqslant 0$ и фиксированных $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(0, 0, 0) \neq 0$;

c) $x \cdot g(x) > 0$ при $x \neq 0$, $G(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Теорема 1. *Пусть $f(0, 0, \mu) \neq 0$ при $\mu \geqslant 0$ или на кривой $v(x, y) = \mu^*$, где $f(0, 0, \mu^*) = 0$, функция $f(x, y, v)$ не меняет знака. Тогда если система (1) имеет замкнутую траекторию l, то при некотором $\mu \geqslant 0$ система (1_μ) также имеет замкнутую траекторию l_μ.*

Теорема 2. *Пусть $f(x, y, v)$ строго возрастает (убывает) по v и существует $\mu_0 \geqslant 0$, при котором система (1_{μ_0}) имеет замкнутую траекторию l_{μ_0}, обладающую свойством:* $\min\limits_{l_{\mu_0}} v \geqslant \mu_0$ $(\max\limits_{l_{\mu_0}} v \leqslant \mu_0)$, *если* $f(0, 0, 0) < 0$, *или* $\max\limits_{l_{\mu_0}} v \leqslant \mu_0$ $(\min\limits_{l_{\mu_0}} v \geqslant \mu_0)$,

---

*) Полностью рукопись депонирована в ВИНИТИ № 4888—83 Деп.

если $f(0, 0, 0) > 0$. Тогда система (1) также имеет по крайней мере одну замкнутую траекторию.

Теорема 3. *Если выполнены требования:*

1) существует $\mu^* > 0$, для которого $f(0, 0, \mu^*) = 0$;

2) при $\mu = \mu^*$ система (1_μ) имеет континуум замкнутых траекторий, сплошь заполняющих некоторую кольцевую область Σ, окружающую начало координат;

3) кривая $v(x, y) = \mu^*$ полностью принадлежит этой области Σ, то система (1) имеет по крайней мере одну замкнутую траекторию.

Обозначим $F(x, \mu) = \int_0^x f(\tau, \mu)\,d\tau$, $z(a, x) = \sqrt{2(G(a) - G(x))}$. В случае, когда f не зависит от y, справедливы утверждения.

Теорема 4. *Пусть при фиксированном $\mu \geqslant 0$ выполнены условия:*

1) $g(-x) = -g(x)$, $f(-x, \mu) = f(x, \mu)$ при $x \in \mathbb{R}$;

2) существуют $x_0 = x_0(\mu)$ и $x_1 = x_1(\mu)$ такие, что $0 < x_0 < x_1$ и $f(x_0, \mu) = 0$, $F(x_1, \mu) = 0$, причем $f(x, \mu) < 0$ при $0 < x < x_0$ и $f(x, \mu) > 0$ при $x > x_0$;

3) существует $x_2 = x_2(\mu) > x_1(\mu)$ такое, что $F(x_2, \mu) = m(\mu)$, где $m(\mu) = -F(x_0(\mu), \mu)$.

Тогда система (1_μ) имеет предельный цикл l_μ, для которого справедлива оценка

$$\max_{l_\mu} v \leqslant \left(2\lambda m + \sqrt{2G(x_2(\mu)) + \varepsilon^2}\right)^2, \quad \min_{l_\mu} v \geqslant 2G(x_0),$$

где

$$\varepsilon \geqslant \varepsilon_0 = \begin{cases} -2\lambda m + \sqrt{\lambda^2 m^2 + \dfrac{2}{3} G(x_2)} & \text{при } 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1 = \dfrac{\sqrt{2G(x_2)}}{3m}, \\ 0 & \text{при } \lambda > \lambda_1. \end{cases}$$

На основании этой теоремы доказана

Теорема 5. *Если при условиях теоремы 4 $f(0, 0) < 0$ и $f(x, \mu)$ строго убывает по μ или $f(0, 0) > 0$ и $f(x, \mu)$ строго возрастает по μ и множество*

$$M = \left\{\mu \mid \mu \geqslant 0,\ \mu - \frac{8}{3} G(x_2(\mu)) > 0\right\}$$

не пусто, то система (1) имеет предельный цикл по крайней мере при всех значениях λ, удовлетворяющих неравенству

$$0 < \lambda < \sup_{\mu \in M} \frac{\sqrt{\mu} - \sqrt{\dfrac{8}{3} G(x_2)}}{2m(\mu)}.$$

Если же $f(0, 0) < 0$ и $f(x, \mu)$ строго возрастает по μ или $f(0, 0) > 0$ и $f(x, \mu)$ строго убывает по μ, то система (1) имеет предельный цикл при всех $\lambda > 0$, если неравенство $2G(x_0(\mu)) \geqslant \mu$ выполняется хотя бы при одном $\mu \geqslant 0$.

Основные утверждения проиллюстрированы примерами.

Литература

1. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1974.— 320 с.
2. Nathan Amos.— Int. J. Electron., 1977, vol 43, N 6, p. 609—614.

Могилевский педагогический институт им. А. А. Кулешова

Поступила в редакцию 7 сентября 1981 г.