В.Н. Борбат

МНОГОЧЛЕНЫ С МАЛОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ R^2

Пусть $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ – многочлен с целыми коэффициентами, H – его высота. В [1] доказана теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах и их производных.

Теорема 1. Система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)|<H^{-n+\gamma} \\ |P'(x)|<H^{1-\gamma-\varepsilon}, \end{cases}$$

где $0<\gamma<1$ при любом $\varepsilon>0$ имеет для почти всех $x\in R$ (в смысле меры Лебега) лишь конечное число решений в многочленах $P(x)\in Z[x]$.

С помощью этой теоремы и ее обобщений доказывается регулярность распределения алгебраических чисел ограниченной степени, что приводит к неулучшаемым оценкам снизу размерности Хаусдорфа [2].

В настоящей работе доказывается двумерное обобщение теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $B(\varepsilon)$ – множество $(\omega_1,\omega_2)\in R^2$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)|<H^{-w_1+\gamma_1} \\ |P(\omega_2)|<H^{-w_2+\gamma_2} \\ |P'(\omega_1)|<H^{1-\gamma_1-\gamma_2-\varepsilon} \end{cases},$$

где $w_1+w_2=n-1$, $0<\gamma_1+\gamma_2<1$ имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)\in Z[x]$. Тогда $\mu B(\varepsilon)=0$ при любом $\varepsilon>0$, где $\mu B(\varepsilon)$ – мера Лебега множества $B(\varepsilon)$.

Теорема 2 позволяет построить регулярную систему векторов с действительными алгебраическими координатами и на основании этого получать оценки снизу для размерности Хаусдорфа. Метод, которым проводится доказательство, основан на методе существенных и несущественных областей В.Г. Спринджука [3]. Центральным моментом доказательства является новая арифметико-топологическая классификация областей, в которых целочисленные многочлены, реализующие теорему Минковского о линейных формах, и их производные принимают значения, не превосходящие по модулю некоторой величи-