И. В. Марченко (Беларусь, Могилев)

МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — некоторая последовательность (чисел или функций). Если существуют числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_k \neq 0$, такие, что, начиная с некоторого номера m и для всех следующих номеров

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n, n \geqslant m \geqslant 1, \qquad (1)$$

то последовательность (u_n) называется возвратной последовательностью порядка k, а соотношение (1) — возвратным (рекуррентным) уравнением порядка k.

Под решением рекуррентного уравнения будем понимать выражение общего члена соответствующей возвратной последовательности как функции аргумента n.

При изучении рекуррентных уравнений полезно, наряду с традиционными методами их решений (метод итераций и метод подстановки), рассматривать метод производящих функций [1, с. 364—387]. Производящие функции обладают мощным математическим потенциалом и имеют большое прикладное значение. При использовании производящих функций не только упрощается алгоритм решения рекуррентных уравнений, но появляется возможность его компьютерного программирования.

В зарубежной литературе производящим функциям придается большое значение, как математическому аппарату решения различных задач программирования. Анализ соответствующей отечественной литературы показывает, что этому разделу уделяется незаслуженно мало внимания.

Практика преподавания курса «Теория алгоритмов» позволила выработать автору ряд методических приемов, позволяющих облегчить и ускорить усвоение как теоретического, так и прикладного использования производящих функций. Проиллюстрируем сказанное на примере решения рекуррентных уравнений с помощью производящих функций. Студентам рекомендуется придерживаться следующей схемы решения поставленной задачи:

1.Записать уравнение (1) таким образом, чтобы оно оставалось справедливым для всех целых n, в предположении, что $u_{-1} = u_{-2} = \ldots = 0$.

2. Построить формальный степенной ряд для производящей функции следующим образом. Умножить равенство, полученное в п. 1, на z^{n+k} и просуммировать по всем n. В результате в левой части получаем формальный степенной ряд для производящей функции $G(z) = \sum_n u_n z^n$, коэффициентами которого являются члены последовательности (u_n).

3. Правую часть следует представить в виде функции от $G(z)$, т. е. получить уравнение вида

$$G(z) = F(G(z)). \qquad (2)$$

4. Найти решение уравнения (2) относительно функции $G(z)$.

5. Найденную функцию $G(z)$ разложить в степенной ряд. Коэффициент этого ряда при z^n является решением рекуррентного уравнения в смысле данного выше определения.

Наиболее эффектно проявляются преимущества метода производящих функций при решении рекуррентного уравнения $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, с начальными условиями x_0, x_1. Поэтому его следует рассмотреть на лекционных или на практических занятиях. Полезно отметить, что в случае $a = b = 1$ это уравнение определяет последовательность чисел Фибоначчи, которая часто встречается при решении различных задач.

Наглядно проявляются преимущества изложенного подхода, например, при сравнении эффективности решения этого уравнения традиционными методами и методом производящих функций. Тестирование по времени выполнения соответствующих программ показывает, что эффективность по времени программного кода по замкнутым формулам значительно выше по сравнению с программным кодом, составленным по рекурсивным формулам (1).

В докладе обсуждаются также некоторые другие применения производящих функций.

Литература

1. **Грэхем, Р.** Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. — М.: Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006 — 703 с.