СЕНТЯБРЬ 1976 г., ТОМ XII, № 9

УДК 517.925.12

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПЕРИОДА

Н. П. МОРОЗОВ

1. Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\varepsilon\dot{x}=P(x, y), \quad \dot{y}=Q(x, y), \tag{1}$$

где $\varepsilon>0$ — положительный параметр; x и P — k-мерные, а y, Q — l-мерные векторы, $k+l=n$. Вектор-функции P и Q предполагаются заданными в некоторой области G фазового пространства R^n и дифференцируемыми в G по совокупности переменных по крайней мере один раз.

Пусть при всех $\varepsilon>0$ система (1) имеет периодическое решение

$$x=x(t, \varepsilon), \quad y=y(t, \varepsilon) \tag{2}$$

непрерывно зависящее от параметра ε, траектория L_ε которого целиком принадлежит области G. Предположим также, что период $T^1(\varepsilon)$ этого периодического решения является непрерывной функцией параметра ε и дифференцируемой при $\varepsilon=1$.

В работе устанавливается характер зависимости периода $T^1(\varepsilon)$ от параметра ε. Для систем второго порядка выявленные свойства используются для приближенного вычисления периода при всех $\varepsilon>0$.

Наряду с системой (1) рассмотрим также систему

$$\frac{dx}{d\tau}=P(x, y), \quad \mu\frac{dy}{d\tau}=Q(x, y), \quad \mu=\frac{1}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Переход от системы (1) к (3) осуществляется с помощью линейной замены времени

$$t=\varepsilon\tau. \tag{4}$$

Периодическое решение системы (3), соответствующее периодическому решению (2) системы (1), будет иметь вид

$$x=x\left(\frac{\tau}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right), \quad y=y\left(\frac{\tau}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right).$$

Период его мы обозначим $T^2(\mu)$. В силу (4) между $T^1(\varepsilon)$ и $T^2(\mu)$ существует связь

$$T^1(\varepsilon)\equiv\varepsilon T^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad T^2(\varepsilon)\equiv\varepsilon T^1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \text{ при } \varepsilon>0. \tag{5}$$

Теорема 1. *Для периода $T^1(\varepsilon)$ периодического решения (2) системы (1) имеет место представление*

$$T^1(\varepsilon)=\varepsilon\varphi(\varepsilon)+\psi(\varepsilon), \tag{6}$$

где $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\varepsilon)$ непрерывны при $\varepsilon>0$ и обладают свойством

$$f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\equiv f(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon>0. \qquad (7)$$

Такое представление единственно.

Доказательство. Положим при $\varepsilon\neq 1$

$$\varphi(\varepsilon)\equiv\frac{T^2(\varepsilon)-\varepsilon T^1(\varepsilon)}{1-\varepsilon^2}, \qquad \psi(\varepsilon)\equiv\frac{T^1(\varepsilon)-\varepsilon T^2(\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} \qquad (8)$$

и доопределим эти функции при $\varepsilon=1$ их пределами

$$\varphi(1)=\lim_{\varepsilon\to 1}\varphi(\varepsilon)=\left.\frac{dT^1(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=1},$$

$$\psi(1)=\lim_{\varepsilon\to 1}\psi(\varepsilon)=T^1(1)-\left.\frac{dT^1(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=1}.$$

В справедливости (6) убеждаемся непосредственной подстановкой (8) в (6). Заменяя в (8) ε на $\frac{1}{\varepsilon}$ и учитывая (5), убеждаемся также в том, что функции $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\varepsilon)$, определенные равенствами (8), обладают свойством (7). Докажем единственность представления (6). Пусть наряду с (6) имеет место представление

$$T^1(\varepsilon)\equiv\varepsilon\bar{\varphi}(\varepsilon)+\bar{\psi}(\varepsilon),$$

где $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ непрерывны при $\varepsilon>0$ и обладают свойством (7). Будем иметь

$$\varepsilon[\varphi(\varepsilon)-\bar{\varphi}(\varepsilon)]\equiv\bar{\psi}(\varepsilon)-\psi(\varepsilon).$$

Заменяя здесь ε на $\frac{1}{\varepsilon}$, получим

$$\varphi(\varepsilon)-\bar{\varphi}(\varepsilon)\equiv\varepsilon[\bar{\psi}(\varepsilon)-\psi(\varepsilon)].$$

Из последних двух равенств находим

$$\varphi(\varepsilon)\equiv\bar{\varphi}(\varepsilon), \qquad \psi(\varepsilon)\equiv\bar{\psi}(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Учитывая соотношения (5), для $T^2(\varepsilon)$ будем иметь

$$T^2(\varepsilon)=\varphi(\varepsilon)+\varepsilon\psi(\varepsilon). \qquad (9)$$

Замечание 2. Если существуют конечные пределы

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}T^2(\varepsilon)=\tau_0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\psi(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}T^1(\varepsilon)=t_0,$$

то функции $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\varepsilon)$ будут ограничены на промежутке $[0, \infty[$ и, следовательно, период $T^1(\varepsilon)$ допускает линейную по ε оценку сверху и снизу.

2. Общая асимптотическая теория релаксационных колебаний, описываемых системами вида (1), построена Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко [1—4]. В частности, в [4] получены асимптотические разложения с произвольной степенью точности решения системы второго порядка на любом участке. Результаты доведены до расчетных формул. В [5] установлен общий вид асимптотического разложения для периода $T^1(\varepsilon)$ периодического решения системы (1) второго порядка. В этом пункте мы также будем рассматривать систему второго порядка

$$\varepsilon\dot{x}=P(x, y), \qquad \dot{y}=Q(x, y), \qquad \varepsilon>0 \qquad (1')$$

при тех же условиях, что и в [6, стр. 45—51]. В частности, предположим, что функции P и Q дифференцируемы в области G по обоим переменным достаточное число раз, и для точек срыва S имеет место равенство $\operatorname{sign}[P''_{xx}(S)P'_y(S)Q(S)]=1$.

Построим асимптотические разложения для периода $T^1(\varepsilon)$ таким образом, чтобы они имели вид (6), т. е. в качестве N-го приближения будем брать некоторую функцию

$$T^1_N(\varepsilon)=\varepsilon\varphi_N(\varepsilon)+\psi_N(\varepsilon), \tag{10}$$

$$\varphi(\varepsilon)-\varphi_N(\varepsilon)=o(\varepsilon^N), \qquad \psi(\varepsilon)-\psi_N(\varepsilon)=o(\varepsilon^N) \tag{11}$$

при $\varepsilon\to 0$ и функции $\varphi_N(\varepsilon)$ и $\psi_N(\varepsilon)$, обладающие свойством (7). При этом мы воспользуемся асимптотическими разложениями для $T^1(\varepsilon)$ и $T^2(\varepsilon)$ из [5], переписав их в более удобном для нас виде

$$\begin{gathered} T^1(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{3N} t_n(|\ln\varepsilon|)\,\varepsilon^{\frac{n}{3}}+o(\varepsilon^N), \\ T^2(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{3N} \tau_n(|\ln\varepsilon|)\,\varepsilon^{\frac{n}{3}}+o(\varepsilon^N), \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$t_n(|\ln\varepsilon|)=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{6}\right]-\varkappa(n)}(-1)^\nu Q_{n\nu}|\ln\varepsilon|^\nu,$$

$$\tau_n(|\ln\varepsilon|)=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{6}\right]-\varkappa(n)}(-1)^\nu q_{n\nu}|\ln\varepsilon|^\nu.$$

Здесь $[\alpha]$ — целая часть α, $\varkappa(n)=0$, если $n\equiv 0\pmod 3$ или $n\equiv 2\pmod 3$ и $\varkappa(n)=1$, если $n\equiv 1\pmod 3$, $t_1=0$ и $\tau_1=0$, $Q_{n\nu}$ и $q_{n\nu}$ — постоянные, которые определяются по правым частям системы (1′).

Разложения (12) при $0<\varepsilon\ll 1$ совпадают с соответствующими разложениями в [5]. Но в записи (12) t_n и τ_n, как нетрудно убедиться, обладают свойством (7). С учетом (12) и (8) легко получить асимптотические разложения для $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\varepsilon)$, а именно

$$\begin{gathered} \varphi(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{3N}\tau^1_n(|\ln\varepsilon|)\,\varepsilon^{\frac{n}{3}}+o(\varepsilon^N), \\ \psi(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{3N}t^1_n(|\ln\varepsilon|)\,\varepsilon^{\frac{n}{3}}+o(\varepsilon^N), \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\tau^1_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{6}\right]}\Theta_{n-6k}, \quad t^1_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{6}\right]}\bar\Theta_{n-6k}, \tag{14}$$

а $\Theta_n=\tau_n-t_{n-3}$, $\bar\Theta_n=t_n-\tau_{n-3}$ при $n\geqslant 3$ и $\Theta_n=\tau_n$, $\bar\Theta_n=t_n$ при $n=0, 1, 2$.

Таким образом, с точностью до членов порядка ε^N при $\varepsilon \to 0$ можно положить

$$\varphi(\varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{3N} \tau^1_n \varepsilon^{\frac{n}{3}}, \quad \psi(\varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{3N} t^1_n \varepsilon^{\frac{n}{3}}. \tag{15}$$

Заметим, что правые части (15) не обладают свойством (7) и поэтому, вообще говоря, не отражают качественной зависимости φ и ψ (а следовательно, и T^1) от ε при больших значениях параметра. В связи с этим введем в рассмотрение функции

$$\varphi_N(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{3N} \tau^2_n (|\ln \varepsilon|) \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \right)^{\frac{n}{3}},$$

$$\psi_N(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{3N} t^2_n (|\ln \varepsilon|) \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \right)^{\frac{n}{3}}, \tag{16}$$

причем полиномы t^2_n и τ^2_n выберем так, чтобы имело место (11). Очевидно, что $\varphi_N(\varepsilon)$ и $\psi_N(\varepsilon)$ обладают свойством (7). Тогда ввиду (11) при $\varepsilon \to \infty$ будем иметь

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi_N(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-N}), \quad \psi(\varepsilon) - \psi_N(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-N}).$$

Выразим коэффициенты t^2_n и τ^2_n через коэффициенты t_n и τ_n разложений (12). Обозначим

$$S_{m,k} = (-1)^k \frac{m(m+1) \ldots (m+k-1)}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad m \geqslant 0$$

и $S_{m,0} = 1$ при любом $m \geqslant 0$. Тогда, сопоставляя (16) и (13), найдем

$$\tau^1_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{6}\right]} \tau^2_{n-6k} S_{\frac{n-6k}{3}, k}, \quad t^1_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{6}\right]} t^2_{n-6k} S_{\frac{n-6k}{3}, k}.$$

Отсюда получим рекуррентное соотношение для определения τ^2_n и t^2_n:

$$\begin{aligned} t^2_n &= t^1_n - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{6}\right]} t^2_{n-6k} S_{\frac{n-6k}{3}, k} \quad \text{при } n \geqslant 6, \\ \tau^2_n &= \tau^1_n - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{6}\right]} \tau^2_{n-6k} S_{\frac{n-6k}{3}, k} \quad \text{при } n \geqslant 6 \end{aligned} \tag{17}$$

и $\tau^2_n = \tau^1_n$, $t^2_n = t^1_n$ для $n = \overline{0,5}$, где τ^1_n и t^1_n определяются равенствами (14).

Тогда для периода предельного цикла будем иметь

$$T^1(\varepsilon) \approx T^1_N(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{3N} [t^2_n (|\ln \varepsilon|) + \varepsilon \tau^2_n (|\ln \varepsilon|)] \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \right)^{\frac{n}{3}}, \tag{18}$$

причем, очевидно, $T^1(\varepsilon) - T^1_N(\varepsilon) = r_N(\varepsilon)$, где $r_N(\varepsilon) = o(\varepsilon^N)$ при $\varepsilon \to 0$ и

$r_N(\varepsilon)=o(\varepsilon^{1-N})$ при $\varepsilon\to\infty$. Это означает, что определенная формулой (18) величина $T^1_N(\varepsilon)$ сохраняет асимптотику периода $T^1(\varepsilon)$ как при $\varepsilon\to 0$, так и при $\varepsilon\to\infty$. Более того, начиная с $N=1$ величина $r_N(\varepsilon)$ ограничена на промежутке $[0, \infty[$. Поэтому формула (18) в некоторых случаях может быть использована для приближенного вычисления периода $T^1(\varepsilon)$ не только при малых и больших значениях параметра ε, но и при всех $\varepsilon>0$. Так, например, для уравнения Ван дер Поля (см. формулу (29)) при $N=1$ получаем достаточно хорошую точность для всех $\varepsilon\geqslant 0$.

3. К виду (1) может быть сведена и система Льенара

$$\dot{x}=y-\lambda F(x), \quad \dot{y}=-g(x). \tag{19}$$

Для этого достаточно положить $y=\lambda u$, $t=\lambda t'$, $\lambda^2=\dfrac{1}{\varepsilon}$. В результате получим систему

$$\varepsilon\frac{dx}{dt'}=y-F(x), \quad \frac{dy}{dt'}=-g(x). \tag{20}$$

(Здесь вместо u снова пишем y). Если же в (19) положить $y=\lambda u$, $\lambda t=t''$, $\lambda^2=\mu$, то система (19) приводится к виду

$$\frac{dx}{dt''}=y-F(x,) \quad \mu\frac{dy}{dt''}=-g(x). \tag{21}$$

Легко видеть, что t' и t'' связаны соотношением $t'=\varepsilon t''$ $\varepsilon=\dfrac{1}{\mu}$.

Предположим, что в полосе $\alpha<x<\beta$, $\alpha\beta<0$ система (19) имеет при $\lambda>0$ предельный цикл L_λ периода $T(\lambda)$. Обозначим через $T^1(\varepsilon)$ и $T^2(\mu)$ периоды (по t' и t'') периодических решений систем (20) и (21), соответствующих предельному циклу L_λ системы (19). Учитывая, что t' и t'' связаны с t линейными зависимостями $t=\lambda t'$ и $t''=\lambda t$, будем иметь

$$T(\lambda)\equiv\lambda T^1\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad T^2(\lambda^2)\equiv\lambda T(\lambda). \tag{22}$$

Непосредственно из теоремы 1 вытекает следующее утверждение о характере зависимости от λ периода $T(\lambda)$ предельного цикла системы (19).

Теорема 2. *Если функции $F(x)$ и $g(x)$ непрерывны вместе со своими производными в промежутке $]\alpha, \beta[$, то период $T(\lambda)$ предельного цикла L_λ системы (19) может быть единственным образом представлен в виде*

$$T(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda^2)}{\lambda}+\lambda\psi(\lambda^2), \tag{23}$$

причем непрерывные функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ обладают свойством (7).

Доказательство. Так как для системы (20) выполнены все требования теоремы 1, то будем иметь

$$T^1(\varepsilon)=\varepsilon\varphi(\varepsilon)+\psi(\varepsilon),$$

где $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\varepsilon)$ обладают свойством (7). Тогда с учетом (22) найдем

$$T(\lambda)=\lambda T^1\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)=\lambda\left[\frac{1}{\lambda^2}\varphi\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)+\psi\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\varphi(\lambda^2)}{\lambda}+\lambda\psi(\lambda^2),$$

что и требовалось доказать.

Воспользуемся теоремой 2 для приближенного вычисления периода $T(\lambda)$. При этом будем предполагать, что функции $F(x)$ и $g(x)$ достаточное число раз дифференцируемы при $x \in]\alpha, \beta[$, а период $T(\lambda)$ при малых λ допускает представление вида

$$T(\lambda)=\sum_{n=0}^{N} p_n\lambda^n+o(\lambda^N). \qquad (24)$$

Если для точек срыва $(s, F(s))$ $F''(s)\neq 0$, то для $T^1(\varepsilon)$ имеет место разложение (12).

Из (8) с учетом (23) найдем

$$\varphi(\lambda^2)=\frac{\lambda T(\lambda)-\lambda^2 T^1(\lambda^2)}{1-\lambda^4}, \qquad \psi(\lambda^2)=\frac{T^1(\lambda^2)-\lambda^3 T(\lambda)}{1-\lambda^4}.$$

Отсюда при малых λ получим

$$\varphi(\lambda^2)=\sum_{n=0}^{2N-1} p^1_n\lambda^{n+1}-\sum_{n=0}^{3N} t^1_n(|\ln\lambda^2|)\lambda^{\frac{2n+6}{3}}+o(\lambda^{2N}),$$

$$\psi(\lambda^2)=\sum_{n=0}^{3N} t^1_n(|\ln\lambda^2|)\lambda^{\frac{2n}{3}}-\sum_{n=0}^{2N-3} p^1_n\lambda^{n+3}+o(\lambda^{2N}),$$

где

$$p^1_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{4}\right]} p_{n-4i}, \quad t^1_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{6}\right]} t_{n-6i}.$$

Аналогично тому, как это было сделано в п. 2, найдем

$$\varphi_N(\lambda^2)=\sum_{n=0}^{2N-1} p^2_n\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{n+1}-\sum_{n=0}^{3N-3} t^2_n(|\ln\lambda^2|)\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{\frac{2n+6}{3}},$$

$$\psi_N(\lambda^2)=\sum_{n=0}^{3N} t^3_n(|\ln\lambda^2|)\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{\frac{2n}{3}}-\sum_{n=0}^{2N-3} p^3_n\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{n+3}, \qquad (25)$$

где p^2_n, p^3_n, t^2_n и t^3_n определяются из рекуррентных соотношений

$$p^2_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{4}\right]} p_{n-4i}-\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} p^2_{n-2i}S_{-n-1+2i,\,i} \quad (n\geqslant 2),$$

$$p^3_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{4}\right]} p_{n-4i}-\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} p^3_{n-2i}S_{-n-3+2i,\,i} \quad (n\geqslant 2),$$

$$t^2_n(|\ln\lambda^2|)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{6}\right]} t_{n-6i}-\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{3}\right]} t^2_{n-3i}S_{-\frac{2n-6i+6}{3},\,i} \quad (n\geqslant 3),$$

$$t^3_n(|\ln\lambda^2|)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{6}\right]} t_{n-6i}-\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{3}\right]} t^3_{n-3i}S_{-\frac{2n-6i}{3},\,i} \quad (n\geqslant 3),$$

$p^2_n = p^3_n = p_n$ для $n=0,\ 1$ и $t^2_n = t^3_n = t_n$ для $n=0,\ 1,\ 2$, причем при $\lambda \to 0$

$$\varphi(\lambda^2) = \varphi_N(\lambda^2) + o(\lambda^{2N}), \quad \psi(\lambda^2) = \psi_N(\lambda^2) + o(\lambda^{2N}).$$

Заменяя в (23) φ и ψ на φ_N и ψ_N для периода предельного цикла, получим приближенную формулу

$$T(\lambda) \approx T_N(\lambda) = \frac{\varphi_N(\lambda^2)}{\lambda} + \lambda\psi_N(\lambda^2). \qquad (26)$$

В качестве примера рассмотрим систему

$$\dot{x} = y - \lambda\left(\frac{x^3}{3} - x\right), \quad \dot{y} = -x,$$

соответствующую уравнению Ван дер Поля.

Хорошо известно, что для периода $T(\lambda)$ единственного предельного цикла этой системы имеет место разложение

$$T(\lambda) = 2\pi + \frac{\pi}{8}\lambda^2 + \ldots \qquad (27)$$

Для величины $T^1(\varepsilon)$ справедлива формула Дородницына [7] (см. также [8, 9]), которая с учетом наших обозначений имеет следующий вид:

$$T^1(\lambda^2) = 1{,}6137 + 7{,}0143\lambda^{\frac{4}{3}} - \left(1{,}325 + \frac{2}{3}|\ln\lambda|\right)\lambda^2, \quad \lambda \ll 1. \qquad (28)$$

Пользуясь этими разложениями, из (26), (25) находим при $N=1$

$$T(\lambda) \approx T_1(\lambda) = \frac{2\pi}{1+\lambda^2} + 1{,}6137\lambda + \frac{7{,}0143\lambda^{7/3}}{(1+\lambda^2)^{4/3}} - \frac{\left(1{,}325 + \frac{2}{3}|\ln\lambda|\right)\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2} - \frac{1{,}6137\lambda}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad (29)$$

причем в разложении $T_1(\lambda)$ мы выписали лишь те члены, которые могут быть вычислены по известным коэффициентам формул (27), (28).

Как показывает сравнение с известными результатами, это представление $T(\lambda)$ является достаточно точным при всех $\lambda \geqslant 0$.

Благодарю профессора Ю. С. Богданова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Понтрягин Л. С. Изв. АН СССР, Математика, **21**, № 5, 1957.
2. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Изв. АН СССР, Математика, **23**, № 5, 1959.
3. Мищенко Е. Ф. Изв. АН СССР, Математика, **21**, № 5, 1957.
4. Мищенко Е. Ф. Матем. сб., **44** (86), № 4, 1958.
5. Розов Н. Х. ДАН СССР, **145**, № 1, 1962.
6. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., «Наука», 1975.
7. Дородницин А. А. Прикл. матем. и мех., **11**, № 3, 1947.
8. Урабе М. Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, **2**, АН УССР, 1963, стр. 367—376.
9. Ponso P. I., Wax N. J. of the Soc. for Ind. and Appd. Math., **13**, № 3, 1965.

*Поступила в редакцию
21 ноября 1975 г.*

Могилевский педагогический институт