УДК 517.925.12

Н. П. МОРОЗОВ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $\ddot{x}+\lambda f(ax+b\dot{x})\dot{x}+x=0$

Рассматривается система, равносильная указанному в заглавии уравнению,

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-x-\lambda f(ax+by)\,y \tag{1}$$

при условиях:

1) функция $f(u)\in\mathbf{C}(\mathbf{R})$ четная и такова, что задача Коши имеет единственное решение при любых начальных данных;

2) существует единственное $u_0>0$, такое, что $f(u_0)=0$ и f монотонна при $u>u_0$;

3) $f(0)ab\neq 0$ и $f(0)f(u)<0$ при $u>u_0$.

Система (1) включает систему Рэлея ($a=0$, $b\neq 0$) и систему Льенара ($a\neq 0$, $b=0$), которые достаточно хорошо изучены с точки зрения существования периодических решений (см. [1] и там же библиографию).

В работе установлены границы изменения значений параметра λ (при $ab\neq 0$), для которых система (1) имеет предельный цикл. Указаны случаи, когда найденные оценки для λ неулучшаемы.

Лемма. *Если система (1) имеет при выполнении условий 1) — 3) предельный цикл, то в случае $f(0)ab<0$ он расположен в полосе $|ax+by|<u^*$, где $u^*>u_0$ — корень уравнения $f(u)=(a^2+b^2)/\lambda ab$ или $u^*=\infty$, если это уравнение корня не имеет.*

Доказательство. В результате линейного преобразования $u=ax+by$, $v=-bx+ay$ система (1) примет вид

$$\dot{u}=(1-\lambda\gamma f(u))\,v-\lambda\beta^2 uf(u),\quad \dot{v}=-(1+\lambda\gamma f(u))\,u-\lambda\alpha^2 vf(u), \tag{2}$$

где $\gamma=ab/(a^2+b^2)$, $\alpha^2=a^2/(a^2+b^2)$, $\beta^2=b^2/(a^2+b^2)$. Очевидно, утверждение леммы равносильно тому, что предельные циклы системы (2) не могут пересекать прямую $u=u^*$. Последнее следует из того, что на прямой $u=u^*$ $\dot{u}=\beta^2u^*/\gamma$ сохраняет знак, т. е. $u=u^*$ является прямой односторонней «проводимости».

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1)—3), причем $f(0)ab<0$, тогда система (1) имеет единственный предельный цикл при всех $\lambda>0$.*

Доказательство. Из (2) находим

$$\frac{dv}{du}=-\frac{(1+\lambda\gamma f(u))\,u+\lambda\alpha^2 vf(u)}{(1-\lambda\gamma f(u))\,v-\lambda\beta^2 uf(u)}. \tag{3}$$

Введя вместо v новую переменную z по формуле

$$z=v+\lambda\alpha^2\int_0^u\psi(\xi,\lambda)\,d\xi, \tag{4}$$

где $\psi(u, \lambda) = f(u)/(1 - \lambda\gamma f(u))$, после несложных преобразований приведем (3) к виду

$$\frac{dz}{du} = -\frac{g(u, \lambda)}{z - \lambda F(u, \lambda)}, \tag{5}$$

где

$$g(u, \lambda) = \frac{u}{(1 - \lambda\gamma f(u))^2}, \quad F(u, \lambda) = \alpha^2 \int_0^u \psi(\xi, \lambda)\, d\xi + \beta^2 u \psi(u, \lambda).$$

В силу леммы в области существования предельных циклов системы (2) (а значит, и (1)) преобразование (4) и функции $g(u, \lambda)$ и $F(u, \lambda)$ непрерывны по совокупности переменных при $|u| < u^*$ и $\lambda > 0$. Легко видеть, что $\operatorname{sign} g(u, \lambda) = \operatorname{sign} u$ и $\lim\limits_{u \to u^* - 0} F(u, \lambda) = \infty$, а также, что g и F являются нечетными по u функциями при каждом $\lambda > 0$. Кроме того, существует $u_1 > u_0$ такое, что $F(u_1, \lambda) = 0$ и F монотонна по u при $u > u_0$.

Доказательство существования единственной замкнутой траектории при $|u| < u^*$ у уравнения (5) можно провести, повторив, например, рассуждения теоремы 10.2 для системы Льенара в [2, с. 219] для $|u| < u^*$.

Замечание 1. При условии монотонности $F(u, \lambda)$ по u при $u > u_0$ и неограниченности ее на этом промежутке требование расходимости $\int_0^{u^*} g(\xi, \lambda)\, d\xi$ при использовании теоремы 10.2 из [2], очевидно, излишне.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)—3), причем $f(0)ab > 0$. Тогда при $0 < \lambda < \lambda_0 = (a^2 + b^2)/m$ система (1) имеет единственный предельный цикл; здесь $m = \max\limits_{u \in [0, u_0]} abf(u)$. Если же $\lambda \geqslant \lambda_1 = (a^2 + b^2)/abf(0)$, то система (1) предельных циклов не имеет.*

Доказательство. Заметим, что при условиях теоремы 2 $u^* = +\infty$ и $g(u, \lambda)$ и $F(x, \lambda)$ непрерывны при $u \in \mathbf{R}$ и $0 < \lambda < \lambda_0$. Кроме того, они обладают свойствами, отмеченными при доказательстве теоремы 1. Существование и единственность замкнутой траектории у уравнения (5) при указанных значениях параметра λ следует из той же теоремы 10.2 [2, с. 219]

Для доказательства отсутствия предельных циклов у (1) при $\lambda \geqslant \lambda_1$ отметим прежде всего, что при $\lambda = \lambda_1$ прямая $ax + by = 0$ состоит из траекторий системы (1). Следовательно, при $\lambda = \lambda_1$ предельных циклов система не имеет. При $\lambda > \lambda_1$ на прямой $ax + by = 0$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} - \lambda f(0) = -\frac{a}{b} + \left(\frac{a^2 + b^2}{abf(0)} - \lambda\right) f(0).$$

Поэтому если $f(0) < 0$ (при этом $ab < 0$), то $dy/dx > -a/b$, т. е. для любой траектории, начинающейся при $t = 0$ на прямой $ax + by = 0$, имеем $y \geqslant -a/bx$ и $x > 0$ при $t > 0$. Отсюда и следует отсутствие предельных циклов при $\lambda > \lambda_1$. Более того, все траектории, начинающиеся при $t = 0$ на прямых $ax + by = 0$ или $ax + by = u_0$ при $t > 0$, уходят в бесконечность, оставаясь в полосе $0 \leqslant ax + by = u_0$. Случай $f(0) > 0$ сводится к рассмотренному заменой t на $-t$, x на $-x$ и a на $-a$.

Замечание 2. Если $m = f(0)$ (например, f монотонна при $u > 0$), то полученную в теореме 2 оценку λ нельзя уточнить. В этом случае $\lambda_0 = \lambda_1 = (a^2 + b^2)/f(0)$. При данном λ происходит бифуркация предельного цикла на бесконечности. С увеличением λ предельный цикл растягивается вдоль полосы $|ax + by| < u_0$ и при $\lambda = \lambda_0$ он «влипает» в точки покоя, расположенные на экваторе сферы Пуанкаре.

Замечание 3. Учитывая, что (1) сводится к системе Льенара, то в некоторых случаях, пользуясь более «тонкими» признаками существования предельных циклов для последней [1, 3, 4], в терминах свойств функций $F(u, \lambda)$, $F'_u(u, \lambda)$, $g(u, \lambda)$ можно получить и другие признаки существования предельных циклов для системы (1).

В несимметричном случае, например, справедлива

Теорема 3. *Если выполнены условия:*

1) $f(u) \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ и такова, что задача Коши имеет единственное решение при любых начальных данных;

2) существуют точно два значения u_1 и u_2, $u_1 < 0 < u_2$, такие, что $f(u_1) = f(u_2) = 0$ и $f(u)$ монотонна при $u < u_1$ и при $u > u_2$;

3) $f(0)\, ab \neq 0$ и $f(0) f(u) < 0$ при $u \notin [u_1, u_2]$, то

а) при $f(0)\, ab < 0$ система (1) имеет в области $u_1^* < ax + by < u_2^*$ хотя бы один предельный цикл при всех $\lambda > 0$ $(-\infty \leqslant u_1^* < u_1,\ u_2 < u_2^* \leqslant +\infty$ и $f(u_i^*) = 1/\lambda\gamma,\ i = 1, 2)$;

в) при $f(0)\, ab > 0$ система (1) имеет хотя бы один предельный цикл при $0 < \lambda < \lambda_0 = (a^2 + b^2)/m$, где $m = \max\limits_{u \in [u_1, u_2]} (abf(u))$, и не имеет предельных циклов при $\lambda \geqslant \lambda_1 = (a^2 + b^2)/abf(0)$.

Для доказательства приводим систему к виду (5) и пользуемся, например, признаками из [3] или [4].

В качестве примера рассмотрим систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x \mp \lambda [(2x \pm 3y)^2 - 1] y.$$

Если взять только верхние или только нижние знаки, то единственный предельный цикл этой системы существует при всех $\lambda > 0$. Если же взять один верхний и один нижний, то предельный цикл существует при $0 < \lambda < 2\frac{1}{6}$ и не существует при $\lambda \geqslant 2\frac{1}{6}$.

Литература

1. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1974.— 318 с.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.
3. Филиппов А. Ф.— Мат. сб., 1952, т. 30 (72), с. 171—180.
4. Драгилев А. В.— Прикл. мат. и мех., 1952, т. 16, № 1, с. 85—88.

Могилевский государственный педагогический институт им. А. А. Кулешова

Поступила в редакцию 17 февраля 1984 г.