УДК 517.925.42

Н. П. МОРОЗОВ

О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДОВ МАЛОГО ПАРАМЕТРА В СЛУЧАЕ ЕДИНСТВЕННОГО КОРНЯ УРАВНЕНИЯ АМПЛИТУД *)

Рассматривается система

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-x-\lambda f(x,\ y)\,y,\quad \lambda\in\mathbf{R}\quad(\lambda>0) \tag{1}$$

при следующих основных предположениях:

а) $f\in C^1(\mathbf{R}^2)$, $f_0=f(0,\ 0)\neq 0$;

б) $f_0\dfrac{\partial}{\partial\rho}(f_\rho(\varphi))\leqslant 0$ при $\rho>0$ и $\varphi\in[0;\ 2\pi]$, где $f_\rho(\varphi)=f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)$; $\partial(f_\rho(\varphi))/\partial\rho\neq 0$ вдоль некоторого луча, на котором $f_\rho(\varphi)$ меняет знак;

в) уравнение $J_0(\rho)=0$, где $J_0(\rho)=\int\limits_0^{2\pi}f_\rho(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi$, имеет корень $\rho=\mu_0$.

Основной целью работы является получение по возможности точной верхней границы изменения параметра λ, до которой остается в силе вывод методов малого параметра о существовании у системы (1) предельного цикла. При исследовании системы (1) используется метод замены некоторого функционального параметра системы числовым. Обоснование этого метода приведено в [1].

Введем следующие обозначения: $\Delta^+(\mu)=\{\varphi\mid\varphi\in[0;\ 2\pi],\ f_\mu(\varphi)>0\}$, $\Delta^-(\mu)=\{\varphi\mid\varphi\in[0;\ 2\pi],\ f_\mu(\varphi)<0\}$; для $i=\overline{1,\ 4}$ $\Delta_i^\pm(\mu)=\Delta^\pm(\mu)\bigcap[(i-1)\pi/2;\ i\pi/2]$; для $i=1,\ j=3$ или $i=2,\ j=4$ $\Delta_{ij}^\pm(\mu)=\Delta_i^\pm(\mu)\bigcup\Delta_j^\pm(\mu)$; $M_{ij}^\pm(\mu)=\max\limits_{\varphi\in\overline{\Delta}_{ij}^\pm(\mu)}|f_\mu(\varphi)\sin 2\varphi|$, причем $M_{ij}^\pm(\mu)=0$, если $\Delta_{ij}^\pm(\mu)=\varnothing$ (здесь $\overline{\Delta}$ — замыкание Δ). Пусть $\alpha^+=\inf\limits_{\mu\geqslant 0}\{\mu\mid M_{24}^+(\mu)>0\}$, $\alpha^-=\sup\limits_{\mu\geqslant 0}\{\mu\mid M_{13}^-(\mu)>0\}$, при этом если $M_{24}^+(\mu)\equiv 0$, то $\alpha^+=+\infty$.

В пространстве параметров $(\mu,\ \lambda)$ определим следующие множества: $P_1=\{(\mu,\ \lambda)\mid 0\leqslant\mu<\alpha^-,\ \lambda\geqslant 2/M_{13}^-(\mu)\}$, $P_2=\{(\mu,\ \lambda)\mid\mu\geqslant\alpha^+,\ \lambda\geqslant 2/M_{24}^+(\mu)\}$, $P_3=\{(\mu,\ \lambda)\mid\mu\geqslant 0,\ \lambda\geqslant 0,\ (\mu,\ \lambda)\notin P_1\bigcup P_2\}$. При $(\mu,\ \lambda)\in P_3$ положим $J(\mu,\ \lambda)=\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{f_\mu(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi}{1+(\lambda/2)f_\mu(\varphi)\sin 2\varphi}$.

В работе доказаны следующие основные утверждения.

1. Если при условиях а), б) для $\lambda>0$ существует $\mu=\mu(\lambda)$ такое, что $(\mu(\lambda),\ \lambda)\in P_3$ и $J(\mu(\lambda),\lambda)=0$, то система (1) имеет при данном λ единственный предельный цикл.

2. Если $\lim\limits_{\mu\to\infty}M_{24}^+(\mu)=m_{24}^+$, $\lim\limits_{\mu\to\alpha^--0}M_{13}^-(\mu)=m_{13}^-$, причем $m_{13}^-<m_{24}^+$, то система (1) имеет предельный цикл по крайней мере при $2/m_{24}^+\leqslant\lambda<2/m_{13}^-$ (в частности, когда $m_{13}^-=0$, то при $\lambda\geqslant 2/m_{24}^+$, если же $m_{24}^+=\infty$, то при $0<\lambda<2/m_{13}^-$, если же $m_{13}^-=0$ и $m_{24}^+=\infty$, то при всех $\lambda>0$).

3. Если выполнены условия а) — в) и $m_{24}^+\neq\infty$, то наряду с промежутком, указанным в п. 2, предельный цикл существует при $0<\lambda<\Lambda=\min\{\sup\limits_{\mu\geqslant\mu_0}\lambda_1(\mu);\ 2/m_{24}^+\}$, где

$$\lambda_1(\mu)=\frac{2J_0(\mu)}{\left(M^-(\mu)\int\limits_{\Delta^+(\mu)}f_\mu(\tau)\sin^2\tau d\tau+M^+(\mu)\int\limits_{\Delta^-(\mu)}|f_\mu(\tau)|\sin^2\tau d\tau\right)},$$

$M^\pm(\mu)=\sup\limits_{\varphi\in\Delta^\pm(\mu)}|f_\mu(\varphi)\sin 2\varphi|$, $J_0(\mu)$ и μ_0 из условия в).

4. Если выполнены условия а) — в) и $P^-(\mu)=\sup\limits_{\varphi\in\Delta^-}|f_\mu(\varphi)|\to 0$ или мера Лебега множества $\Delta^-(\mu)$ стремится к нулю при $\mu\to\infty$, то предельный цикл системы (1) существует при $0<\lambda<2/m_{13}^-$.

5. Если выполнены условия а), б), а $m_{13}^-\neq 0$, то при $\lambda>2/m_{13}^-$ система (1) периодических решений не имеет.

Пример 1. $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-x-\lambda[(ax^n+by^n)^{2k}-1]y$, где $n,\ k\in\mathbf{N}$; $ab\in\mathbf{R}$, $a^2+b^2\neq 0$.

---

*) Полностью рукопись депонирована в ВИНИТИ 05.02.88. № 1020—В 88.

Применение утверждений 2,5 дает следующий результат: 1) при $ab \geqslant 0$ предельный цикл существует при всех $\lambda > 0$; 2) при $ab < 0$ предельный цикл существует при $0 < \lambda < (\sqrt[n]{a^2} + \sqrt[n]{b^2})/\sqrt[n]{|ab|}$. Система не имеет предельных циклов при других значениях λ.

Пример 2. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - \lambda(\alpha x^{2n} y^{2n} - 1)(\beta\rho^{4n} + 1)^{-1} y$, $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$. Данная система имеет предельный цикл при всех $\lambda > 0$.

Литература

1. Морозов Н. П. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 5. С. 904—905.

Могилевский педагогический институт им. А. А. Кулешова

Поступила в редакцию 28 ноября 1986 г.