УДК 514.763.5

Л. А. Рамановіч

Інварыянтныя звязнасці ў групоідах Лі

У 50-х гадах XX ст. Ш. Эрэсман прапанаваў метад даследавання геаметрычных структур і іх працягаў з дапамогай групоідаў Лі, які можна прымяніць пры вывучэнні звязнасцяў вышэйшага парадку на дыферэнцыяльных мнагастайнасцях і ў вектарных расслаеннях. Цікавасць уяўляе разгляд звязнасцяў, якія ўзгоднены з некаторымі дадатковымі структурамі, зададзенымі на мнагастайнасцях. Вядомы прыклад такіх звязнасцяў — інварыянтныя звязнасці на аднародных прасторах, якія ўзгоднены са структурай аднароднай прасторы, зададзенай транзітыўным дзеяннем групы Лі G на дыферэнцавальнай мнагастайнасці $B=G/H$, дзе H — замкнутая падгрупа ў G. Развіццё тэорыі групоідаў і алгеброідаў Лі (гл., напрыклад, [1] і [2]) дае новыя магчымасці для іх прымянення.

Мэтай работы з'яўляецца вывучэнне інварыянтных звязнасцяў вышэйшага парадку ў групоідах Лі, або, інакш: рэгулярных сечываў расслаення элементаў звязнасцяў вышэйшага парадку ў дачыненні да дзеяння падоўжанага групоіда Лі. Ngo van Que [3] устанавіў адпаведнасць паміж звязнасцямі вышэйшага парадку ў групоідзе Лі і расшчэпамі далучаных да яго вектарных расслаенняў. У тэарэме 1 даказана, што для інварыянтнай звязнасці ў групоідзе Лі адпаведны расшчэп узгоднены з дзеяннем групоіда і яго працягам на далучаных вектарных расслаеннях. У тэарэме 2 даказана, што для групоіда Лі $\Pi(E)$ лінейных ізамарфізмаў слаёў вектарнага расслаення (E, p, B) з умовы ўзгодненасці дзеянняў вынікае інварыянтнасць адпаведнай звязнасці. У [3] даказана, што звязнасць парадку k адназначна вызначаецца сваёй праекцыяй парадку k-1 і дыферэнцыяльным аператарам спецыяльнага віду. У тэарэме 3 даказана, што для інварыянтнасці звязнасці парадку k дастаткова інварыянтнасці адпаведных праекцыі і дыферэнцыяльнага аператара.

Няхай (Ω, B) — групоід Лі над B, (Ω^k, B) — падаўжэнне групоіда (Ω, B) парадку k [3, с. 169], (E, p, B) — вектарнае расслаенне, далучанае да групоіда (Ω, B), $(J^k(E), p^k, B)$ — падаўжэнне расслаення (E, p, B) парадку k [3, с. 171], $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ — расслаенне элементаў звязнасцяў вышэйшага парадку [3, с. 186]. Далей будзе выкарыстана дзеянне групоіда (Ω^k, B) на расслаеннях $(J^k(E), p^k, B)$, $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ [3, с. 170, 189]. Няхай $Z = j^k_x\sigma\in\Omega^k$, дзе $\sigma: B\to\Omega$, $a\circ\sigma = id$, $X = j^k_x s\in J^k(E)$, $Y = j^k_x f\in Q^k(\Omega)$, тады

$$Z\cdot X = j^k_x\sigma\cdot j^k_x s = j^k_y(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot s(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}), \qquad (1)$$

$$Z\cdot Y = j^k_y(\sigma(b\circ\sigma)^{-1}\cdot(f\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot\sigma(x)^{-1})),\ \text{дзе}\ y = b\circ\sigma(x). \qquad (2)$$

Няхай Ω' — падгрупоід групоіда Ω [3, с. 165]. З дзеяння групоіда Ω^k на расслаенні $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ натуральным чынам вынікае наступнае азначэнне інварыянтнай звязнасці вышэйшага парадку ў дачыненні да дзеяння падоўжанага падгрупоіда $(\Omega')^k$.

Азначэнне. Звязнасць $c: B\to Q^k(\Omega)$ называецца інварыянтнай у дачыненні да дзеяння падгрупоіда $((\Omega')^k, B)$, калі для кожнага элемента $Z = j^k_x\sigma\in(\Omega')^k$ праўдзіцца ўмова: $c(y) = Z\cdot c(x)$.

Ngo van Que [3, с. 189] кожнай звязнасці парадку k у групоідзе Лі Ω ставіць у адпаведнасць расшчэп $\lambda_k: E\to J^kE$ дакладнай паслядоўнасці далучанных вектарных расслаенняў

$$0\to j^k_0E\to J^kE\to 0.$$

Тэарэма 1. Калі звязнасць $c: B\to Q^k(\Omega)$ інварыянтная ў дачыненні да дзеяння падгрупоіда $(\Omega')^k$, то для кожнага $X\in E_x$, $Z = j^k_x\sigma\in(\Omega')^k$ праўдзіцца ўмова:

$$\lambda_k(\sigma(x)\cdot X) = Z\cdot\lambda_k(X).$$

Доказ. Няхай $c: B\to Q^k(\Omega)$ — інварыянтная звязнасць парадку k у групоідзе Лі (Ω, B), $c(x) = j^k_x f$, $c(y) = j^k_y\bar{f}$. Тады

$$c(y) = [\text{паводле ўмовы тэарэмы}] = j^k_x\sigma\cdot j^k_x f =$$

$$= [\text{паводле азначэння (2) дзеяння групоіда на расслаенні элементаў звязнасцяў}] =$$

$$= j^k_y(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot(f\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot\sigma(x)^{-1}).$$

Марфізм $\lambda_k: E\to J^kE$ будуецца наступным чынам [3, с. 189]:

$$F^k(E) = \{j^k_x g / g: B\to E, p\circ g = x\}, c_x: F^k(E)/_x\to J^k(E)/_x: X = j^k_x g\to j^k_x(f\circ g),$$

$$i: E\to F^k(E): X\in E_x\to j^k_x\overline{X},$$

дзе $\overline{X}$ — пастаяннае адлюстраванне ў $X\in E_x$.

Няхай $\lambda_k = c\circ i$. Дакажам, што $\lambda_k(\sigma(x)\cdot X) = Z\cdot\lambda_k(X)$.

$$\lambda_k(\sigma(x)\cdot X) = (c_y\circ i_y)(\sigma(x)\cdot X) = c(j^k_x(\sigma(x)\cdot\overline{X})) =$$

$$= j^k_y(\bar{f}\cdot\sigma(x)\cdot\overline{X}) = j^k_y(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot(f\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot\sigma(x)^{-1})\cdot\sigma(x)\cdot\overline{X}) =$$

$$= j^k_y(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}f\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot\overline{X}).$$

$$Z\cdot\lambda_k(X) = j^k_x\sigma\cdot(c\circ i)(X) = j^k_x\sigma\cdot j^k_x(f\cdot\overline{X}) =$$

$$= j_y^k((\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot f(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot\overline{X}).$$

Параўнанне атрыманых вынікаў пацвярджае, што $\lambda_k(\sigma(x)\cdot X)=Z\cdot\lambda_k(X)$. Тэарэма даказана.

Няхай $\Pi(E)$ — групоід паслойных лінейных ізамарфізмаў вектарнага расслаення (E, p, B), Ω' — падгрупоід групоіда $\Pi(E)$.

Тэарэма 2. Калі для марфізму $\lambda_k{:}E\to J^k(E)$ выконваецца ўмова інварыянтнасці $\lambda_k(\sigma(x)\cdot X)=Z\cdot\lambda_k(X)$, то адпаведная звязнасць парадку k ў групоідзе $\Pi(E)$ інварыянтная адносна дзеяння групоіда $(\Omega')^k$.

Доказ. Няхай e_i — базіс у слаі E_x, $\lambda_k(e_i)=j_x^k s_i$. Звязнасць $c{:}B\to Q^k(\Pi(E))$ будуецца наступным чынам: сечыва f расслаення $(\Pi(E), b, B)$, якое праўдзіць умовы:

1) $a\circ f=\overline{x}$, дзе $\overline{x}{:}B\to x$, 2) $f\cdot e_i=s_i$,

задае элемент звязнасці парадку k у пункце $x\in B$ [3, с. 191]. Няхай $j_x^k\sigma\in(\Omega')^k$, $y=b\circ\sigma(x)$. Тады $\sigma(x)\cdot e_i$ — базіс слоя E_y. Няхай $\lambda_k(\sigma(x)\cdot e_i)=j_y^k\,\overline{s}_i=$ [паводле ўмовы тэарэмы] $=j_x^k\sigma\cdot j_x^k s_i=$ [паводле азначэння дзеяння (1)] $=j_y^k(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot s_i\circ(b\circ\sigma)^{-1})$. Няхай $c(x)=j_x^k f$ — элемент звязнасці ў пункце $x\in B$, $c(y)=j_y^k\overline{f}$ — элемент звязнасці ў пункце $y=b\circ\sigma(x)$, дзе f здавальняе ўмовам 1), 2), а сечыва $\overline{f}$ здавальняе ўмовам:

1′) $a\circ\overline{f}=\overline{y}$, дзе $\overline{y}{:}B\to y$, 2′) $\overline{f}(\sigma(x)\cdot e_i)=\overline{s}_i$

З транзітыўнасці дзеяння вынікае:

$$\overline{f}\cdot(\sigma(x)\cdot e_i)=(\overline{f}\cdot\sigma(x))\cdot e_i=\overline{s}_i=\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot s_i\circ(b\circ\sigma)^{-1}=$$
$$=(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot f\circ(b\circ\sigma)^{-1})\cdot e_i.$$

Значыць,

$\overline{f}\cdot\sigma(x)=(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot f\circ(b\circ\sigma)^{-1})$,

$\overline{f}=(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot f\circ(b\circ\sigma)^{-1})\cdot(\sigma(x))^{-1}$.

Адсюль вынікае, што

$$c(y)=j_y^k\overline{f}=j_y^k(\sigma\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot f\circ(b\circ\sigma)^{-1}\cdot\sigma(x)^{-1})=j_x^k\sigma\cdot j_x^k f.$$

Тэарэма даказана.

Адным з вядомых прыкладаў групоідаў Лі з'яўляецца групоід $\Pi^1(B)$, які складзены з 1-струменяў лакальных дыффеамарфізмаў мнагастайнасці B.

Гэты групоід дзейнічае на датычным расслаенні (TB, π, B):

$$\Pi^1(B)*TB\to TB\ (j_x^1 f, j_0^1\gamma)\to j_0^1(f\circ\gamma),$$

дзе $\gamma{:}J\to B$, $J\subset R$, $0\in J$, $\gamma(0)=x$, $j_0^1\gamma\in T_xB$, $j_x^1 f\in\Pi^1(B)$.

З доказаў тэарэм 1 і 2 вынікае, што звязнасць $c{:}B\to Q^k(\Pi^1(B))$ інварыянтная тады і толькі тады, калі

$$\lambda_k(\sigma(x)\cdot X)=Z\cdot\lambda_k(X), \text{ дзе } Z\in(\Omega')^k.$$

Ngo van Que [3, с. 192] будуе дыферэнцыяльны апаратар

$$\nabla_k: \underline{TB\to J^{k-1}TB\otimes T^*B}: \nabla_k(\mu)=D\circ\lambda_k(\mu),$$

дзе D — апаратар Спенсера:

$$D: \underline{J^{k-1}TB\otimes T^*B}: s\to j^1(\rho_{k-1}\circ s)-s.$$

Ngo van Que [3, с. 192] даказаў, што для ўсякай звязнасці λ_{k-1} парадку k-1 і дыферэнцыяльнага апаратара ∇_k, якi праўдзіць умовам *1), 2), 3)*, існуе адзіная звязнасць парадку k, якая індуцыруе звязнасць λ_{k-1} і апаратар ∇_k.

Тэарэма 3. Няхай марфізм $\lambda_{k-1}: TB\to J^{k-1}TB$ здавальняе ўмове:

$$\lambda_{k-1}(\sigma(x)\cdot X)=Z\cdot\lambda_k(X)$$

і $\nabla_k: \underline{TB\to J^{k-1}TB\otimes T^*B}$ інварыянтны ў дачыненні да дзеяння некаторага падгрупоіда дыферэнцыяльны апаратар, якi праўдзіць умовы *1), 2), 3)* [3, с. 192]. Тады існуе адзіны марфізм $\lambda_k: TB\to J^kTB$, якi праўдзіць умовы:

1') $\lambda_{k-1}=\rho_{k-1}\circ\lambda_k$,

2') $\nabla_k=D\circ\lambda_k$,

3') $\lambda_k(\sigma(x)\cdot X)=j_x^k\,\sigma\cdot\lambda_k(X)$.

Доказ. Няхай $\mu\in\Gamma(TB)$, $\mu(x)=X\in T_xB$, (U,φ) — лакальная карта ў наваколлі пункта $x\in B(\varphi(x)=(x^1, x^2, \dots, x^n))$, $X:(x^i, s^i)$, $\sigma(x)\cdot X:(y^i, \frac{\partial y^i}{\partial x^j}|_x s^j(x))$, тут $y=b\circ\sigma(x)$, (V,ψ) — лакальная карта ў наваколлі пункта y, $\psi(y)=(y^1, y^2, \dots, y^n)$. Запішам лакальны каардынатны выраз у выпадку адвольнага k:

$$\lambda_k(\mu):(x^i, s^i, \dots, s^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}),\ j_x^k\,\sigma\cdot\lambda_k(\mu)=(y^i, \frac{\partial y^i}{\partial x^j}|_x s^j(x), \dots, p^i_{j_1j_2\dots j_n}),$$

$$\lambda_k(\sigma(x)\cdot\mu)=(y^i, \frac{\partial y^i}{\partial x^j}|_x s^j(x), \dots, t^i_{j_1j_2\dots j_n}).$$

Паводле ўмовы тэарэмы для $m=k$-1 (гэта азначае, што $0\le j_1+j_2+\dots+j_n\le k$-$1$) праўдзіцца $\lambda_{k-1}(\sigma(x)\cdot X)=j_x^{k-1}\,\sigma\cdot\lambda_k(X)$.

Няхай зараз λ_k — звязнасць парадку k, для якой выконваюцца ўмовы $1'$ і $2'$. Для гэтай звязнасці

$$\nabla_k(\sigma(x)\cdot\mu)=D(\lambda_k(\sigma(x)\cdot\mu))=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}t^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}-t^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_j+1\dots\beta_n}\right)\otimes dx^j=$$

$$=j_x^k\,\sigma\cdot\nabla_k(\mu)=j_x^k\,\sigma\cdot D(\lambda_k(\mu))=(*)=D(j_x^k\,\sigma\cdot\lambda_k(\mu))=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}p^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}-p^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_j+1\dots\beta_n}\right)\otimes dx^j.$$

Пераход *(*)* тлумачыцца тым, што ўмова інварыянтнасці для апаратара Спенсера выконваецца. Але для $m=k$-1 праўдзіва $t^{i}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = p^{i}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$, значыць $t^{i}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j+1\ldots\beta_n} = p^{i}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j+1\ldots\beta_n}$.

Тэарэма даказана.

Вынікі тэарэм 1, 2, 3 можна выкарыстоўваць пры даследаванні інварыянтных звязнасцяў вышэйшых парадкаў на аднародных прасторах, грунтуючыся на звязнасцях першага парадку.

ЛІТАРАТУРА

1. *Mackenzie K.* Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometrie. Cambridge University Press, 1987.
2. *Белько И. В.* Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии. Мн., 1997.
3. *Ngo van Que.* Du prolongement des espaces fibres et des struktures infinitesimales. // Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 1969. № 17. P. 159–223.

SUMMARY

Conformity has been proved between invariant connections of the higerst orderst in groupoids Lie and vektor bundle morphisms, being in consequence which actions Lie groupoids.