УДК 511.36

Д.В. ДУДКО, Н.В. САКОВИЧ, Н.В. ШАМУКОВА

О МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МОНИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НА КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

Исследована задача о приближении произвольного действительного числа значениями целочисленных монических многочленов. Согласно уже построенной теории для многочленов с произвольными старшими коэффициентами в работах В.Г. Спринджука, В.И. Берника, В.В. Бересневича, доказывается случай сходимости теоремы А.Я. Хинчина в задаче приближения нуля моническими многочленами.

Рассматривается обобщение результата, что два целочисленных многочлена без общих корней не могут принимать на отрезке малой длины слишком малые значения для монических полиномов. В случае монических многочленов и приближений действительных чисел целыми алгебраическими числами перестают действовать многие классические методы. Случай монических многочленов в чем-то аналогичен теореме Кубилюса для произвольных старших коэффициентов у многочленов второй степени, однако здесь возникают значительные технические трудности.

Доказательство теоремы основано на леммах оценок расстояний между аргументом и его корнем, а также леммах о корнях многочленов, их произведениях и количестве на заданном множестве. Леммы позволяют сделать точное покрытие множеств чисел с заданным порядком аппроксимации.

Хорошо известно [1], что два целочисленных многочлена без общих корней не могут принимать в трансцендентной точке слишком малые значения. Этот результат был обобщен с точки на интервалы малой длины [2], на круги малой площади в C [3], на цилиндры малой меры Хаара в Q_p [4]. В данной работе мы рассматриваем обобщение результата [2] на монические полиномы. Этот результат интересен сам по себе, важен для метрической теории трансцендентных чисел и в задачах распределения целых алгебраических чисел. Пусть $P_n(x) = a_s x^s + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_j \in Z, 0 \le j \le s; H = H(p) = \max\limits_{1 \le j \le s} |a_j|$. Будем рассматривать только целочисленные полиномы. Через $c(s)$ будем обозначать положительную величину, зависящую только от s. При этом $c(s)c(s) = c(s),\ c(s) + c(s) = c(s)$.

Далее: $<<$ – символ Виноградова, т. е., если $A << B$, то $A \le c(s)B$, A=B, если одновременно выполняется $A << B$ и $A >> B$, $H(P)$ – будет обозначать высоту целочисленного полинома $P(x)$. Через σ будем обозначать $\log_H c(s)$. Ясно, что σ зависит от H и s, и $\sigma \to 0$, при $H \to \infty$, а так же, если $H^A >> H^B$, то $A \ge B + \sigma$. Меру Лебега множества U, будем обозначать через $|U|$. Вначале сформулируем без доказательства три известных леммы.

Лемма 1. Пусть $P(x) \in Z[x]$. Тогда $|w-\chi_1| \le \left(2^t \dfrac{P(x)}{P'(w)} |\chi_1-\chi_2| \dots |\chi_1-\chi_j| \right)^{1/j}$,

где χ_1 – ближайший к w корень полинома $P(x)$, а его корни упорядочены следующим образом: $|\chi_1-\chi_2| \le |\chi_1-\chi_3| \le \dots |\chi_1-\chi_j|$.

Лемма 2. Пусть $P(x)$ полином степени s, высоты H и его старший коэффициент равен a_s. Тогда $|\chi_{i_1} \cdots \chi_{i_m}| << \dfrac{H}{a_s}$, где $\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_m}$ – попарно различные корни $P(x)$.

Лемма 3. Пусть $P(x)$ полином степени s, высоты H и его старший коэффициент равен a_s. Тогда существуют попарно различные корни $\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_m}$, такие, что $|\chi_{i_1} \cdots \chi_{i_m}| >> \dfrac{H}{a_s}$.

Лемма 4. Пусть $P(x) \in Z[x]$ степени s, $H(P) = H^{\mu}$, и пусть существует интервал $I \subset (-s, s)$, $|I| = H^{-\eta}$, такой, что $|P(w)| \le H^{-\tau}$, $\forall w \subset I, \tau > 0$ и $\tau + \mu - k\eta \ge \sigma$, где σ – некоторая функция вида $\log_H c(s)$; тогда в круге $B(0, s+2)$ содержатся хотя бы $k+1$ корней полинома $P(x)$.

Доказательство этой леммы можно легко провести от противного: пусть в круге $B(0, s+2)$ содержатся t корней: $\chi_1, \dots, \chi_t$, и пусть тогда

$$I' = I \Big/ \left(\bigcup_{i=1}^{t} B\left(\chi_i, \frac{H^{-\eta}}{t+1} \right) \right).$$

Так как $|I'| > 0$, то существует точка $x_0 \in I'$, и поэтому:

$$H^{-\tau} > |P(x_0)| = a_s |\chi_1 - x_0| \dots |\chi_t - x_0| |\chi_{t+1} - x_0| \dots |\chi_s - x_0| >>$$

$$H^{-\eta \cdot t} a_s |\chi_{t+1} - x_0| \dots |\chi_s - x_0| \ge H^{-\tau} a_s (|\chi_{t+1}| - |x_0|) \dots (|\chi_{t+1}| - |x_0|) >>$$

$$H^{-\eta \cdot t} a_s |\chi_{t+1}| \dots |\chi_s| = H^{-\eta \cdot t + \mu}.$$

В итоге $\mu + \tau - t \cdot \tau \le \sigma$. Противоречие.

Теорема. Пусть $\sigma > 0$ – некоторое действительное число, s – натуральное, $H(\sigma, s)$ – достаточно большое действительное число. Пусть $P(x), Q(x) \in Z[x]$ два взаимно простых многочлена со старшим коэффициентом 1, $H(P) = H^{\mu_1}$, $H(Q) = H^{\mu_2}$, $\deg[P(x)] = s_1$, $\deg[Q(x)] = s_2$, $s_1, s_2 \le s$.

Тогда, если для всех w из некоторого интервала $I \subset (-s, s)$, $|I| = H^{-\eta}$, $\eta > 0$, выполняются неравенства

$$|P(w)| < H^{-\tau_1}, \quad |Q(w)| < H^{-\tau_2}, \qquad \tau_1, \tau_2 > 0,$$

то

$$\min\{\tau_1 + \mu_1, \tau_2 + \mu_2\} + \max\{\tau_1 + \mu_1 - \eta, 0\} + \dots + \max\{\tau_1 + \mu_1 - (s_1 - 1)\eta, 0\} +$$
$$+ \max\{\tau_2 + \mu_2 - \eta, 0\} + \dots + \max\{\tau_2 + \mu_2 - (s_2 - 1)\eta, 0\} <$$
$$(s_1 - 1)\mu_2 + (s_2 - 1)\mu_1 + \max\{\mu_1, \mu_2\} + \sigma.$$

Заметим, что нам необходимо доказать неравенство вида.

$$\min\{\tau_1+\mu_1, \tau_2+\mu_2\}+x(\tau_1+\mu_1)+y(\tau_2+\mu_2)-\frac{x(x+1)+y(y+1)}{2}\eta<$$
$$<(s_1-1)\mu_2+(s_2-1)\mu_1+\max\{\mu_1,\mu_2\}+\sigma,$$

где $x, y \in N$.

Пусть $\chi_1(P),\ldots,\chi_{s_1}(P)$ – корни многочлена $P(x)$, а $\chi_1(Q),\ldots,\chi_{s_2}(Q)$ – корни многочлена $Q(x)$. Так как многочлены $P(w)$ и $Q(w)$ не имеют общих корней, то $|R(P,Q)|\geq 1$. Тогда

$$1\leq R(P,Q)=\prod_{1\leq i\leq s_1}\prod_{1\leq j\leq s_2}|\chi_i(P)-\chi_j(Q)|=\prod_{(i,j)\in S}|\chi_i(P)-\chi_j(Q)|\times\prod_{(i,j)\notin S}|\chi_i(P)-\chi_j(Q)|, \quad (1)$$

где S – некоторое множество индексов, которое мы можем выбирать. Пусть, не ограничивая общности, $|\chi_{s_1}(P)|=\max_{i,j}\{|\chi_i(P)|,|\chi_j(Q)|\}$, тогда поскольку $|\chi_i(P)-\chi_j(Q)|\leq 2\max\{|\chi_i(P)|,|\chi_j(Q)|\}$, то по лемме 2:

$$\prod_{(i,j)\notin S}|\chi_i(P)-\chi_j(Q)|\ll\prod_{(i,j)\notin S}\max\{|\chi_i(P)|,|\chi_j(Q)|\}\ll\prod_{i=1}^{s_1}\prod_{j\in S_i}|\chi_j(Q)|\times\prod_{j=1}^{s_2-1}\prod_{i\in S_j'}|\chi_i(P)|\ll$$
$$\ll\prod_{i=1}^{s_1}\left(H^{\mu_2-\gamma_2}\right)\times\prod_{j=1}^{s_2-1}\left(H^{\mu_1-\gamma_1}\right)=H^{(s_1-1)\mu_2+(s_2-1)\mu_1+\max\{\mu_1,\mu_2\}},$$

тогда неравенство (1) примет вид:

$$1\ll\prod_{(i,j)\in S}|\chi_i(P)-\chi_j(Q)|\times H^{(s_1-1)\mu_2+(s_2-1)\mu_1+\max\{\mu_1,\mu_2\}}. \quad (2)$$

Рассмотрим многочлен $P(x)$. Пусть

$$\gamma_i(P)=\{x\in I, |\chi_i(P)-x|\leq|\chi_j(P)-x|, 1\leq j\leq s_1\},\quad i=1,\ldots,s_1$$

($\gamma_i(P)$ – множество точек интервала I, для которых $\chi_i(P)$ – ближайший корень). Тогда, не ограничивая общности, будем считать

$$\gamma_1(P)=\max_{1\leq j\leq s_1}|\gamma_i(P)|,$$

$$|\chi_1(P)-\chi_2(P)|\leq|\chi_1(P)-\chi_3(P)|\leq\ldots\leq|\chi_1(P)-\chi_t(P)|\leq 8s,$$

$$8s\leq|\chi_1(P)-\chi_{t+1}(P)|\leq\ldots\leq|\chi_1(P)-\chi_{s_1}(P)|.$$

Обозначим $|\chi_1(P)-\chi_j(P)|$ через $H^{-m_j(P)}$, и положим

$$p_t(P)=m_{t+1}(P)+\ldots+m_t(P),\quad p_t^{/}(P)=m_{j+t}(P)+\ldots+m_{s_1}(P). \quad (3)$$

По лемме 3 существует набор корней $\chi_{i_1},\ldots,\chi_{i_k}$ такой, что $\left|\chi_{i_1}(P)\ldots\chi_{i_k}(P)\right| > c(s_1)H^{\mu_1}$.

Выбросим из этого набора все корни, по модулю меньшие $8s$.

Тогда получаем:

$$w-\chi_1(P) << \min_{1\le j\le t-1} H^{-\frac{\tau_1-p_j(P)-p_1^{/}(P)}{j}} << \min_{1\le j\le t-1} H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_j(P)}{j}}, \quad w\in\gamma_1(P). \tag{4}$$

Аналогично, рассмотрев многочлен $Q(x)$, получим

$$w-\chi_1(Q) << \min_{1\le j\le t_2-1} H^{-\frac{\tau_2-p_j(Q)-p_1^{/}(Q)}{j}} << \min_{1\le j\le t_2-1} H^{-\frac{\tau_2+\mu_2-p_j(Q)}{j}}, \quad w\in\gamma_1(Q). \tag{5}$$

(Где $\chi_i(Q), \gamma_i(Q), m_i(Q), p_i(Q), t_2, p_i^{/}(Q)$ вводятся аналогично). Пусть минимум в правой части неравенства (4) достигается при $j=j^{/}$, а минимум в правой части неравенства (5) – при $j=j^{//}$. Тогда из неравенства

$$H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_{j^{/}}(P)}{j^{/}}} \le H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_j(P)}{j}},$$

получаем

$$\frac{\tau_1+\mu_1-\left(m_{j+1}(P)+\ldots+m_t(P)\right)}{j} \le \frac{\tau_1+\mu_1-\left(m_{j^{/}+1}(P)+\ldots+m_t(P)\right)}{j^{/}}+\sigma.$$

учитывая, что $m_2(P)\ge\ldots\ge m_t(P)$, то при $i<j^{/}$

$$m_{i+1}(P)\ge\frac{\tau_1+\mu_1-p_{j^{/}}(P)}{j^{/}}+\sigma, \tag{6}$$

а при $i>j^{/}$

$$m_i(P)\le\frac{\tau_1+\mu_1-p_i(P)}{i}+\sigma\le\frac{\tau_1+\mu_1-p_{j^{/}}(P)}{j^{/}}+\sigma. \tag{7}$$

Аналогично

$$m_{i+1}(Q)\ge\frac{\tau_2+\mu_2-p_{j^{//}}(Q)}{j^{//}}+\sigma, \quad i=1,\ldots,j^{//}-1, \tag{8}$$

$$m_i(Q)\le\frac{\tau_2+\mu_2-p_i(Q)}{i}+\sigma\le\frac{\tau_2+\mu_2-p_{j^{//}}(Q)}{j^{//}}+\sigma, \quad i=j^{//}+1,\ldots,s_2. \tag{9}$$

Так как $\left|\gamma_1(P)\right|\ge\frac{|I|}{s_1}>>H^{-\eta}, \quad \left|\gamma_1(Q)\right|\ge\frac{|I|}{s_2}>>H^{-\eta}$,

то величины $\left|w-\chi_1(P)\right|, \ w\in\gamma_1(P)$ и $\left|w-\chi_1(Q)\right|, \ w\in\gamma_1(Q)$ можно сделать сравнимыми с $H^{-\eta}$. Поэтому

$$H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_i(P)}{i}} >> H^{-\eta} \quad \Rightarrow \quad \eta \geq \frac{\tau_1+\mu_1-p_i(P)}{i}+\sigma, \quad i=1,\ldots,s_1. \tag{10}$$

$$H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_i(Q)}{i}} >> H^{-\eta} \quad \Rightarrow \quad \eta \geq \frac{\tau_1+\mu_1-p_i(Q)}{i}+\sigma, \quad i=1,\ldots,s_2. \tag{11}$$

Предположим для определенности

$$\frac{\tau_2+\mu_2-p_{j''}(Q)}{j''} \geq \frac{\tau_1+\mu_1-p_{j'}(P)}{j'}. \tag{12}$$

Пусть $w' \in \gamma_1(P)$, $w'' \in \gamma_1(Q)$, тогда

$$|\chi_1(P)-\chi_1(Q)| \leq |\chi_1(P)-w'|+|w'-w''|+|w''-\chi_1(Q)| <<$$

$$<< H^{-\frac{\tau_2+\mu_2-p_{j''}(Q)}{j''}} + H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_{j'}(P)}{j'}} + H^{-\eta} << H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_{j'}(P)}{j'}}. \tag{13}$$

Отсюда

$$|\chi_i(P)-\chi_j(Q)| \leq |\chi_i(P)-\chi_1(P)|+|\chi_1(P)-\chi_1(Q)|+|\chi_1(Q)-\chi_j(Q)| <<$$

$$<< \max\left\{ H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_{j'}(P)}{j'}}, H^{-m_i(P)}, H^{-m_j(Q)} \right\}. \tag{14}$$

Положим $i' = \max\{i \mid \tau_1+\mu_1-i\eta > \sigma\}$, где σ определяется в лемме 4. Непосредственным подсчетом убеждаемся

$$\prod_{(i,j)\in M_{11}} |\chi_i(P)-\chi_j(Q)| = \prod_{i=1}^{j'} |\chi_i(P)-\chi_1(Q)| \times \prod_{i=j'+1}^{r} |\chi_i(P)-\chi_1(Q)| <<$$

$$<< H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_{j'}(P)}{j'}j'} \times H^{-p_j} = H^{-\tau_1-\mu_1}. \tag{15}$$

Далее покрываем $\tilde{S}$ множествами M_{1k} для всех $k=2,\ldots,j'''$, где j''' максимальное j такое, что выполняется равенство:

$$\max\left\{ H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_{j'}(P)}{j'}}, H^{-m_j(Q)} \right\} = H^{-\frac{\tau_1+\mu_1-p_{j'}(P)}{j'}}.$$

Аналогично, пользуясь формулами (6) и (14), получаем:

$$\prod_{(i,j)\in M_{1,k}} |\chi_i(P)-\chi_j(Q)| = \prod_{i=1}^{j'} |\chi_i(P)-\chi_k(Q)| \times \prod_{i=j'+1}^{1} |\chi_i(P)-\chi_k(Q)| <<$$

$$<< H^{\frac{\tau_1+\mu_1-p_{j'}(P)}{j'} j'} \times H^{-p_{j'}} = H^{-\tau_1-\mu_1}. \qquad (16)$$

Заметим теперь, что для всех $j > j'''$, формулу (14) можно заменить на

$$|\chi_i(P)-\chi_j(Q)| << \max\left\{ H^{\frac{\tau_1+\mu_1-p_j(P)}{j}}, H^{-m_i(P)}, H^{-m_j(Q)} \right\} = \max\left\{H^{-m_i(P)}, H^{-m_j(Q)}\right\} \quad (17)$$

и

$$\prod_{(i,j)\in M_{\bar{i},\bar{j}}} |\chi_i(P)-\chi_j(Q)| << H^{-\tau_1-\mu_1+(i'-1)\eta-|M_{\bar{i},\bar{j}}\cap S|\eta};$$

$$\prod_{(i,j)\in N_{\bar{i},\bar{j}}} |\chi_i(P)-\chi_j(Q)| << H^{-\tau_2-\mu_2+(i''-1)\eta-|N_{\bar{i},\bar{j}}\cap S|\eta}.$$

Заметим, что для покрытия множества S нужно не более $i'+1$ множеств $M_{i,j}$ и не более $i''+1$ множеств $N_{i,j}$, при этом всего множеств – не более $i'+i''+1$. Учитывая определения i' и i'', и то что нам нужна оценка сверху, то формально можно считать, что покрывающих множеств ровно $i'+i''+1$ (иначе в получаемые оценки сверху добавим нужное количество $H^{-\tau_1-\mu_1+(i'-1)\eta} >> 1$ и $H^{-\tau_2-\mu_2+(i''-1)\eta} >> 1$. Положим в качестве объединение всех множеств, которыми мы покрыли $\bar{S}$, и, подставив S в формулу (2), получим:

$$[\tau_1+\mu_1-(i'+1)\eta \text{ или } \tau_2+\mu_2-(i''+1)\eta] + i'(\tau_1+\mu_1) + i''(\tau_2+\mu_2) -$$
$$-(i'(i''+1)+i''(i'+1))\eta + |\bar{S}|\eta < (s_1-1)\mu_2 + (s_2-1)\mu_1 + \max\{\mu_1,\mu_2\} + \sigma.$$

Пользуясь определением i' и i'', и $|\bar{S}| = (i'+1)(i''+1)$, легко заметить, что для получения требуемого неравенство, нужно доказать

$$x^2+y^2+x+y \ge 2xy+2x,$$

или

$$(x-y)^2 \ge (x-y),$$

что очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гельфонд, А.О.*** Трансцендентные и алгебраические числа / А.О. Гельфонд. – М., 1952
2. ***Bernik, V.*** Application of Hausdorff Dimension in the Theory of Diophantine Approximation / V. Bernik // Acta arithmetica. – 1983. – Т. 42. – N 3. – С. 219-253.
3. ***Берник, В.И.*** О целочисленных многочленах, принимающих малые значения на некотором интервале / В.И. Берник, Ф.Ф. Желудевич // Весці АН БССР Сер. фіз.-мат. навук. – 1981. – № 3. – С. 27-33.

4. ***Берник, В.И.*** Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа / В.И. Берник, Ю.В. Мельничук. – Мн.: Наука и техника, 1988. – 144 с.

Поступила в редакцию 09 04.2007 г.