УДК 517.925.45

Н.П. МОРОЗОВ

О ПРИВЕДЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ К СПЕЦИАЛЬНОМУ ВИДУ

В работе предлагается специальное представление полиномиальных систем, позволяющее прогнозировать бифуркации в этих системах по гамильтоновой системе с естественным алгебраическим гамильтонианом. Гамильтонова система однозначно определяется по правым частям системы и является нелинейным глобальным приближением для исходной системы [1-3].

В работе рассматривается система

$$\dot{x} = P(x,y),\ \dot{y} = Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ многочлены наибольшей степени n.

Основной результат содержится в следующем утверждении.

Теорема 1. Пусть начало координат совмещено с состоянием равновесия $M_0(x_0,y_0)$ данной системы. Тогда система (1) представима в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}\,(x,y) + x\bar{\sigma}(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}\,(x,y) + y\bar{\sigma}(x,y) \end{cases}, \tag{2}$$

где

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{n} P_k(x,y),\ \ Q(x,y) = \sum_{m=1}^{n} Q_k(x,y),$$

$$P_k(x,y) = \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k} C_k^m a_{k-m\ m}\, x^{k-m} y^m, \tag{3}$$

$$Q_k(x,y) = \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k} C_k^m b_{k-m\ m}\, x^{k-m} y^m, \tag{4}$$

$$a_{k-m\,m} = \frac{\partial^k P(x_0,y_0)}{\partial x^{k-m}\partial y^m},\ b_{k-m\,m} = \frac{\partial^k Q(x_0,y_0)}{\partial x^{k-m}\partial y^m}, \qquad (5)$$

$$H(x,y) = \sum_{k=1}^{n} H_{k+1}(x,y),\ H_{k+1}(x,y) = \frac{yP_k(x,y) - xQ_k(x,y)}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\left(a_{0k}y^{k+1} - b_{k0}x^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} C_k^{m-1}\,\frac{\mu_{k-m\,m-1}}{m}\,x^{k-m+1}y^m\right),$$

$$\bar{\sigma}(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\bar{\sigma}_{k-1}(x,y),\ \bar{\sigma}_{k-1}(x,y) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{\partial P_k(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_k(x,y)}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{k}{(k+1)!}\sum_{m=1}^{k} C_{k-1}^{m-1}\,\sigma_{k-m\,m-1}\,x^{k-m}y^{m-1} \qquad (6)$$

$$\mu_{k-m\,m-1} = m\,a_{k-m+1\,m-1} - (k-m+1)\,b_{k-m\,m} \qquad (7)$$

$$\sigma_{k-m\,m-1} = a_{k-m+1\,m-1} + b_{k-m,\,m},\ k = \overline{1,n},\ m = \overline{1,k}. \qquad (8)$$

Доказательство. Фиксируем точку $M_0(x_0,y_0)$ и представим многочлены $P(x,y)$, $Q(x,y)$ по степеням $x - x_0$ и $y - y_0$:

$$P(x,y) = P(x_0,y_0) + \sum_{m=1}^{n} P_k(x,y),$$

$$Q(x,y) = Q(x_0,y_0) + \sum_{m=1}^{n} Q_k(x,y),\ n \geq 1,$$

$$P_k(x,y) = \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k} C_k^m a_{k-m\,m}(x-x_0)^{k-m}(y-y_0)^m,$$

$$Q_k(x,y) = \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k} C_k^m b_{k-m\,m}(x-x_0)^{k-m}(y-y_0)^m,$$

и $a_{k-m\,m}$, $b_{k-m\,m}$ определены равенствами (5). После совмещения начала координат с точкой $M_0(x_0,y_0)$ многочлены $P_k(x,y)$ и $Q_k(x,y)$ примут вид (3) и (4) соответственно. Обозначим $\sigma_{k-1}(x,y) = \frac{\partial P_k(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_k(x,y)}{\partial y}$ или $\sigma_{k-1}(x,y) = \frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{k} mC_k^m\,\sigma_{k-m\,m-1}\,x^{k-m}y^{m-1}$, где $\sigma_{k-m\,m-1}$ определено равенством (8).

Положим

$$\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x,y) = P_k(x,y) + xS_{k-1}(x,y), \qquad (9)$$

$$-\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x,y) = Q_k(x,y) + yR_{k-1}(x,y), \qquad (10)$$

где

$$S_{k-1}(x,y) = \frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{k}\frac{m}{k-m+1}C_k^m\,\sigma_{k-m\,m-1}(\lambda_{k-m\,m-1} - 1)x^{k-m}y^{m-1},$$

$$R_{k-1}(x,y) = -\frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{k} C_k^m\,\sigma_{k-m\,m-1}\,\lambda_{k-m\,m-1}\,x^{k-m}y^{m-1},$$

$\lambda_{k-m\,m-1}$ – пока произвольные числа, $k = \overline{1,n}$, $m = \overline{1,k}$.

Дифференцируя равенство (9) по x, а равенство (10) по y, с учетом (6) убеждаемся в корректности введенных обозначений при любых

$\lambda_{k-m\ m-1},\ k=\overline{1,n},\ m=\overline{1,k}$.

Подберем теперь $\lambda_{k-m\ m-1}$ так, чтобы выполнялось тождество $S_{k-1}(x,y)\equiv R_{k-1}(x,y)$. Для отыскания $\lambda_{k-m\ m-1}$ получим соотношения $\frac{m}{k-m+1}C_k^m\ \sigma_{k-m\ m-1}(\lambda_{k-m\ m-1}-1)=-C_k^m\ \sigma_{k-m\ m-1}\ \lambda_{k-m\ m-1},\ m=\overline{1,k}$.

Находим

$$\lambda_{k-m\ m-1}=\frac{m}{k+1},\ m=\overline{1,k}\ ,\ k=\overline{1,n}.$$

Подставляя $\lambda_{k-m\ m-1}$ в $S_{k-1}(x,y)$ и $R_{k-1}(x,y)$, будем иметь

$$S_{k-1}(x,y)\equiv R_{k-1}(x,y)\equiv-\bar{\sigma}_{k-1}(x,y), \qquad (11)$$

где $\bar{\sigma}_{k-1}(x,y)$ из (6).

Подставляя в (9) и (10) многочлены $P_k(x,y)$, $Q_k(x,y)$ из (3) и (4) и $\lambda_{k-m\ m-1}=\frac{m}{k+1}$, после несложных преобразований получим для $\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x,y)$ и $\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x,y)$ следующее представление:

$$\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{k!}a_{0k}y^k+\frac{1}{(k+1)!}\sum_{m=0}^{k-1}C_k^m\left((m+1)\,a_{k-m\ m}-(k-m)\,b_{k-m-1\ m+1}\right)$$
$$x^{k-m}y^m$$

$$-\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{k!}b_{k0}x^k-\frac{1}{(k+1)!}\sum_{m=0}^{k-1}C_k^m\frac{k-m}{m+1}\left((m+1)\,a_{k-m\,m}-(k-m)\ b_{k-m-1\,m+1}\right)$$
$$x^{k-m-1}y^{m+1}.$$

Или

$$\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{k!}a_{0k}y^k+\frac{1}{(k+1)!}\sum_{m=0}^{k-1}C_k^m\ \mu_{k-m-1\,m}\quad x^{k-m}y^m, \qquad (12)$$

$$-\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{k!}b_{k0}x^k-\frac{1}{(k+1)!}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{m+1}C_k^m\ \mu_{k-m-1\,m}\quad x^{k-m-1}y^{m+1}, \qquad (13)$$

где

$$\mu_{k-m-1\,m}=(m+1)\ a_{k-m\ m}-(k-m)\ b_{k-m-1\ m+1},$$

$$m=\overline{0,k-1}\ ,\ k=\overline{1,n}\ ,\text{ или}$$

$$\mu_{k-m\ m-1}=m\,a_{k-m+1\ m-1}-(k-m+1)\ b_{k-m\ m}\ ,\ m=\overline{1,k}\ ,\ k=\overline{1,n}$$

Введем в рассмотрение гамильтонову систему

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y}(x,y),\ \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x}(x,y), \qquad (14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x,y),\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x,y)$$

Тогда с учетом соотношений (9), (10) и (11) систему (1) можем записать в виде (2), т.е.

$$P(x,y)=\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)+x\overline{\sigma}(x,y),\ Q(x,y)=-\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)+y\overline{\sigma}(x,y).$$

Умножив первое из этих равенств на y, а второе – на x и вычитая второе из первого равенства, получим соотношение

$$x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\equiv yP(x,y)-xQ(x,y). \qquad (15)$$

Отсюда имеем

$$x\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x,y)\equiv yP_k(x,y)-xQ_k(x,y).$$

По свойствам однородных функций

$$x\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x,y)=(k+1)H_{k+1}(x,y).$$

Следовательно,

$$H_{k+1}(x,y)=\frac{1}{k+1}\left(x\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x,y)\right) \text{ или}$$

$$H_{k+1}(x,y)=\frac{1}{k+1}\left(yP_k(x,y)-xQ_k(x,y)\right)$$

Это завершает доказательство.

Обозначим

$$V(x,y)=x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=\rho\frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),$$

$$D=\{(x,y)|\,V(x,y)>0\},\ \Gamma_D=\{(x,y)|\,V(x,y)=0,\ (x,y)\neq(0,0)\},$$

Следствие 1. Состояния равновесия системы (2) и гамильтоновой системы (14) расположены на границе области D, т.е. на кривых, определяемых равенством

$$x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=0. \qquad (16)$$

Это следует из соотношения (15).

Следствие 2. Граница области D состоит из состояний равновесия и линий контакта траекторий гамильтоновой системы с лучами $\varphi=const$.

Гамильтонава система (14) в полярных координатах имеет вид

$$\rho\dot{\rho}=x\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)-y\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial H}{\partial \varphi}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$$

$$\rho^2\dot{\varphi}=-\left(x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right)=-\rho\frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi).$$

Из последнего равенства следует, что на Γ_D $\dot{\varphi}=0$.

Следствие 3. Пусть точка $O(0,0)$ является центром для гамильтоновой системы (14) и $\rho_0=OM_0$ – расстояние от точки $O(0,0)$ до границы Γ_D области D.

Если $M_0(x_0,y_0)$ единственная точка на Γ_D, в которой достигается расстояние ρ_0, то M_0 является седлом для системы (14). Область центра расположена в области D и ограничена петлей сепаратрисы $H(x,y) = H(x_0,y_0)$, идущей из седла M_0 в это же седло.

Действительно, для функции $\mathrm{H} = H(x,y)$ точка $O(0,0)$ является точкой минимума и $\frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) > 0$ в области D, т.е. $H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ возрастает по ρ при фиксированном φ. Следовательно, $H(x,y) = C$ являются замкнутыми кривыми при $0 < C \le H(x_0,y_0)$. Если предположить, что $M_0(x_0,y_0)$ неособая точка, то приходим к противоречию с условиями единственности: замкнутая кривая $H(x,y) = H(x_0,y_0)$ проходит через точку M_0, касаясь луча, соединяющего точки $O(0,0)$ и M_0. Это в неособой точке невозможно.

Следствие 4. Система (2) инвариантна относительно линейного невырожденного преобразования $x = \alpha u + \beta v, y = \gamma u + \delta v$.

В этом случае система приводится к виду

$$\dot{u} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial H}{\partial v} + u\,\overline{\sigma}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$
$$\dot{v} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial H}{\partial u} + v\overline{\sigma}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v),$$

где $\Delta = (\alpha\delta - \beta\gamma), H = H(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$.

Следствие 5. В области D система (2) приводится к одному уравнению

$$\frac{dH}{d\varphi} = -\rho^2\,\overline{\sigma}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi). \tag{17}$$

где H и ρ связаны соотношением $H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = H$, причем это равенство однозначно разрешимо в области центра $O(0,0)$ гамильтоновой системы относительно ρ при всех $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Производная функции $H = H(x,y)$ в силу системы (2) имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = \overline{\sigma}(x,y)\left(x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right).$$

Учитывая, что $\rho^2\dot{\varphi} = -\left(x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right) < 0$ в области D и получаем равенство (17). Разрешимость в области центра $O(0,0)$ гамильтоновой системы равенства $H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = H$ относительно ρ следует из того, что в области D имеет место неравенство

$$\rho\frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \left(x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right) > 0.$$

В заключение отметим, что рассмотренное в работе представление полиномиальных систем позволяет разделить пространство параметров системы на пассивно (фиксированные коэффициенты гамильтониана) и активно (переменные параметры $\overline{\sigma}(x,y)$) участвующие в бифуркациях.

Проиллюстрируем это на примере квадратичной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{2}(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2) \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2) \end{cases}.$$

Она приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + \frac{1}{6}(\mu_{10}x^2 + 2\mu_{01}xy) + x(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)) \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}b_{20}x^2 - \frac{1}{6}(2\mu_{10}xy + \mu_{01}y^2) + y(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)) \end{cases}. \quad (18)$$

Первая ляпуновская величина (с точностью до положительного множителя) системы (18) для состояния равновесия (0, 0) имеет вид ([2, 3])

$$I = (b_{20} - \frac{1}{3}\mu_{01})\sigma_{10} - (a_{02} + \frac{1}{3}\mu_{10})\sigma_{01}.$$

Точка $P_0(-3a_{02}, 3b_{20})$ в пространстве пассивных параметров соответствует кратному фокусу системы (18), так как $I \equiv 0$. Будем предполагать, что $P(\mu_{10}, \mu_{01}) \neq P_0(-3a_{02}, 3b_{20})$. Пусть выполнено условие $a_{20}b_{11}a_{11}b_{02} \neq 0$. При этом условии, учитывая связь между коэффициентами этих систем,

$$\sigma_{k-m\ m-1} = a_{k-m+1\ m-1} + b_{k-m,\ m},$$

$$\mu_{k-m\ m-1} = m\, a_{k-m+1\ m-1} - (k-m+1)\ b_{k-m\ m},\ k = 2, m = 1; 2$$

можем считать μ_{ij} произвольными фиксированными, как и $a_{0\,2}$, $b_{2\,0}$, а σ_{ij} переменными. Это означает, что состояния равновесия соответствующей гамильтоновой системы неподвижны при изменении коэффициентов σ_{ij}. Таким образом, исследование бифуркации рождения предельных циклов из состояния равновесия (0,0) проводится в трехмерном пространстве параметров $(\sigma_{00}, \sigma_{10}, \sigma_{01})$.

Применение теоремы Андронова – Хопфа приводит к такому результату.

Теорема 2. Пусть $a_{20}b_{11}a_{11}b_{02} \neq 0$, $\mu_{10} \neq -3a_{02}$, $\mu_{01} \neq 3b_{20}$ и точка $(0, \sigma_{10}, \sigma_{01})$ лежит в полуплоскости $\sigma_{00} = 0$, $(b_{20} - \frac{1}{3}\mu_{01})\sigma_{10} - (a_{02} + \frac{1}{3}\mu_{10})\sigma_{01} < 0$).

Тогда при переходе σ_{00} от отрицательных значений к положительным значениям из сложного фокуса системы (18) рождается устойчивый предельный цикл.

Если же точка $(0, \sigma_{10}, \sigma_{01})$ лежит в полуплоскости $\sigma_{00} = 0$, $(b_{20} - \frac{1}{3}\mu_{01})\sigma_{10} - \left(a_{02} + \frac{1}{3}\mu_{10}\right)\sigma_{01} > 0$, то при переходе σ_{00} от положительных к отрицательным значениям, из сложного фокуса системы (18) рождается неустойчивый предельный цикл.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1966. – 568 с.
2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1967. – 587 с.
3. ***Марсден, Дж.*** Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М. : Мир, 1980. – 367 с.

Поступила в редакцию 21.04.2011 г.