Л.А. Романович

Методические указания по курсу

«Дифференциальная геометрия и топология»

Могилев 2008

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА»

Л.А. Романович

Методические указания по курсу

«Дифференциальная геометрия и топология»

Для студентов специальности
«Математика. Научно-педагогическая деятельность»
физико-математического факультета

Могилев 2008

УДК 514.1(076)
ББК 22.151
Р69

Печатается по решению редакционно-издательского совета УО «МГУ им. А.А. Кулешова»

Рецензент

кандидат физико-математических наук
доцент кафедры высшей математики
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»
И.И. Маковецкий

Романович, Л.А.

Р69 Методические указания по курсу «Дифференциальная геометрия и топология» / Л.А. Романович. – Могилев: УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2008. – 32 с.

Методические указания адресованы студентам физико-математического факультета, обучающихся по специальности «Математика. Научно-педагогическая деятельность». Они охватывают программный материал по дифференциальной геометрии и топологии третьего курса и включают в себя вопросы теории (определения и основные факты), а также практические задания по основным разделам

УДК 514.1(076)
ББК 22.151

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания предназначены для студентов физико-математического факультета, обучающихся по специальности «Математика. Научно-педагогическая деятельность». Они охватывают программный материал по дифференциальной геометрии и топологии третьего курса и включают в себя вопросы теории (определения и основные факты), а также задачи по основным разделам.

Весь материал разбит на три блока. Каждый блок содержит вопросы теории, индивидуальные задания и список используемой литературы. К каждому из заданий дается по четыре варианта ответа, один из которых является правильным.

Задания могут быть использованы для организации самостоятельной работы и для осуществления тестового контроля знаний студентов.

Рекомендуемая литература

1. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Ч. 2. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.
2. *Александров А.Д., Нецветаев Н. Ю.* Геометрия. – М. Наука, 1990. – 672 с.
3. *Болтянский В.Г., Ефремович В.А.* Наглядная топология. – М.: Наука, 1982. – 160 с.
4. *Кононов С.Г., Прасолов А.В.* и др. Топология. – Мн.: Вышэйшая школа, 1990. – 318 с.
5. *Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
6. Сборник задач по геометрии/ Под ред. Базылева В.Т. – М.: Просвещение, 1980. – 238 с.
7. Сборник задач по геометрии. Ч.2. / Под ред. Атанасяна Л.С. – М.: Просвещение, 1975. – 238 с.
8. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии / Под ред. Воднева В.Т. – Мн.: Вышэйшая школа, 1970. – 376 с.

ТЕМА I. ТОПОЛОГИЯ

1. Топологическое пространство

Литература: [1], [4], [6], [7].

Топологией на множестве X называется система подмножеств τ, обладающая следующими свойствами:

1) пустое множество $\varnothing$ и само множество X принадлежат системе τ;

2) объединение любого семейства подмножеств из системы τ принадлежит системе τ;

3) пересечение конечного семейства подмножеств из системы τ принадлежит системе τ.

При решении задач следует выполнять проверку трех аксиом топологического пространства.

2. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм

Литература: [1], [4], [7].

Понятие непрерывного отображения в топологии является обобщением соответствующего понятия из курса математического анализа. При решении задач можно пользоваться как определением, так и критериями непрерывности. Отображение гомеоморфизма является отношением эквивалентности на множестве M топологических пространств. Элементы фактор-множества $M/\sim$ называются *топологическими типами.*

3. Топологическое многообразие

Литература: [1], [4], [7].

Топологическим многообразием называется отделимое топологическое пространство со счетной базой. Если это пространство можно покрыть координатными окрестностями k-мерных карт. Важной характеристикой двумерных многообразий является *эйлерова характеристика.* Эта величина является топологическим инвариантом.

Задания для самоконтроля

Вопросы теории (определения и основные факты)

1.1. Топологией на множестве X называется система подмножеств τ, обладающая следующими свойствами:

А) пустое множество Ж и само множество X принадлежат системе τ;

объединение любого семейства подмножеств из системы τ принадлежитсистеме τ;

пересечение любого семейства подмножеств из системы τ принадлежит системе τ.

Б) пустое множество $\varnothing$ и само множество X принадлежат системе τ;

объединение любого семейства подмножеств из системы τ принадлежит системе τ;

пересечение любого конечного семейства подмножеств из системы τ принадлежит системе τ.

В) пустое множество $\varnothing$ и само множество X принадлежат системе τ;

объединение любого конечного семейства подмножеств из системы τ принадлежит системе τ;

пересечение любого семейства подмножеств из системы τ принадлежит системе τ.

Г) пустое множество $\varnothing$ принадлежат системе τ;

объединение любого семейства подмножеств из системы τ принадлежит системе τ;

пересечение любого семейства подмножеств из системы τ принадлежит системе τ.

1.2. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения подмножества $A \subset X$, если выполняется следующее условие:

А) $\forall\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \cap A \neq \varnothing$;

Б) $\forall\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \cap A = \varnothing$;

В) $\exists\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \cap A \neq \varnothing$;

Г) $\exists\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \subset A$.

1.3. Точка $x \in A$ называется внутренней точкой подмножества $A \subset X$, если выполняется следующее условие:

А) $\forall\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \cap A \neq \varnothing$;

Б) $\forall\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \cap A = \varnothing$;

В) $\exists\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \cap A \neq \varnothing$;

Г) $\exists\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \subset A$.

1.4. Точка $x \in X$ называется граничной точкой подмножества $A \subset X$, если выполняется следующее условие:

А) $\forall\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \cap A \neq \varnothing$;

Б) $\forall\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \cap A \neq \varnothing \wedge U(x) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$;

В) $\forall\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \cap A \neq \varnothing \vee U(x) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$;

Г) $\forall\, U(x) \in \tau(x) | U(x) \cap A = \varnothing \vee U(x) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$.

1.5. Базой топологии τ топологического пространства (X, τ) называется:

А) семейство β таких открытых множеств, что каждый элемент из τ является пересечением элементов из β;

Б) семейство β таких открытых множеств, что некоторый элемент из τ является объединением элементов из β;

В) семейство β таких множеств, что каждый элемент из τ является объединением элементов из β;

Г) семейство β таких открытых множеств, что каждый элемент из τ является объединением элементов из β.

1.6. Пусть (X, τ) и (Y, τ') – топологические пространства. Отображение $f: X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда выполняется условие:

А) образ любого открытого множества является открытым;

Б) образ некоторого открытого множества является открытым;

В) прообраз любого открытого множества является открыты;

Г) образ любого замкнутого множества является замкнутым.

1.7. Пусть (X, τ) и (Y, τ') – топологические пространства. Отображение $f: X \to Y$ называется гомеоморфизмом, если оно удовлетворяет условиям:

А) $f: X \to Y$ – биекция;
f и f^{-1} – непрерывные отображения;

Б) $f: X \to Y$ – иньекция;
f и f^{-1} – непрерывные отображения;

В) $f: X \to Y$ – сюрьекция;
f – непрерывное отображение;

Г) $f: X \to Y$ – биекция;
f – непрерывное отображение.

1.8. Гомеоморфными топологическими пространствами (топология естественная) являются

А) интервал и отрезок; Б) интервал и прямая;

В) интервал и окружность; Г) интервал и квадрат.

1.9. Топологическое пространство (X, τ) называется хаусдорфовым, если выполняется условие:

А) $\forall x \in X, \forall y \in X, (x \neq y), \exists U(x) \in \tau(x) \vee \exists V(y) \in \tau(y) \mid U(x) \cap V(y) = \varnothing$;

Б) $\forall x \in X, \forall y \in X, (x \neq y), \exists U(x) \in \tau(x) \wedge \exists V(y) \in \tau(y) \mid U(x) \cap V(y) = \varnothing$;

В) $\forall x \in X, \forall y \in X, \exists U(x) \in \tau(x) \wedge \exists V(y) \in \tau(y) \mid U(x) \cap V(y) = \varnothing$;

Г) $\exists x \in X, \exists y \in X, (x \neq y), \exists U(x) \in \tau(x) \wedge \exists V(y) \in \tau(y) \mid U(x) \cap V(y) = \varnothing$.

1.10. Топологическое пространство (X, τ) называется компактным, если

А) из любого покрытия этого пространства можно выделить конечное подпокрытие;

Б) существует такое покрытие этого пространства, из которого можно выделить конечное подпокрытие;

В) существует такое открытое покрытие этого пространства, из которого можно выделить конечное подпокрытие;

Г) из любого открытого покрытия этого пространства можно выделить конечное подпокрытие.

1.11. Топологическое пространство (X, τ) называется связным, если

А) $\exists U \in \tau \wedge \exists V \in \tau \mid U \cap V = \varnothing \wedge U \cup V = X$;

Б) не существует его разбиения на два непустых непересекающихся открытых множества;

В) $\exists U \in \tau \wedge \exists V \in \tau \mid U \cup V = X$;

Г) существует его разбиение на два непустых непересекающихся открытых множества.

1.12. Следующие свойства топологических пространств не сохраняются при гомеоморфизмах:

А) отделимость;

Б) метризуемость;

В) линейная связность и связность;

Г) компактность.

1.13. Пусть (X, τ) – двумерное топологическое многообразие, K – некоторое его клеточное разложение. (X, τ) называется ориентируемым, если

А) клетки K можно ориентировать так, что любые две клетки, имеющие общую сторону, будут противоположно ориентированы;

Б) клетки K можно ориентировать так, что любые две клетки, имеющие общую сторону, будут одинаково ориентированы;

В) клетки K можно ориентировать так, что найдутся две одинаково ориентированные клетки;

Г) клетки K можно ориентировать так, что найдутся две противоположно ориентированные клетки.

1.14. Неориентируемыми двумерными топологическими многообразиями являются:

А) сфера, тор, цилиндр;

Б) лист Мебиуса, сфера с дырой, сфера с ручкой;

В) лист Мебиуса, проективная плоскость, сфера с пленкой;

Г) бутылка Клейна, сфера с дырой, лист Мебиуса.

1.15. Тор, лист Мебиуса, сфера с дырой, проективная плоскость имеют следующие эйлеровы характеристики:

А) тор: $\chi = 0$; лист Мебиуса: $\chi = 1$;

Б) сфера с дырой: $\chi = 1$; проективная плоскость: $\chi = 0$;

В) сфера с ручкой: $\chi = 0$; сфера с пленкой: $\chi = 2$;

Г) бутылка Клейна: $\chi = 2$; сфера: $\chi = 2$.

1.16. (Теорема Эйлера для многогранников) В любом простом многограннике

А) сумма числа вершин и числа ребер на две единицы больше числа его граней;

Б) сумма числа вершин и числа ребер на две единицы меньше числа его граней;

В) сумма числа вершин и числа граней на две единицы меньше числа его ребер;

Г) сумма числа вершин и числа граней на две единицы боьше числа его ребер;

1.17. Гомеоморфными топологическими многообразиями являются

А) цилиндр и лист Мебиуса; Б) сфера и куб;

В) тор и бутылка Клейна; Г) сфера и проективная плоскость.

Практические задания

2.1. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$, τ – семейство подмножеств множества X является топологией на X, если

А) $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$;

Б) $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$;

В) $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$;

Г) $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}\}$.

2.2. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, $A = \{b, c, d\}$. Тогда

А) $\overline{A} = \{a, b, c, d\}$, $\operatorname{int} A = \{b, c\}$, $\partial A = \{a, d\}$;

Б) $\overline{A} = \{b, c, d\}$, $\operatorname{int} A = \varnothing$, $\partial A = \{a, d\}$;

В) $\overline{A} = \{a, b, c, d\}$, $\operatorname{int} A = \{b, c, d\}$, $\partial A = \{a\}$;

Г) $\overline{A} = \{b, c, d\}$, $\operatorname{int} A = \varnothing$, $\partial A = \{b, c, d\}$.

2.3. Пусть $(\mathbb{R}, \tau)$ – топологическое пространство действительных чисел с естественной топологией, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ – подмножество целых чисел, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ – подмножество рациональных чисел. Тогда

А) $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{N}} = \varnothing$;

Б) $\overline{\mathbb{Z}} = \varnothing$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{N}} = \varnothing$;

В) $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$;

Г) $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{N}} = \varnothing$.

2.4. Пусть $(\mathbb{R}^2, \tau)$ – топологическое пространство действительных чисел с естественной топологией, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ – окружность, (α, β) – интервал, $[\alpha, \beta)$ – полуинтервал, $[\alpha, \beta]$ – отрезок в $\mathbb{R}^2$. Гомеоморфными подпространствами являются:

А) окружность S^1 и отрезок $[\alpha, \beta]$;

В) окружность S^1 и полуинтервал $[\alpha, \beta)$;

В) интервал (α, β) и полуинтервал $[\alpha, \beta)$;

Г) окружность S^1 и интервал (α, β).

2.5. Пусть $(\mathbb{R}^2, \tau_1)$ – топологическое пространство действительных чисел с естественной топологией, $(\mathbb{R}^2, \tau_2)$ – топологическое пространство действительных чисел с топологией «бабочек», $(\mathbb{R}^2, \tau_3)$ – топологическое пространство действительных чисел с топологией «повернутых бабочек». Тогда

А) топологии τ_1 и τ_2 несравнимы, топологии τ_1 и τ_3 несравнимы;

Б) топология τ_1 слабее, чем τ_2, топологии τ_1 слабее, чем τ_3;

В) топология τ_1 сильнее, чем τ_2, топологии τ_2 и τ_3 несравнимы;

Г) топологии τ_1 и τ_2 несравнимы, топологии τ_2 и τ_3 эквивалентны.

2.6. Пусть $(\mathbb{R}^2, \tau)$ – топологическое пространство действительных чисел с естественной топологией, замкнутыми подмножествами являются

А) множество всех точек некоторой прямой;

Б) интервал с концами a и b;

В) полуинтервал с концами a и b;

Г) полупространство $\{\mathbb{R}_+^2 | (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$.

2.7. Пусть $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Под открытыми множествами будем понимать пустое множество, все K и «полосу», т.е. множество точек, координаты которых связаны соотношением: $b < x \le 1, 0 \le b < 1$. Тогда замыкание множества $N_1 = \{\, 0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2} \}$ равно

А) $\overline{N}_1 = \{(x, y) \in K \mid 0 \le x \le \frac{1}{2}\}$; Б) $\overline{N}_1 = \{(x, y) \in K \mid 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$;

В) $\overline{N}_1 = K$; Г) $\overline{N}_1 = \{(x, y) \in K \mid \frac{1}{2} \le x \le 1\}$.

2.8. Пусть $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Под открытыми множествами будем понимать пустое множество, все K и «полосу», т.е. множество точек, координаты которых связаны соотношением: $b < x \le 1, 0 \le b < 1$. Тогда замыкание множества $N_2 = \{\, \frac{1}{2} \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{1}{2} \}$ равно

А) $\overline{N}_2 = \{(x, y) \in K \mid 0 \le x \le \frac{1}{2}\}$; Б) $\overline{N}_2 = \{(x, y) \in K \mid 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$;

В) $\overline{N}_2 = K$; Г) $\overline{N}_2 = \{(x, y) \in K \mid \frac{1}{2} \le x \le 1\}$.

2.9. Пусть $(\mathbb{R}^2, \tau)$ – топологическое пространство действительных чисел с естественной топологией. Связным подмножеством в индуцированной топологии является

А) множество точек плоскости, каждая из которых имеет хотя бы одну рациональную координату;

Б) множество точек плоскости, имеющих только одну рациональную координату;

В) множество точек плоскости, имеющих ровно две рациональные координаты;

Г) множество точек плоскости, имеющих только одну иррациональную координату.

2.10. Пусть $(\mathbb{R}^3, \tau)$ – топологическое пространство действительных чисел с естественной топологией. Компактным подмножеством в индуцированной топологии является

А) открытый шар $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$, где $r > 0$;

Б) множество, состоящее из всех точек внутренней области тора;

В) конечное множество точек $P_1, P_2, \ldots P_k$.

Г) бесконечное множество точек числовой оси Ox с координатами 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

2.11. Эйлерова характеристика замкнутого круга равна

А) 1; В) 2;
Б) 0; Г) 3.

2.12. Эйлерова характеристика замкнутого кольца равна

А) 1; В) 2;
Б) 0; Г) 3.

2.13. Эйлерова характеристика боковой поверхности n-угольной призмы равна

А) 1; Б) 0; В) 2; Г) 3.

2.14. Эйлерова характеристика боковой поверхности n-угольной пирамиды равна

А) 1; Б) 0; В) 2; Г) 3.

2.15. Гомеоморфизм между интервалом $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и числовой прямой устанавливает отображение

А) $y = \operatorname{tg} x$; В) $y = \operatorname{arctg} x$;
Б) $y = \operatorname{ctg} x$; Г) $y = \operatorname{arcctg} x$.

2.16. Гомеоморфизм между интервалом $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и числовой прямой устанавливает отображение

А) $y = \operatorname{tg} x$; В) $y = \operatorname{arctg} x$;
Б) $y = \operatorname{ctg} x$; Г) $y = \operatorname{arcctg} x$.

ТЕМА II. ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Уравнение линии

Литература: [1], [2], [6], [7], [8].

Способы задания линий: *векторный*, *векторно-параметрический*, *явный*, *неявный*. *Естественным параметром* кривой является длина дуги.

2. Сопровождающий трехгранник кривой

Литература: [1], [2], [6], [7], [8].

Элементами сопровождающего трехгранника кривой являются: *касательная прямая*, *главная нормаль*, *бинормаль*, *соприкасающаяся плоскость*, *нормальная плоскость*, *спрямляющая плоскость*.

3. Кривизна и кручение кривой

Литература: [1], [2], [6], [7], [8].

Важными характеристиками гладкой кривой являются *кривизна* и *кручение*. Эти величины присутствуют в формулах Френе и натуральных уравнениях линии.

Задания для самоконтроля

Вопросы теории (определения и основные факты)

1.1. Пусть кривая $\gamma \subset A^3$ задана векторным уравнением $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ на интервале $J \subset \mathbb{R}$. Тогда кривая γ называется гладкой кривой класса C^k, если

А) векторная функция $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ непрерывна в каждой точке интервала J;

Б) вектор $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ в каждой точке интервала J;

В) векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,''(t)$ неколлинеарны в каждой точке интервала J;

Г) векторная функция $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ имеет непрерывные производные в каждой точке интервала J до порядка k включительно.

1.2. Пусть кривая $\gamma \subset A^3$ задана векторным уравнением $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ на интервале $J \subset \mathbb{R}$. Тогда кривая γ называется регулярной если

А) векторная функция $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ непрерывна в каждой точке интервала J;

Б) вектор $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ в каждой точке интервала J;

В) векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,''(t)$ неколлинеарны в каждой точке интервала J;

Г) векторная функция $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ дифференцируема в каждой точке интервала.

1.3. Пусть кривая $\gamma \subset A^3$ задана векторным уравнением $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ на интервале $J \subset \mathbb{R}$. Тогда кривая γ называется бирегулярной, если

А) векторная функция $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ непрерывна в каждой точке интервала J;

Б) вектор $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ в каждой точке интервала J;

В) векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,''(t)$ неколлинеарны в каждой точке интервала J;

Г) векторная функция $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ имеет непрерывные производные в каждой точке интервала J до порядка k включительно.

1.4. Натуральный параметр кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, вычисляется по формуле

А) $s(t) = x'(t) + y'(t) + z'(t)$;

Б) $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(x'(\tau)\right)^2 + \left(y'(\tau)\right)^2 + \left(z'(\tau)\right)^2}\, d\tau$;

В) $s(t) = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(\tau)\right)^2 + \left(y'(\tau)\right)^2 + \left(z'(\tau)\right)^2}\, d\tau$;

Г) $ds = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 dt$.

1.5. Кривизна кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, вычисляется по формуле

А) $k(t) = \vec{r}\,''(t)$;

Б) $k(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)\vec{r}\,'''(t)}{\left[\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)\right]^2}$;

В) $k(t) = \dfrac{\left|\left[\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|^3}$;

Г) $k(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)\vec{r}\,'''(t)}{\left[\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,'''(t)\right]^2}$.

1.6. Кручение кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, вычисляется по формуле

А) $\chi(t) = \vec{r}\,''(t)$;

Б) $\chi(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)\vec{r}\,'''(t)}{\left[\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)\right]^2}$;

В) $\chi(t)=\dfrac{\left|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^{3}}$;

Г) $\chi(t)=\dfrac{\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\vec{r}'''(t)}{\left|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}'''(t)\right]\right|^{2}}$.

1.7. Единичные векторы осей сопровождающего трехгранника кривой $\gamma\subset\acute{A}^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t)$, вычисляется по формулам

А) $\vec{\tau}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|},\vec{\nu}=\dfrac{\left[\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\vec{r}'(t)\right]}{\left|\vec{r}'(t)\right|\left|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\right|},\vec{\beta}=\dfrac{\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]}{\left|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\right|}$;

Б) $\vec{\iota}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|},\vec{\nu}=\dfrac{\left[\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\vec{r}'''(t)\right]}{\left|\vec{r}'''(t)\right|\left|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\right|},\vec{\beta}=\dfrac{\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]}{\left|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\right|}$;

В) $\vec{\tau}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|},\vec{\nu}=\dfrac{\left[\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\vec{r}'(t)\right]}{\left|\vec{r}'(t)\right|\left|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\right|},\vec{\beta}=\dfrac{\left[\vec{r}'(t)\vec{r}'''(t)\right]}{\left|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}'''(t)\right]\right|}$;

Г) $\vec{\tau}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|},\vec{\beta}=\dfrac{\left[\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\vec{r}'(t)\right]}{\left|\vec{r}'(t)\right|\left|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\right|},\vec{\nu}=\dfrac{\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]}{\left|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\right|}$.

1.8. Касательной прямой к регулярной кривой $\gamma\subset\acute{A}^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t)$, в точке $M_0\in\gamma$ называется

А) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{r}=\vec{r}(t_0)$;

Б) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{\tau} = \vec{\tau}\,(t_0)$;
В) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{\nu} = \vec{\nu}(t_0)$;
Г) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t_0)$.

1.9. Главной нормалью бирегулярной кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, в точке $M_0 \in \gamma$ называется
А) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{r} = \vec{r}(t_0)$;
Б) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{\tau} = \vec{\tau}\,(t_0)$;
В) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{\nu} = \vec{\nu}(t_0)$;
Г) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t_0)$.

1.10. Бинормалью бирегулярной кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, в точке $M_0 \in \gamma$ называется
А) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{r} = \vec{r}(t_0)$;
Б) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{\tau} = \vec{\tau}\,(t_0)$;
В) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{\nu} = \vec{\nu}(t_0)$;
Г) прямая с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t_0)$.

1.11. Векторное уравнение касательной прямой для регулярной кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, имеет вид
А) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0)$;
Б) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda[\vec{r}\,'(t_0)\vec{r}\,''(t_0)]$;
В) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,''(t_0)$;
Г) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda[[\vec{r}\,'(t_0)\vec{r}\,''(t_0)]\vec{r}\,'(t_0)]$.

1.12. Векторное уравнение главной нормали для бирегулярной кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, имеет вид
А) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0)$;
Б) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda[\vec{r}\,'(t_0)\vec{r}\,''(t_0)]$;
В) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,''(t_0)$;
Г) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda[[\vec{r}\,'(t_0)\vec{r}\,''(t_0)]\vec{r}\,'(t_0)]$.

1.13. Векторное уравнение бинормали для бирегулярной кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, имеет вид
А) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0)$;
Б) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda[\vec{r}\,'(t_0)\vec{r}\,''(t_0)]$;
В) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,''(t_0)$;
Г) $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda[[\vec{r}\,'(t_0)\vec{r}\,''(t_0)]\vec{r}\,'(t_0)]$.

1.14. Каноническое уравнение касательной прямой для регулярной кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, имеет вид

А) $\dfrac{X-x}{x'}=\dfrac{Y-y}{y'}=\dfrac{Z-z}{z'}$;

Б) $\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}}=\dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}}=\dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$;

В) $\dfrac{X-x}{x}=\dfrac{Y-y}{y}=\dfrac{Z-z}{z}$;

Г) $\dfrac{X-x}{z'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}-y'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}=\dfrac{Y-y}{x'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}-z'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}}=\dfrac{Z-z}{y'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}-x'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}}$.

1.16. Каноническое уравнение главной нормали для бирегулярной кривой $\gamma\subset \mathring{A}^3$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}\,+z(t)\,\vec{k}$, имеет вид

А) $\dfrac{X-x}{x'}=\dfrac{Y-y}{y'}=\dfrac{Z-z}{z'}$;

Б) $\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}}=\dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}}=\dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$;

В) $\dfrac{X-x}{x}=\dfrac{Y-y}{y}=\dfrac{Z-z}{z}$;

Г) $\dfrac{X-x}{z'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}-y'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}=\dfrac{Y-y}{x'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}-z'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}}=\dfrac{Z-z}{y'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}-x'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}}$.

1.17. Каноническое уравнение бинормали для бирегулярной кривой $\gamma\subset \mathring{A}^3$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}\,+z(t)\,\vec{k}$, имеет вид

А) $\dfrac{X-x}{x'}=\dfrac{Y-y}{y'}=\dfrac{Z-z}{z'}$;

Б) $\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}}=\dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}}=\dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$;

В) $\dfrac{X-x}{x}=\dfrac{Y-y}{y}=\dfrac{Z-z}{z}$;

Г) $\dfrac{X-x}{z'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = \dfrac{Y-y}{x'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - z'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \dfrac{Z-z}{y'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - x'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}}$.

1.18. Уравнение нормальной плоскости для бирегулярной кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, имеет вид

А) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$;

Б) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$;

В) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$;

Г) $(X-x)x' + (Y-y)y' + (Z-z)z' = 0$.

1.19. Уравнение соприкасающейся плоскости для бирегулярной кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, имеет вид

А) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$;

Б) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$;

В) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$;

Г) $(X-x)x' + (Y-y)y' + (Z-z)z' = 0$.

1.20. Уравнение спрямляющей плоскости для бирегулярной кривой $\gamma \subset \mathring{A}^3$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}\, + z(t)\,\vec{k}$, имеет вид

А) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$;

Б) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$;

В) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$;

Г) $(X-x)x' + (Y-y)y' + (Z-z)z' = 0$.

Практические задания

2.1. Кривая $x = t, y = \dfrac{1}{t}, z = \dfrac{t^2}{3}$ имеет в декартовых координатах уравнения

А) $x^2 - 3z = 0, x^2y^2 = 1$;

Б) $x - 3\sqrt{z} = 0, xy = 1$;

В) $x^2 - 3z = 0, xy = 1$;

Г) $x^2 - 3z = 0, x|y| = 1$.

2.2. Регулярной кривой является

А) кривая $x = t, y = \dfrac{1}{t}, z = \dfrac{t^2}{3}$;

Б) кривая $x = 0, y = t^2, z = \dfrac{t^2}{3}$;

В) кривая $x = t^2 \cos t, y = t^2 \sin t, z = t^2$;
Г) кривая $x - 3\sqrt{z} = 0, xy = 1$.

2.3. Уравнение касательной прямой к кривой $x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$ при $t = -1$ имеет вид

А) $\frac{x - \frac{1}{4}}{1} = \frac{y - \frac{1}{3}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{1}$; Б) $\frac{x + \frac{1}{4}}{1} = \frac{y + \frac{1}{3}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{1}$;

В) $\frac{x + \frac{1}{4}}{1} = \frac{y - \frac{1}{3}}{-1} = \frac{z + \frac{1}{2}}{1}$; Г) $\frac{x - \frac{1}{4}}{1} = \frac{y + \frac{1}{3}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{1}$.

2.4. Уравнение касательной прямой кривой $x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$, параллельной плоскости $x + 3y + 2z = 0$ имеет вид

А) $\frac{x - 4}{4} = \frac{y + \frac{8}{3}}{-2} = \frac{z - 2}{1}$; Б) $\frac{x + 4}{4} = \frac{y - \frac{8}{3}}{-2} = \frac{z + 2}{1}$;

В) $\frac{x - 4}{-4} = \frac{y + \frac{8}{3}}{-2} = \frac{z - 2}{1}$; Г) $\frac{x - 4}{4} = \frac{y + \frac{8}{3}}{-2} = \frac{z - 2}{-1}$.

2.5. Уравнение нормальной плоскости кривой $z = x^2 + y^2, y = x$ в точке (3, 3, 18) имеет вид
А) $x + y - 12z = 0$;
Б) $x + y - 12z - 22 = 0$;
В) $x + y + 12z + 22 = 0$;
Г) $x + y + 12z + 222 = 0$.

2.6. Уравнение главной нормали кривой $x = t, y = t^2, z = e^t$ при $t = 0$ имеет вид

А) $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-2}$;

Б) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z - 1}{-1}$;

В) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-2}$;

Г) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z - 1}{-2}$.

2.7. Уравнение бинормали кривой $x = t, y = t^2, z = e^t$ при $t = 0$ имеет вид

А) $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$; Б) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1}$;

В) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$; Г) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-2}$.

2.8. Уравнение соприкасающейся плоскости кривой $x = \sin t, y = \cos t, z = \operatorname{tg} t$ при $t = \frac{\pi}{4}$ имеет вид

А) $x - y - 2\sqrt{2}(z-1) = 0$; Б) $2x + 6y + \sqrt{2}(z-5) = 0$;
В) $7x - y - \sqrt{2}(4z-1) = 0$; Г) $2x - 6y - \sqrt{2}(z-5) = 0$.

2.9. Уравнение спрямляющей плоскости кривой $x = \sin t, y = \cos t, z = \operatorname{tg} t$ при $t = \frac{\pi}{4}$ имеет вид

А) $x - y - 2\sqrt{2}(z-1) = 0$; Б) $2x + 6y + \sqrt{2}(z-5) = 0$;
В) $7x - y - \sqrt{2}(4z-1) = 0$; Г) $2x - 6y - \sqrt{2}(z-5) = 0$.

2.10. Уравнение винтовой линии $x = a \sin t, y = a \cos t, z = bt$ в естественной параметризации имеет вид

А) $x = a \sin s, y = a \cos s, z = bs$;

Б) $x = a \sin \frac{s}{a^2+b^2}, y = a \cos \frac{s}{a^2+b^2}, z = \frac{bs}{a^2+b^2}$;

В) $x = a \sin t, y = a \cos t, z = bt$;

Г) $x = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2.11. Кривизна винтовой линии $x = a \sin t, y = a \cos t, z = bt$ в произвольной точке равна

А) $\frac{a}{a^2+b^2}$; Б) $\frac{b}{a^2+b^2}$; В) $\frac{a^2}{a^2+b^2}$; Г) $\frac{b^2}{a^2+b^2}$.

2.12. Кручение винтовой линии $x = a \sin t, y = a \cos t, z = bt$ в произвольной точке равно

А) $\frac{a}{a^2+b^2}$; Б) $\frac{b}{a^2+b^2}$; В) $\frac{a^2}{a^2+b^2}$; Г) $\frac{b^2}{a^2+b^2}$.

2.13. Кручение линии $x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t, z = bt$ во всех точках равно ее кривизне, если

А) $a = 0, b = 1$; Б) $a = 1, b = 0$;
В) $a = -b$; Г) $a = b$.

2.14. Кривизна линии $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, z = \cos 2t$ принимает минимальное значение в точках

А) $t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Б) $t = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

В) $t = \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) $t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2.15. Радиус кривизны линии $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a\cos\frac{t}{2}$ принимает минимальное значение в точках

А) $t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Б) $t = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

В) $t = \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) $t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2.16. Линия $x = \frac{1+t}{1-t}, y = \frac{1}{1-t^2}, z = \frac{t}{1+t}$ расположена в плоскости

А) $x + 3y + 2z = 0$; Б) $x - 4y - 2z + 3 = 0$;
В) $x - 4y + 2z + 3 = 0$; Г) $x - 4y - 2z = 0$.

2.17. Радиус кривизны трактрисы $y = a\sin t, x = a(\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}) + \cos u)$ в произвольной точке равен

А) $\operatorname{tg} u$; Б) $\operatorname{ctg} u$;
В) $\operatorname{arcctg} u$; Г) $\operatorname{arctg} u$.

2.18. Радиус кривизны параболы $y^2 = 8x$ в точке $(\frac{9}{8}, 3)$ равен

А) $\frac{16}{125}$; Б) $\frac{4}{5}$; В) $\frac{125}{16}$; Г) $\frac{5}{4}$.

2.19. Натуральные уравнения винтовой линии $x = a\sin t, y = a\cos t, z = bt$ имеют вид

А) $k = \frac{a}{a^2+b^2}, \chi = \frac{b}{a^2+b^2}$; Б) $\chi = \frac{a}{a^2+b^2}, k = \frac{b}{a^2+b^2}$;

В) $k = \frac{a^2}{a^2+b^2}, \chi = \frac{b^2}{a^2+b^2}$; Г) $\chi = \frac{a^2}{a^2+b^2}, k = \frac{b^2}{a^2+b^2}$.

2.20. Натуральные уравнения линии $x = at, y = a\sqrt{2}\ln t, z = \frac{a}{t}$ имеют вид

А) $k = \frac{a\sqrt{2}}{a^2+s}, \chi = \frac{a}{a^2+s}$; Б) $\chi = \frac{a}{a^2+s}, k = \frac{a}{a^2+s}$;

В) $k = \frac{a\sqrt{2}}{4a^2+s^2}, \chi = \frac{a\sqrt{2}}{4a^2+s^2}$; Г) $\chi = \frac{a^2}{a^2+s^2}, k = \frac{s^2}{a^2+s^2}$.

ТЕМА III. ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ E^3

1. Понятие поверхности

Литература: [1], [2], [6], [7], [8].

Способы задания поверхностей: *векторный*, *векторно-параметрический*, *явный*, *неявный*. *Естественным параметром* кривой является длина дуги.

2. Касательная плоскость и нормаль. Линии на поверхности

Литература: [1], [2], [6], [7], [8].

Понятие касательной плоскости и нормали к поверхности. Линии на поверхности.

3. Первая квадратичная форма поверхности

Литература: [1], [2], [6], [7], [8].

Первая квадратичная форма поверхности. Длина дуги на поверхности. Угол между линиями на поверхности.

4. Вторая квадратичная форма поверхности

Литература: [1], [2], [6], [7], [8].

Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна кривой на поверхности. Нормальная кривизна кривой в естественной и произвольной параметризации. Полная и средняя кривизна кривой.

5. Замечательные линии на поверхности

Литература: [1], [2], [6], [7], [8].

Асимптотические линии на поверхности. Дифференциальное уравнение асимптотических линий. *Линии кривизны* на поверхности. Дифференциальное уравнение линий кривизны. *Геодезические линии* на поверхности. Дифференциальное уравнение геодезических линий.

Задания для самоконтроля

Вопросы теории (определения и основные факты)

1.1. Поверхность вращения линии $x = f(u)$, $z = \varphi(u)$ в плоскости Oxz вокруг оси Oz имеет параметрические уравнения

А) $x = \varphi(u)\cdot\cos v$, $y = \varphi(u)\cdot\sin v$, $z = f(u)$;

Б) $x = f(u)\cdot\cos v$, $y = f(u)\cdot\sin v$, $z = \varphi(u)$;

В) $x = \varphi(u)\cdot\cos v$, $y = f(u)$, $z = \varphi(u)\cdot\sin v$;

Г) $x = f(u)\cdot\cos u\cdot\cos v$, $y = f(u)\cdot\cos u\cdot\sin v$, $z = \varphi(u)\cdot\sin u$.

1.2. Тором называется поверхность, которая получается

А) при вращении окружности $x = R\cos u$, $y = 0$, $z = R\sin u$ вокруг оси Oz;

Б) при вращении цепной линии $x = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{u}{a}$, $y = 0$, $z = u$ вокруг оси Oz;

В) при вращении окружности $x = a + b\cos u$, $y = 0$, $z = b\sin u, b$ вокруг оси Oz;

Г) при вращении трактрисы $x = a\sin u$, $y = 0$, $z = a(\ln(\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}) + \cos u)$ вокруг оси Oz;

1.3. Катеноидом называется поверхность, которая получается

А) при вращении окружности $x = R\cos u$, $y = 0$, $z = R\sin u$ вокруг оси Oz;

Б) при вращении цепной линии $x = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{u}{a}$, $y = 0$, $z = u$ вокруг оси Oz;

В) при вращении окружности $x = a + b\cos u$, $y = 0$, $z = b\sin u, b$ вокруг оси Oz;

Г) при вращении трактрисы $x = a\sin u$, $y = 0$, $z = a(\ln(\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}) + \cos u)$ вокруг оси Oz;

1.4. Сфера радиуса R имеет параметрические уравнения

А) $x = R\cos u\cdot\cos v$, $y = R\cos u\cdot\sin v$, $z = R\sin u$;

Б) $x = u\cdot\cos v$, $y = u\cdot\sin v$, $z = av$;

В) $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = v$;

Г) $x = a\cdot\sin u\cdot\cos v$, $y = R\sin u\cdot\sin v$, $z = a(\ln(\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}) + \cos u)$.

1.5. Прямой геликоид имеет параметрические уравнения

А) $x = R\cos u\cdot\cos v$, $y = R\cos u\cdot\sin v$, $z = R\sin u$;

Б) $x = u\cdot\cos v$, $y = u\cdot\sin v$, $z = av$;

В) $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = v$;

Г) $x = a\cdot\sin u\cdot\cos v$, $y = R\sin u\cdot\sin v$, $z = a(\ln(\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}) + \cos u)$.

1.6. Псевдосфера имеет параметрические уравнения

А) $x = R\cos u\cdot\cos v$, $y = R\cos u\cdot\sin v$, $z = R\sin u$;

Б) $x = u\cdot\cos v$, $y = u\cdot\sin v$, $z = av$;

В) $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = v$;

Г) $x = a\cdot\sin u\cdot\cos v$, $y = R\sin u\cdot\sin v$, $z = a(\ln(\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}) + \cos u)$.

1.7. Круговой цилиндр имеет параметрические уравнения

А) $x = R\cos u\cdot\cos v$, $y = R\cos u\cdot\sin v$, $z = R\sin u$;

Б) $x = u\cdot\cos v$, $y = u\cdot\sin v$, $z = av$;

В) $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = v$;

Г) $x = a\cdot\sin u\cdot\cos v$, $y = R\sin u\cdot\sin v$, $z = a(\ln(\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}) + \cos u)$.

1.8. Пусть поверхность $S \subset E^3$ задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$ на области $D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда поверхность S называется гладкой поверхностью класса C^k, если

А) векторная функция $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$ непрерывна в каждой точке области D;

Б) вектор $\vec{r}\,(u, v) \neq \vec{0}$ в каждой точке области D;

В) векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ неколлинеарны в каждой точке области D;

Г) векторная функция $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$ имеет непрерывные частные производные в каждой точке в каждой точке области D до порядка k включительно.

1.9. Первая квадратичная форма поверхности $S \subset E^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$, имеет вид

А) $\varphi_1 = (r_u')^2 du^2 + (r_v')^2 dv^2$;

Б) $\varphi_1 = (\vec{r}_u')^2 du^2 + 2\vec{r}_u'\vec{r}_v' dudv + (\vec{r}_v')^2 dv^2$;

В) $\varphi_1 = (\vec{r}_u')^2 du^2 + \vec{r}_u'\vec{r}_v' dudv + (\vec{r}_v')^2 dv^2$;

Г) $\varphi_1 = (\vec{r}_u)^2 du^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_v dudv + (\vec{r}_v)^2 dv^2$.

1.10. Касательная плоскость к поверхности $S \subset E^3$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}$, имеет уравнение

А) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$;   Б) $\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}} = \dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}} = \dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}$;

В) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$;   Г) $\dfrac{X-x}{F_x'} = \dfrac{Y-y}{F_y'} = \dfrac{Z-z}{F_z'}$.

1.11. Нормаль к поверхности $S \subset E^3$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}$, имеет уравнение

А) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$;   Б) $\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}} = \dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}} = \dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}$;

В) $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$;   Г) $\dfrac{X-x}{F_x'} = \dfrac{Y-y}{F_y'} = \dfrac{Z-z}{F_z'}$.

1.12. Вторая квадратичная форма поверхности $S \subset E^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$, имеет вид

А) $\varphi_2 = \dfrac{\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uu}}}{\left\|\left[\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\right]\right\|}du^2 + \dfrac{2\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uv}}}{\left\|\left[\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\right]\right\|}dudv + \dfrac{\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{vv}}}{\left\|\left[\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\right]\right\|}dv^2$;

Б) $\varphi_2 = (\vec{r}_u')^2 du^2 + 2\vec{r}_u'\vec{r}_v' dudv + (\vec{r}_v')^2 dv^2$;

В) $\varphi_2 = \dfrac{\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uu}}}{\left\|\left[\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\right]\right\|}du^2 + \dfrac{\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uv}}}{\left\|\left[\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\right]\right\|}dudv + \dfrac{\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{vv}}}{\left\|\left[\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\right]\right\|}dv^2$;

Г) $\varphi_2 = \dfrac{\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{vv}}}{\left\|\left[\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\right]\right\|}du^2 + \dfrac{2\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uv}}}{\left\|\left[\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\right]\right\|}dudv + \dfrac{\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uu}}}{\left\|\left[\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\right]\right\|}dv^2$.

1.13. Нормальная кривизна линии на поверхности $S \subset E^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, имеет вид

А) $k_n = \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$, где φ_1 и φ_2 – первая и вторая квадратичные формы поверхности;

Б) $k_n = \dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$, где φ_1 и φ_2 – первая и вторая квадратичные формы поверхности;

В) $k(t) = \dfrac{\left\|\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]\right\|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$;

Г) $k(t) = \dfrac{\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\vec{r}'''(t)}{\left[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\right]^2}$.

1.14. Индикатрисой Дюпена называется множество точек, удовлетворяющее уравнению

А) $Lx^2 + Mxy + Ny^2 = 1$, где L, M, N – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности;

Б) $Lx^2 + Mxy + Ny^2 = \pm 1$, где L, M, N – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности;

В) $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = 1$, где L, M, N – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности;

Г) $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1$, где L, M, N – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

1.15. Точкой эллиптического типа называется такая точка поверхности, в которой

А) гауссова кривизна отрицательная;

Б) эйлерова кривизна равна нулю;

В) гауссова кривизна положительная;

Г) эйлерова кривизна отрицательная.

1.16. Точкой гиперболического типа называется такая точка поверхности, в которой

А) гауссова кривизна отрицательная;

Б) эйлерова кривизна равна нулю;

В) гауссова кривизна положительная;

Г) эйлерова кривизна отрицательная.

1.17. Точкой параболического типа называется такая точка поверхности, в которой

А) гауссова кривизна отрицательная;

Б) эйлерова кривизна равна нулю;

В) гауссова кривизна равна нулю;

Г) эйлерова кривизна отрицательная.

1.18. Асимптотическими линиями на поверхности $S \subset E^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$, называются линии, удовлетворяющие условию

А) $\overrightarrow{n}\overrightarrow{dr}\,\overrightarrow{d^2r} = 0$, где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности;

Б) $k_n \equiv 0$, где k_n – нормальная кривизна линии;

В) $\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \\ Edu + Fdv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0$, где L, M, N – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, E, F, G – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности;

Г) $k_g \equiv 0$, где k_g – геодезическая кривизна линии.

1.19. Линиями кривизны на поверхности $S \subset E^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$, называются линии, удовлетворяющие условию

А) $\overrightarrow{n}\overrightarrow{dr}\,\overrightarrow{d^2r} = 0$, где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности;

Б) $k_n \equiv 0$, где k_n – нормальная кривизна линии;

В) $\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \\ Edu + Fdv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0$, где L, M, N – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, E, F, G – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности;

Г) $k_g \equiv 0$, где k_g – геодезическая кривизна линии.

1.20. Геодезическими линиями на поверхности $S \subset E^3$, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$, называются линии, удовлетворяющие условию

А) $\overrightarrow{n}\overrightarrow{dr}\overrightarrow{d^2r} = 0$, где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности;

Б) $k_n \equiv 0$, где k_n – нормальная кривизна линии;

В) $\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \\ Edu + Fdv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0$, где L, M, N – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, E, F, G – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности;

Г) $k_g \equiv 0$, где k_g – геодезическая кривизна линии.

Практическая часть

2.1. Эллиптический параболоид $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ имеет параметрические уравнения

А) $x = u + v, y = u - v, z = \dfrac{1}{2}(u^2 + v^2)$; Б) $x = u + v, y = u - v, z = u^2 + v^2$;

В) $x = u + v, y = u - v, z = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$; Г) $x = u + v, y = u - v, z = u^2 - v^2$.

2.2. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ имеет параметрические уравнения

А) $x = 2\cos u \cdot \cos v, y = 2\cos u \cdot \sin v, z = 2\sin u$;

Б) $x = u \cdot \cos v, y = u \cdot \sin v, z = 2v$;

В) $x = 2\cos u, y = 2\sin u, z = v$;

Г) $x = 2\sin u \cdot \cos v, y = 2\sin u \cdot \sin v, z = 2(\ln(\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}) + \cos u)$.

2.3. Эллиптический цилиндр $x^2 + y^2 = 25$ имеет параметрические уравнения

А) $x = 2\cos u, y = 2\sin u, z = 2v$;

Б) $x = u \cdot \cos v, y = u \cdot \sin v, z = 2v$;

В) $x = 5\cos u, y = 5\sin u, z = v$;

Г) $x = 5\sin u \cdot \cos v, y = 5\sin u \cdot \sin v, z = 5(\ln(\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}) + \cos u)$.

2.4. Касательная плоскость к поверхности $xy^2 + z^3 = 12$ в точке $(1, 2, 2)$ имеет уравнение

А) $x + y + z - 9 = 0$; Б) $x + y + 3z - 9 = 0$;

В) $x + y + z - 18 = 0$; Г) $3x + y + z - 9 = 0$.

2.5. Нормаль к поверхности $xy^2 + z^3 = 12$ в точке $(1, 2, 2)$ имеет уравнение

А) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{3}$; Б) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$;

В) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{2}$; Г) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{2}$.

2.6. Касательная плоскость к поверхности $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ в точке $(3, 5, 7)$ имеет уравнение

А) $18x + 3y - 4z - 41 = 0$; Б) $6x + 3y - z - 9 = 0$;
В) $18x - 3y + 4z + 41 = 0$; Г) $3x + y + z - 9 = 0$.

2.7. Первая квадратичная форма сферы $x = R\cos u\cdot\cos v$, $y = R\cos u\cdot\sin v$, $z = R\sin u$ имеет вид

А) $\varphi_1 = R^2du^2 + R^2\cos^2u\, dv^2$; Б) $\varphi_1 = du^2 + R^2dv^2$;
В) $\varphi_1 = a^2\mathrm{ctg}^2\, u\, du^2 + a^2\sin^2 u\, dv^2$; Г) $\varphi_1 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

2.8. Первая квадратичная форма прямого геликоида $x = u\cdot\cos v$, $y = u\cdot\sin v$, $z = av$ имеет вид

А) $\varphi_1 = R^2du^2 + R^2\cos^2u\, dv^2$; Б) $\varphi_1 = du^2 + R^2dv^2$;
В) $\varphi_1 = a^2\mathrm{ctg}^2\, u\, du^2 + a^2\sin^2 u\, dv^2$; Г) $\varphi_1 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

2.9. Первая квадратичная форма кругового цилиндра $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = v$ имеет вид

А) $\varphi_1 = R^2du^2 + R^2\cos^2u\, dv^2$; Б) $\varphi_1 = du^2 + R^2dv^2$;
В) $\varphi_1 = a^2\mathrm{ctg}^2\, u\, du^2 + a^2\sin^2 u\, dv^2$; Г) $\varphi_1 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

2.10. Первая квадратичная форма псевдосферы $x = a\cdot\sin u\cdot\cos v$, $y = a\sin u\cdot\sin v$, $z = a(\ln(\mathrm{tg}\frac{u}{2}) + \cos u)$. имеет вид

А) $\varphi_1 = R^2du^2 + R^2\cos^2u\, dv^2$; Б) $\varphi_1 = du^2 + R^2dv^2$;
В) $\varphi_1 = a^2\mathrm{ctg}^2\, u\, du^2 + a^2\sin^2 u\, dv^2$; Г) $\varphi_1 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

2.11. Первая квадратичная форма поверхности $S \subset E^3$ имеет вид: $\varphi_1 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$. Периметр криволинейного треугольника, принадлежащего этой поверхности и образованного линиями $u = \frac{1}{2}av^2$, $u = -\frac{1}{2}av^2$, $v = 1$ равен

А) $\frac{3}{10}a$; Б) $\frac{10}{3}a$; В) $\frac{3}{10a}$; Г) $\frac{10}{3a}$.

2.12. Угол между кривыми $u + v = 0$ и $u - v = 0$, лежащими на поверхности $x = 4(u + v)$, $y = 3(u - v)$, $z = 2uv$, равен

А) $\frac{\pi}{2}$; Б) $\frac{\pi}{3}$; В) $\frac{\pi}{4}$; Г) π.

2.13. Вторая квадратичная форма псевдосферы $x = a\cdot\sin u\cdot\cos v$, $y = a\sin u\cdot\sin v$, $z = a(\ln(\mathrm{tg}\frac{u}{2}) + \cos u)$ имеет вид

А) $\varphi_2 = R^2du^2 + R^2\cos^2 u\, dv^2$; Б) $\varphi_2 = Rdv^2$;

В) $\varphi_2 = -a\,\mathrm{ctg}\,u\,du^2 + a\sin u\cdot\cos u\,dv^2$; Г) $\varphi_2 = -\frac{2a}{\sqrt{u^2+a^2}}dudv$.

2.14. Вторая квадратичная форма сферы $x = R\cos u\cdot\cos v$, $y = R\cos u\cdot\sin v$, $z = R\sin u$ имеет вид

А) $\varphi_2 = R^2du^2 + R^2\cos^2 u\, dv^2$; Б) $\varphi_2 = Rdv^2$;

В) $\varphi_2 = -a\,\mathrm{ctg}\,u\,du^2 + a\sin u\cdot\cos u\,dv^2$; Г) $\varphi_2 = -\frac{2a}{\sqrt{u^2+a^2}}dudv$.

2.15. Вторая квадратичная форма прямого геликоида $x = u\cdot\cos v$, $y = u\cdot\sin v$, $z = av$ имеет вид

А) $\varphi_2 = R^2du^2 + R^2\cos^2 u\, dv^2$; Б) $\varphi_2 = Rdv^2$;

В) $\varphi_2 = -a\,\mathrm{ctg}\,u\,du^2 + a\sin u\cdot\cos u\,dv^2$; Г) $\varphi_2 = -\frac{2a}{\sqrt{u^2+a^2}}dudv$.

2.16. Вторая квадратичная форма кругового цилиндра $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = v$ имеет вид

А) $\varphi_2 = R^2du^2 + R^2\cos^2 u\, dv^2$; Б) $\varphi_2 = Rdv^2$;

В) $\varphi_2 = -a\,\mathrm{ctg}\,u\,du^2 + a\sin u\cdot\cos u\,dv^2$; Г) $\varphi_2 = -\frac{2a}{\sqrt{u^2+a^2}}dudv$.

2.17. Главные кривизны поверхности $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ в начале координат равны

А) $k_1 = 2p$, $k_2 = -2q$; Б) $k_1 = 2p$, $k_2 = 2q$;
В) $k_1 = p$, $k_2 = -q$; Г) $k_1 = p$, $k_2 = q$.

2.18. Уравнение индикатрисы Дюпена поверхности $z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2$ в начале координат имеет вид

А) $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = \pm1$; Б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \pm1$;

В) $\frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = \pm1$; Г) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \pm1$.

2.19. Полная кривизна прямого геликоида $x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$, $z = av$ равна

А) $K = \dfrac{a^2}{a^2 + u^2}$;

Б) $K = -\dfrac{a^2}{a^2 + u^2}$;

В) $K = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + u^2}}$;

Г) $K = -\dfrac{a^2}{\left(a^2 + u^2\right)}$.

2.20. Уравнения линий кривизны поверхности $x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$, $z = av$ имеют вид

А) $v = \pm \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c$, где c – произвольное действительное число;

Б) $v = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c$, где c – произвольное действительное число;

В) $v = \pm (u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c$, где c – произвольное действительное число;

Г) $v = -(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c$, где c – произвольное действительное число.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Романович Людмила Александровна

Методические указания по курсу

«Дифференциальная геометрия и топология»

Для студентов специальности
«Математика. Научно-педагогическая деятельность»
физико-математического факультета

Технический редактор *А.Н. Гладун*
Компьютерная верстка *С.А. Кирильчик*

Подписано в печать 5.09.2008. Формат 60x84[1]/[16]
Гарнитура Times New Roman. Усл.-печ. л. 1,9
Уч.-изд. л. 2,1. Тираж 80 экз. Заказ № 385.

Учреждение образования "Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1.
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004 г.

Отпечатано на ризографе отдела оперативной полиграфии
УО "МГУ им. А.А. Кулешова" 212022, Могилев, Космонавтов, 1.