Л.А. Романович

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ФОРМА РУППОИДА ЛИ $\Pi^k(B)$

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях. В работах Ш. Эресмана развит подход к построению основ геометрии, который базируется на понятиях группоида Ли, алгеброида Ли и k-струи гладкого отображения. Изложение основ дифференциальной геометрии, использующее группоиды Ли и алгеброиды Ли, приведено в монографии К. Маккензи [1].

Эли Картан ввел понятие фундаментальной формы для изучения свойств псевдогрупп. Она также играет важную роль при исследовании G-структур. Обобщение фундаментальной формы Картана на произвольном группоиде Ли построено в работах И.В. Белько [1].

Нашей целью является построение обобщения классической формы Картана на группоиде Ли $\Pi^k(B)$, исследование ее свойств и возможностей применения.

В работе мы будем использовать: канонический морфизм группоидов Ли π^{k-1}_k: $\Pi^k(B) \to \Pi^{k-1}(B)$, представление алгеброида Ли $A\Pi^k(B)$ как алгеброида Ли J^kTB k-струй векторных полей на B, скобку с усечением $A\Pi^k(B) \wedge A\Pi^k(B) \to A\Pi^{k-1}(B)$. Зафиксируем точку $x \in B$. Пусть $\xi \in \Pi^k(B)_x$ – репер в точке $y \in B$. Так как пространства J^k_yTB и $T_{\xi^y_x}\Pi^k(B)_x$ изоморфны, то произвольному реперу $\xi = j^k_x\varphi$ и локальному векторному полю X на B соответствует изоморфизм

$$J^{k-1}_xTB \to T_\xi\Pi^{k-1}(B)_x :\ j^{k-1}_xX \to (\varphi_* X)^{k-1}_{\xi^{k-1}}.$$

Определим фундаментальную форму Θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ следующим образом. Пусть $p \in T^\alpha_\xi\Pi^k(B)$ – α-вертикальный касательный вектор в точке ξ. Тогда касательный вектор p можно представить как лифт векторного поля X^k_ξ. Поставим в соответствие вектору $p = X^k_\xi$ касательный вектор $X^k_y \in A\Pi^k(B)$ с помощью правого умножения на ξ^{-1}. Затем к вектору X^k_y применим операцию усечения π^{k-1}_k. Наконец, переместим полученный вектор в точку x с помощью отображения γ^{-1}. Композиция указанных отображений $\Theta^k = \gamma^{-1} \circ \pi^k_{k-1} \circ \xi^{-1}$ называется фундаментальной формой группоида Ли $\Pi^k(B)$.

Теорема 1. Фундаментальная форма Θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ обладает следующими свойствами:

1) форма Θ^k эквивариантна относительно правого действия группы G^k_x;

2) форма Θ^k левоинвариантна;

3) ограничение формы Θ^k на алгеброид Ли $A\Pi^k(B)$ совпадает с усечением π^{k-1}_k.

Доказательство.

1. Пусть $\xi = j^k_x\varphi$ и η – элемент группы Ли G^k_x, т.е. $\eta = j^k_x\psi$, причем исток и устье диффеоморфизма ψ находятся в точке $x \in B$. Пусть $X^k_\xi \in T^\alpha_\xi \Pi^k(B)$. Так как $\gamma^{-1}(X^k_\xi) = \gamma^{-1}(R_{\eta_*}X^k_\xi)$, то

$$\left\langle R_{\eta_*}X^k_\xi, \Theta^k \right\rangle = \left((\varphi\circ\psi)^{-1}\right)^{k-1}_* \circ \pi^k_{k-1} \circ \gamma^{-1}(\psi^k_* X^k_\xi) =$$
$$\left((\psi)^{-1}\right)^{k-1}_* \circ \left\langle X^k_\xi, \Theta^k \right\rangle.$$

Следовательно, форма Θ^k эквивариантна относительно правого действия группы G^k_x.

2. Пусть $\Phi = L(j^k\psi)$, где ψ – левый сдвиг базы B. Тогда

$$\left\langle \Phi_* X^k_\xi, \Theta^k \right\rangle = \left((\psi\circ\varphi)^{-1}\right)^{k-1}_* \circ \pi^k_{k-1} \circ \gamma^{-1}(\psi^k_* X^k_\xi) =$$
$$= \left(\varphi^{-1}\right)^{k-1}_* \circ (\psi^{-1})^{k-1}_* \circ \pi^k_{k-1} \circ \psi^k_* \circ \gamma^{-1}(X^k_\xi) =$$
$$= \left(\varphi^{-1}\right)^{k-1}_* \circ (\psi^{-1})^{k-1}_* \circ \psi^{k-1}_* \circ \pi^k_{k-1} \circ \psi^k_* \circ \gamma^{-1}(X^k_\xi) = \left\langle X^k_\xi, \Theta^k \right\rangle.$$

Следовательно, форма Θ^k является левоинвариантной.

3. Если $r \le k$, то можно построить отображение усечения π^r_k : $\Pi^k(B) \to \Pi^r(B)$: $j^k_x f \to j^r_x f$, причем $\pi^s_k \circ \pi^r_k = \mu^s_k$, если $s \le r \le k$. Рассмотрим алгеброид Ли группоида Ли $\Pi^k(B)$, который представляет собой векторное расслоение $A\Pi^k(B) = \bigcup T(\Pi^k(B)_x)_{\bar{x}}$, состоящее из α-вертикальных векторов над подмногообразием $\varepsilon(B)$. Для произвольного элемента $X^k \in A(\Pi^k(B))$ выполняется условие $\left\langle X^k, \Theta^k \right\rangle = X^{k-1}$. Это означает, что ограничение формы Θ^k на алгеброид Ли $A\Pi^k(B)$ совпадает с усечением π^{k-1}_k.

Теорема доказана.

Следующее утверждение связывает форму Θ^k и продолжения диффеоморфизмов базы B.

Теорема 2. Автоморфизм группоида Ли $\Pi^k(B)$ с усечением оставляет инвариантной фундаментальную форму Θ^k.

Литература

1. *Mackenzie K.* Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometrie. Cambridge Universitu Press, 1987. – 327p.

2. *I. Belko.* The fundamental form on a Lie groupoid of diffeomorphisms: 5th Conference Geometry an topology of Manifolds. – 2003. – P. 20-21.