О достижимости оценок характеристических показателей линейных систем со специальными экспоненциально убывающими возмущениями

С.Н.Батан (Беларусь, Минск)

Рассматриваем линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \qquad (1_A)$$

с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами.

Пусть $X_A(t)$ — упорядоченная бинормальная система решений системы (1_A); $\lambda_i(A)$ — характеристический показатель i-го столбца матрицы $X_A(t)$; $\delta_j(A)$ — характеристический показатель j-ой строки матрицы $X_A^{-1}(t)$. По суммам $\sigma_i(A) = \lambda_i(A) + \delta_i(A)$ определим (см. [1]) величину неправильности $\sigma_0(A) = \frac{\sigma_m(A)+\sigma_l(A)}{2}$, где $\sigma_m(A) = \max\limits_i \{\sigma_i(A)\} > \max\limits_{i \neq m} \{\sigma_i(A)\} = \sigma_l(A)$.

Вместе с исходной системой (1_A) будем рассматривать и возмущенную систему (1_{A+Q}) с кусочно-непрерывным возмущением, определяемым условием

$$\lambda[Q] \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln\|Q(t)\| < -\sigma_0(A).$$

В [1] установлено, что характеристические показатели $\lambda_1(A+Q) \leq \ldots \leq \lambda_n(A+Q)$ системы (1_{A+Q}), записанные в определенном порядке, удовлетворяют оценкам

$$\lambda_{k(i)}(A+Q) \le \lambda_i(A) + \frac{\sigma_m(A)-\sigma_i(A)}{2}, \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Возникает вопрос: являются ли оценки (2) достижимыми? Положительный ответ на него дает следующая

Теорема. Для любых чисел $2 \le n \in N$, $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2$, $m \in \{1, \ldots, n\}$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют система (1_A) с ограниченными бесконечно-дифференцируемыми на полуоси $[0,+\infty)$ коэффициентами, характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, величинами $\sigma_i(A) = \sigma_1$ для $m \ne i = 1, \ldots, n$ и $\sigma_m(A) = \sigma_2$, аналитическое возмущение $Q(\cdot)$ с показателем $\lambda[Q] < -\sigma_0 = -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ и перестановка $(k(1), \ldots, k(n))$ такие, что выполнены неравенства

$$\lambda_{k(i)}(A+Q) \ge \lambda_i(A) + \frac{\sigma_m(A)-\sigma_i(A)}{2} - \varepsilon\,\mathrm{sgn}|m-i|, \quad i = 1, \ldots, \text{n}.$$

Литература.

1. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1966. Т.2, № 7. С.898–907.