ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методические материалы для студентов специальности «Социология» факультета экономики и права

Могилев 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А. А. КУЛЕШОВА»

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методические материалы
для студентов специальности «Социология»
факультета экономики и права

В двух частях

Часть 1

Авторы-составители:
Л. А. Романович, А. М. Сазонова

Могилев
МГУ имени А. А. Кулешова
2015

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
О-75

Печатается по решению редакционно-издательского совета МГУ имени А. А. Кулешова

Рецензент

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики,
Белорусско-Российского университета
И. И. Маковецкий

Основы высшей математики : учебно-методические материалы : в 2 ч. /
О-75 авторы-составители: Л. А. Романович, А. М. Сазонова. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2015. – Ч. 1 – 100 с. : ил.
ISBN 978-985-568-085-8

Материалы адресованы студентам факультета экономики и права, обучающимся по специальности «Социология» на дневной и заочной форме обучения. Они охватывают программный материал по основам высшей математики и включают в себя вопросы теории (определения и основные факты), а также практические задания по основным разделам учебной программы. Весь материал разбит на пять укрупненных учебных модулей:

– Основные черты математического мышления. Основные этапы становления современной математики. Геометрия Евклида как первая естественнонаучная теория. Аксиоматический метод. Неевклидовы геометрии. Геометрия микро- и макромира. Парадоксы теории множеств и их философско-методологическое значение. Основные программы в истории математики: логицизм, формализм, конструктивизм. Роль математики в гуманитарных науках.

– Математические доказательства. Элементы, множества, отношения, отображения, числа. Конечные и бесконечные множества.

Общая постановка задачи о принятии решения.

– Комбинаторика. Элементы теории вероятностей.

– Основные понятия математической статистики.

Проблема преподавания математики для социологов в предлагаемых методических материалах решена путем использования содержательного контекста будущей профессии, а также акцентированием разделов теории вероятностей и математической статистики как основы изучаемого курса математики.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-568-085-8

ВВЕДЕНИЕ

Наш курс начнем с известного изречения великого ученого М. Ломоносова: «Математику только затем учить надо, что она ум в порядок приводит». Когда кто-то говорит, что «Социология» – гуманитарная наука, а посему достаточно обладать гуманитарным складом ума, то это рассматривается только как оправдание факта отсутствия развитости математических способностей. При этом не их отсутствия, а того, что навыки читать формулы и решать задачи не получили должного развития ранее и требуют больших усилий для сбалансированного развития ума социолога. А зачастую студенты настроены на то, что знание природы математических абстракций, математических методов, возможности их использования в социально-гуманитарной и экономической сфере являются «лишними» и формальными. Однако приобретение умения делать оценки правдоподобности информации, основанной на величинах и соотношениях, на наш взгляд, целесообразно появляется при изучении высшей математики в контексте с задачами социологического содержания. Эту особенность авторы и учитывали при разработке настоящего курса «Основы высшей математики» согласно образовательному стандарту Республики Беларусь.

Содержание учебной программы дисциплины «Основы высшей математики» включает в себя следующие укрупненные учебные модули:

- *Основные черты математического мышления. Основные этапы становления современной математики. Геометрия Евклида как первая естественнонаучная теория. Аксиоматический метод. Неевклидовы геометрии. Геометрия микро- и макромира. Парадоксы теории множеств и их философско-методологическое значение. Основные программы в истории математики: логицизм, формализм, конструктивизм. Роль математики в гуманитарных науках.*
- *Математические доказательства. Элементы множества, отношения, отображение числа. Конечные и бесконечные множества.*
- *Основные идеи математического анализа. Дифференциальные уравнения.*
- *Общая постановка задачи о принятии решения.*
- *Комбинаторика. Элементы теории вероятностей.*
- *Основные понятия математической статистики.*

Требования к компетенциям по дисциплине «основы высшей математики» представлены в знаниях и умениях. Выпускник должен:

знать:

– основные математические методы решения задач, используемых в профессиональной деятельности;

– природу математических абстракций и возможности их использования в социально-гуманитарной и экономической сфере.

уметь:

– делать оценки правдоподобности информации, основанной на количественных параметрах и соотношениях;

– использовать математический язык и аппарат при описании явлений и закономерностей окружающего мира.

владеть:

– основными приемами математического анализа;

– методами аналитического и численного решения алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 1. ГУМАНИТАРНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ

1.1 Основные черты математического мышления

Следует отметить, что единого мнения по вопросу определения понятия математического мышления в психолого-педагогической литературе нет.

Для социологов, возможно, будут интересными предложения И.Я. Каплуновича (И.Я. Каплунович. Измерение и конструирование обучения в зоне ближайшего развития // Педагогика. – 2002. – № 10) по типизации математического мышления как составной части общей культуры мышления. Автор выделяет пять типов математического мышления, причем в разных практических случаях мыслительную деятельность определяет доминирующий из них тип.

- ***Топологическое мышление*** отвечает за целостность и связанность логических операций, у человека проявляется уже в 2-3 года. В жизни «топологи » скрупулезны, не пропуская последовательно ни одной детали, в выполнении действий от начала до конечного результата. Они консервативны, живут размеренно, по определенному циклу, плохо привыкаю к новшествам, медлительны и дотошны.
- ***Порядковое мышление*** отвечает за точное следование логических операций, оно формируется сразу после топологического. В отличие от «топологов» для людей с таким типом мышления не важно объединение операций в одно целое, а важна форма и размер объектов (больше, меньше), их расположение (правее, левее, выше, ниже), направление движения (вверх, вниз, вперед, назад). Человек с порядковым типом мышления старается выработать алгоритм действий, он педантичен, четко следует инструкциям.
- ***Метрическое мышление*** отвечает за количественные оценки, постоянно оперирует цифрами (длина, ширина, высота, цена, время и т.д.). Для людей с таким типом мышления сложно представить какую-то абстрактную величину, не обличенную количественной характеристикой. Они предусмотрительно просчитывают размер расходов, доходов в результате работы. Такие люди осторожны, неопределенность пугает их, действовать начнут, когда выяснят количественные подробности.
- ***Алгебраическое (композиционное) мышление*** отвечает за представление объекта через структурное восприятие. Люди с таким типом мышления прирожденные конструкторы и комбинаторы, практическую задачу решают, так сказать, хаотично: начинают с понравившегося места, затем могут перескочить, минуя промежуточные этапы, затем возвращаются назад, проанализировав конечный этап процесса. Этим людям сложно работать по правилам, они часто рассеяны, опаздывают, склонны упрощать ситуацию. При этом они одновременно представляют весь объект и отдельные его части, что позволяет, комбинируя, быстро находить в данной ситуации нужное решение.

• ***Проективное мышление*** отвечает за представление объекта в разных ракурсах, применение объекта в теории и практике. Люди с таким математическим мышлением обладают вариативностью решений, порой нестандартными. Они стремятся оптимизировать результат (не важно, какими количественными характеристиками) с позиции полезности и практичности. Такие люди неординарны, являются генераторами идей, мгновенно оценивают ситуацию с позиции выгоды и поворачивают процесс в нужное русло. К сожалению, абсолютные характеристики значимые подробности предмета как статичной структуры, люди с проективным типом мышления игнорируют.

У каждого человека указанные типы математического мышления присутствуют, но с разными акцентами. Доминирующий тип определяет многие аспекты мыслительной и практической деятельности. Люди с одинаковым типом мышления сами тянутся друг к другу.

Признаками математического мышления (по Я. Хинчину) являются:

– доминирование логической схемы рассуждения;

– лаконизм мышления: предельная скупость, четкая строгость мысли и ее изложения;

– четкая расчлененность хода рассуждений;

– скрупулезная точность символики, формул, уравнений.

Определяющим признаком культуры математического мышления считается полноценность аргументации, которая предполагает:

– освоение идеи доказательства;

– умение пользоваться определениями понятий (создавать их логическую структуру, уметь выполнять действия подведения под понятие и выведение следствий);

– умение работать с теоремами (понимать их логическое строение, сущность прямой и обратной теорем и т.д.);

– владение общими логическими методами доказательства (аналитическим, синтетическим, методом от противного, полной индукцией, математической индукцией).

Математическое мышление как процесс, характеризующий активность личности, получает свое наибольшее развитие в деятельности, а в данном случае на этапе обучения в изучении дисциплин естественнонаучного цикла, в частности, основ высшей математики.

1.2 Основные этапы становления современной математики

Математика – одна из самых древних наук. Первые математические представления и понятия появились в процессе практической деятельности людей еще в доисторическое время. В настоящее время в истории развития математического знания ученые выделяют четыре этапа.

1. Зарождение математики. Этот этап охватывает промежуток времени с доисторических времен примерно до VI–V вв. до н.э. и характеризуется накоплением фактического материала.

Люди научились считать 25-30 тысяч лет тому назад. Сначала они обозначали числа черточками, затем научились называть их, а потом уже придумали цифры и стали выполнять над числами арифметические действия. Чтобы решать сложные задачи, встречавшиеся в практической деятельности, пришлось, кроме натуральных чисел, придумать дроби, научиться использовать пропорции. Таким образом, накапливается материал, складывающийся постепенно в древнейшую математическую науку – ***арифметику***. Еще в древности, изготавливая посуду и орудия труда, люди стали придавать им определенную форму. Так они познакомились со свойствами фигур. Науку о различных свойствах фигур назвали ***геометрией***, ее применяли для измерения земельных участков.

2. Период элементарной математики. Этот этап начинается в VI–V вв. до н.э. и завершается в конце XVI в. В Древней Греции сложились основы теоретической арифметики и элементарной геометрии. Выдающимися учеными этого времени являются Демокрит, Евклид, Архимед, Фалес Милетский, Пифагора Самосский. «Начала» Евклида являются основой для школьных учебников геометрии на протяжении двух тысячелетий. Труды Архимеда – яркий образец развития прикладных математических знаний в древности. Его достижения в исследованиях механики и физики (архимедов винт, метательные машины, исследования о равновесии и устойчивости плавающих тел) сочетались с прозорливостью в области математики. До конца XVI в. математика включала арифметику, алгебру, геометрию и тригонометрию. Это была ***математика постоянных величин.***

3. Период высшей математики. Этот этап охватывает XVII–XVIII вв. и характеризуется тем, что математические исследования расширяются, возникают новые направления. Великим открытием XVII в. является введенное Ньютоном и Лейбницем понятие бесконечно малой величины, создание основ анализа бесконечно малых (математического анализа). На первый план выдвигается понятие переменной величины и функции, как основной предмет изучения. Затем появляются основные понятия математического анализа: предел, производная, дифференциал, интеграл.

Благодаря гениальной идее Р.Декарта о методе координат, позволяющем изучать геометрические объекты методами алгебры и анализа, а также геометрически интерпретировать алгебраические и аналитические факты, развивается аналитическая геометрия. Зарождается теория вероятностей и другие. Крупнейшими учеными этого времени являются Р. Декарт, И. Ньютон, Г. Лейбниц, Ж. Лагранж, Д. Бернулли, Л. Эйлер, П. Лаплас. Этот период называют ***математикой переменных величин.***

4. Период современной математики. Этот этап начинается в XIX в., продолжается по настоящее время и характеризуется расширением предмета математических исследований. Возникают университетские школы.

В «Арифметических исследованиях» К. Гаусса формулируется проблема разрешимости в радикалах уравнений выше 4-ой степени. В XIX в. в математическом анализе появилась новая область – теория функций комплексной переменной, оформленная в трудах О. Коши. Эта теория нашла существенное применение в решении задач математики, физики и техники. Новые теории возникают не только в результате запросов естествознания и техники, но и в результате внутренних потребностей математики. В 1826 году Н.И. Лобачевский, затем Я. Больяи (1832 г.) и Г.Б. Риман (1854 г.) открывают неевклидовы геометрии. На стыке математического анализа и геометрии в 70-х гг. XIX в. возникла общая теория точечных множеств, которая сформировалась в теорию множеств (Г. Кантор). Общие идеи теории множеств явились основой теории функций действительной переменной, общей топологии, общей алгебры, функционального анализа и др. Разрабатывается теория дифференциальных уравнений, уравнений математической физики (Ж. Фурье, С. Пуассон, П.С. Лаплас, М.В. Остроградский др.). Ряд новых приложений и развитие получили теория групп, теория вероятностей и математическая статистика. Применение математических методов в разных науках привели к созданию математической логики, кибернетики, дискретного анализа, математической экономики, математической лингвистики. Численные методы анализа и алгебры развились в вычислительную математику. В последнее время запросы общественного производства и управления, быстрый прогресс вычислительной техники привели к созданию теории автоматов, теории алгоритмов, теории игр, теории информации, исследования операций, теории оптимального управления. В начале XX в. Д. Гильберт сформулировал ряд математических проблем в различных областях математики, не все разрешенные до сих пор.

1.3 Аксиоматический метод

Обоснование математики, то есть создание строгого, логически безупречного построения математических теорий, всегда было в поле зрения ученых от древних лет до настоящего времени.

Геометрия Евклида как первая естественнонаучная теория. Аксиоматический метод является основным методом современной математики. Этот метод впервые появился в работах крупнейшего геометра древности – Евклида. Известно, что расцвет деятельности Евклида приходится на первые годы III в. до н.э. Этот математик дал систематическое изложение начал геометрии в 13 книгах, которые называются «Начала». 1-6 книги посвящены планиметрии, 7–10 книги – об арифметике и несоизмеримых величинах, отрезки таких длин можно построить с помощью циркуля и линейки. Книги 11–13 посвящены стереометрии. «Начала» начинаются с изложения 23 определений и 10 аксиом. Первые пять аксиом – «общие понятия», остальные называются «постулатами». Первые два постулата определяют действия с помощью идеальной линейки, третий – с помощью идеального циркуля. Четвертый – «все прямые углы равны между собой» – является излишним, поскольку его можно вывести из остальных аксиом. Последний, пятый постулат гласил: «Если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых, они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых». (Этот постулат впоследствии был видоизменен эквивалентным: «На плоскости через точку вне прямой можно провести не более одной прямой, не пересекающую данную прямую» – аксиома параллельности). Пять «общих понятий» Евклида являются принципами измерения длин, углов, площадей, объемов: «равные одному и тому же равны между собой», «если к равным прибавить равные, суммы равны между собой», «если от равных отнять равные, то остатки равны между собой», «совмещающиеся друг с другом равны между собой», «целое больше части». После постулатов и аксиом Евклид излагает теоремы геометрии в такой последовательности, чтобы каждую теорему можно было доказать, используя предыдущие предложения, постулаты и аксиомы. «Начала» передали последующим временам на два тысячелетия образец дедуктивной логической обработки геометрии, сыграв большую роль, как в самой математике, так и в ее преподавании. Многие века преподавание геометрии во всем мире велось по этим книгам. «Начала» переведены на все основные языки мира. В этом труде многое проделано очень скрупулезно, но многое другое оказывается принципиально отсталым с точки зрения даже наших взглядов. Это и недостаточность числа аксиом, опора в доказательствах на наглядность и интуицию.

Тем не менее, Евклид впервые провел логическое построение геометрии, применив ***аксиоматический метод***. В начале XX в. немецкий ученый Д. Гильберт предложил каждую математическую теорию аксиоматизировать. Аксиоматический метод используется для построения научных теорий. Раскроем более подробно его сущность.

1) Выделяются основные понятия теории. Известно, что одно понятие должно разъясняться с помощью других, которые, в свою очередь, тоже определяются с помощью каких-то более простых понятий. Таким образом, мы приходим к элементарным понятиям, которые нельзя определить через другие. Эти понятия и называются основными. Например, в евклидовой геометрии к основным понятиям элементов можно отнести такие понятия, как точка, прямая, плоскость и др.

2) Между элементами основных понятий вводятся неопределяемые отношения (например, в евклидовой геометрии вводят отношение «принадлежности», «порядка» и др.)

3) Полагают, что введенные отношения подчиняются некоторой системе условий, принимаемых без доказательства, – системе аксиом. Когда мы доказываем утверждение, теорему, то опираемся непосредственно на аксиомы или на предпосылки, которые считаются уже доказанными.

Таким образом, аксиомы описывают введенные неопределяемые отношения между основными неопределяемыми элементами теории.

К системе аксиом предъявляются определенные требования. Во-первых, система аксиом должна быть непротиворечивой. Чтобы доказать непротиворечивость системы аксиом, достаточно построить какую-либо ее интерпретацию в другой теории, в которой мы более уверены (например, в арифметике действительных чисел). Во-вторых, система аксиом должна быть независимой. Это требование означает, что ни одна из аксиом системы не должна быть логическим следствием остальных. В-третьих, система аксиом должна быть полной. Это требование означает, что к данной системе аксиом нельзя добавить еще хотя бы одну аксиому, которая не нарушила бы независимость или непротиворечивость этой системы.

По Д. Гильберту полнота означает, что всякое истинное в данной теории утверждение после формализации с помощью допустимого набора правил вывода должно формально выводиться из не более, чем счетного перечня аксиом. Однако это положение было неверным вследствие доказательства Гёделем (1931 год) теоремы о неполноте, суть которой сводится к следующему: в любой достаточно формализованной и аксиоматизированной математической теории при условии ее непротиворечивости существуют утверждения содержательно истинные, но не выводимые формально из аксиом. В 1978 г. Пэрис и Харрингтон нашли теорему о натуральных числах (усиленная теорема Рамсея), которую невозможно вывести из аксиом натуральных чисел (см. Ю.И. Манин «Вычислимое и невычислимое», с. 100)

Вторая попытка (представить в одном руде всю математику) состоялась только в XIX в., во Франции, когда Николя Бурбаки (коллективный псевдоним группы ученых) приступил к изданию многотомного трактата «Элементы математики».

Неевклидовы геометрии, геометрия макро-макромира.

Претензии к «Началам» Евклида велись по трем причинам: за то, что рассматривались только геометрические величины, отрезки длин которых можно построить с помощью циркуля и линейки; за то, что разрывалась геометрия и арифметика и доказывалось для целых чисел то, что уже доказано для геометрических величин; и, наконец, пятый постулат не был ни наглядно, ни интуитивно «надежным».

Критика разрыва между геометрией и арифметикой привела к расширению понятия числа до действительного числа.

Споры о пятом постулате, попытки доказательства пятого постулата Евклида приводили к эквивалентным утверждениям.

Попытки доказательства пятого постулата предпринимались еще в Древней Греции. Эти попытки продолжались на Востоке в средневековье, например, Омар Хайям (XI–XII вв.), а затем в Западной Европе (например, в Италии в 1733 г. Дж. Саккери, в 1766 г. немецкий ученый И. Ламберт,в 1800г. французский ученый А.Лежандр)

Возникло подозрение о недоказуемости пятого постулата. В начале XIX в. российский ученый Н.И. Лобачевский (1826 г.), а также немецкий ученый Г.Б. Риман (лекция 1854 г., опубликовано в 1867 г.) (независимо от венгерского ученого Я. Больяи (1832 г.)) построили новые геометрии – геометрия

Лобачевского (гиперболическая геометрия), геометрия Римаиа (эллиптическая геометрия), в которых пятый постулат был заменен.

Как выяснилось впоследствии, немецкий ученый К.Гаусс также владел началами геометрии Лобачевского, но скрывал их, опасаясь быть непонятым.

Приведем упрощенную сравнительную схему различий в планиметрии Евклида, Лобачевского и Римана.

Евклид	Лобачевский	Риман
Две точки определяют единственную прямую		
Две прямые пересекаются в единственной точке		
Через точку вне прямой проходит **единственная** прямая, не пересекающая данную прямую	Через точку вне прямой проходит **более одной** прямой, не пересекающей данную прямую	Все прямые пересекаются. (Через точку вне прямой **нельзя провести** прямую, не пересекающая данную прямую) Длина всякой прямой конечна и равна π.
Сумма внутренних углов треугольника **равна** 180^0	Сумма внутренних углов треугольника есть величина переменная (зависит от длины сторон), всегда **меньше** 180^0	Сумма внутренних углов треугольника **больше** 180^0. Существуют треугольники с двумя и с тремя прямыми углами.
Существуют подобные треугольники, стороны **не выражаются** через углы	**Не существуют** подобные треугольники с коэффициентом подобия, отличным от единицы; стороны **выражаются** через углы	
Площадь треугольника		
Не выражается через углы	$S = k(\pi - \sigma)$, *где* σ *– сумма углов треугольниа,* k *– коэффициент пропорциональности*	$S = k(\sigma - \pi)$, *где* σ *– сумма углов треугол* k *– коэффициент пропорциональности*

Были построены модели этих геометрий в пространстве Евклида, что позволило утверждать непротиворечивость неевклидовых геометрий в той же степени, что и непротиворечивость геометрии Евклида. Геометрия достаточно малых частей плоскости Римана обладает свойствами поверхностей постоянной положительной кривизны, например, сферической поверхности. Геометрия достаточно малой части плоскости Лобачевского, обладает свойствами поверхности постоянной отрицательной кривизны, например, псевдосферы (напоминает форму детской юлы) в евклидовом пространстве (модель Э. Бельтрами (1868 г.)) (поверхностей, которые реализуют геометрию всей плоскости Лобачевского, в евклидовом пространстве нет). Геометрию Евклида можно рассматривать как предельный случай геометрии Лобачевского.

В идеях Лобачевского были намечены три принципа, давшие развитие геометрическим теориям:

- логически возможна не одна евклидова геометрия, но и другие;

- принцип построения новых теорий путем видоизменения и обобщения основных положений евклидовой геометрии;
- соответствие теории реальным свойствам пространства (истинность геометрической теории) может быть проверена лишь физическими исследованиями.

От идей Римана –

- точно сформулировано обобщенное понятие пространства как непрерывной совокупности любых однородных объектов или явлений;
- введено понятие пространства с любым законом измерения расстояний (метрикой) бесконечно малыми шагами (подобно измерению длины линии очень малым масштабом) –

развилась риманова геометрия и ее обобщения, нашедшие приложения в теории относительности, в механике и т.д.

Совместное исследование геометрий Евклида, Римана и Лобачевского позволило выяснить как особенности каждой из них, так и связи друг с другом и другими математическими системами. Приложения неевклидовых геометрий обширны в математике: в теории аналитических функций, теории групп, теории относительности и других.

Хотя неевклидовы геометрии развивались как умозрительные теории, тем не менее, ученые рассматривали эти теории как возможные теории пространственных отношений. Кривизна пространства не проявляется наглядным образом и понимается как отступление его от метрики (измерения расстояний) евклидовой, что можно точно описать математически. Теория относительности А. Эйнштейна (на сегодняшний день являющаяся наиболее последовательной в описании микро-макромира) установила, что под действием полей тяготения изменяется кривизна пространства, что происходит замедление хода времени в сильных гравитационных полях, а значит, и изменяется геометрия. В предположении о равномерном распределении масс материи во Вселенной, что в космических масштабах является допустимым приближением, пространство имеет геометрию Лобачевского. В локальных областях макромира, когда можно абстрагироваться от искривления пространства-времени вблизи тяготеющих масс, пространство-время характеризуется Евклидовой геометрией. При построении теорий, описывающих явления микромира (объекты его имеют двойственную природу, являясь одновременно и частицами и волнами), эта геометрическая картина, предполагающая **непрерывность** пространства (условие пространственно-временного континуума) было перенесена на новую область без каких-либо изменений. Экспериментальных данных, противоречащих применению теории относительности (а значит, и неевклидовых геометрий) в микромире нет.

Требования независимости, непротиворечивости и полноты играют важную роль при создании теории аксиоматическим методом.

Позднее аксиоматическим методом были построены теория множеств, алгебра высказываний, теория вероятностей. В последнее время большое внимание уделяется аксиоматизации не только математических дисциплин, но и определенных разделов физики, биологии, психологии, экономики, лингвистики и других, включая теории структуры и динамики научного знания. Следует отметить, что аксиоматизация осуществляется обычно после того, как содержательно теория уже в достаточной мере построена, и служит целям более точного ее представления, в частности строгого выведения всех следствий из принятых посылок.

Таким образом, аксиоматический метод можно рассматривать как метод построения теорий, как научный метод познания, как метод обучения математике.

Открытие неевклидовой геометрии явилось толчком развития аксиоматического метода. Заменив пятый постулат Евклида о параллельных его отрицанием, показали, что чисто логическим путем можно строить геометрическую теорию, столь же стройную и богатую содержанием, что и геометрия Евклида. Этот факт обратил внимание математиков на дедуктивный способ построения математических теорий, что повлекло за собой возникновение внутренней проблематики , на основе которой выросла так называемая **теория доказательств**, как основной раздел современной математической логики.

1.4 Философия и математика

История математики является мощным средством исследования методологических вопросов самой математики: происхождение понятий, влияние практики на развитие математики и т.д.

Ситуации, когда известные математические теории «давали сбой», порождали новые философские концептуальные подходы, инициировали толчок для появления иных направлений в математике.

История математики насчитывает три кризиса в математике. *Первым* кризисом обоснования математики считают обнаружение несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали (Древняя Греция времен Пифагора); кризис был разрешен, вероятно, Евдоксом Книдским, создавшим теорию отношений. *Второй* кризис возник в XVII в. при создании дифференциального и интегрального исчислений, которые не имели строгого обоснования до середины XIX в. *Третий* кризис связан с парадоксами бесконечности в теории множеств, созданной Г. Кантором в 1870–1890-х гг. С 1907 г. (Э. Цермело аксиоматизировал теорию множеств) считается, что эти парадоксы устранены. Парадоксы возникают тогда, когда два взаимоисключающих (противоречащих) суждения оказываются в одинаковой мере доказуемыми (или не доказуемы). Одним из известных парадоксов является парадокс лжеца (ранняя формулировка): «Критянин сказал, что все критяне лжецы. Сказал ли он правду?» Парадокс нельзя считать логическим утверждением, поскольку нельзя сказать, что оно истинно или ложно.

Проблема обоснования математики начала XX в. в узком смысле состояла в избавлении от парадоксов теории множеств, а в более широком смысле – в нахождении общих принципов обоснования математических теорий, гарантирующих их непротиворечивость. Важность в том, что новые теории сохраняют свое значение и для прежних областей исследования – это соблюдение «принципа соответствия», который и реализуется в программах обоснования математики.

Кризисы выделили две задачи обоснования математики. *Первой* задачей являлось обоснование строгости признанных доказательств и освобождение существующих математических теорий от известных парадоксов. Эту задачу можно считать решенной в целом в настоящее время.

Второй задачей стало выявление условий полной надежности математических теорий в смысле строгости доказательств и отсутствия противоречий. В настоящее время преобладает мнение, что в рамках чисто логических подходов эта задача неразрешима.

Аксиоматикой теории множеств Э. Цермело (позднее усовершенствованная Френкелем) математики пользуются до сих пор. Однако, выход из третьего кризиса, предложенный Э. Цермело, удовлетворил далеко не всех. Было выдвинуто **три** большие **программы обоснования математики**, которые имели не только математическое, но и **философско-методологическое значение.**

Первая – **программа логицизма** – (предложена Г. Фреге, Б. Расселом и А.Н. Уайтхедом) заключалась в том, чтобы свести всю математику к логике, непротиворечивость которой само собой подразумевалась. Причиной противоречий в теории множеств Рассел считал использование понятий, определение которых имеет характер порочного круга (*так называемое* ***непредикативное определение*** *– определение некоторого объекта путем указания соотношения между этим объектом и всеми объектами из некоторого множества, к которому определяемый объект предполагается принадлежащим. например, критянин – житель Крита, все жители которого лгут. Это определение лежит в основе «парадокса лжеца»*). В процессе работы над своей программой Рассел и Уайтхед также предприняли попытку перестройки теории множеств, развивая ее как часть логической теории; формализовали большой фрагмент содержательной математики, выйдя при этом за пределы общепризнанной сферы действия логики. Исследования в рамках логицизма показали (К. Гёдель), что математика значительно шире логики, и что существуют математические принципы, которые не могут быть представлены в виде логических суждений. Такими принципами являются аксиомы теории множеств – аксиома выбора и аксиома бесконечности.

Вторая – **программа интуиционизма** – (предложена в 1908 г. Л.Э.Я. Брауэром) заключалась в том, что истинность и обоснованность объектов в математических теорий должны быть исключительно конструктивными, т.е. должно сопровождаться построением этих объектов. Брауэр и его последователи (Г. Вейль, А.А. Марков и др.) считали, что многие свойства конечных множеств не выполняются для бесконечных множеств (*например, что всякая собственная часть меньше целого*). Брауэр призывал отказаться от абстрактной актуальной бесконечности, т.е. бесконечных множеств как завершенных совокупностей, а признавал лишь потенциальную бесконечность (*понимаемую как неограниченное увеличение (уменьшение) конечной величины*) и отказывался от логических принципов, для обоснования которых требуется использование актуальной (существующей) бесконечности (*например, закона исключенного третьего, состоящего в том, что из двух высказываний «А» и «не А» хотя бы одно является истинным*).

С 1907 г. в форме интуитивистской программы обоснования математики стал развиваться **конструктивизм.** Конструктивизм (Э. Борель, Л. Кронекер, А. Пуанкаре) возник в последней четверти XIX в. как реакция на быстрое развитие теоретико-множественных методов в математике, основанных на допущении актуальной бесконечности (Г. Кантор, Р. Дедекинд). Конструктивисты заявлял, что математические объекты должны быть конструируемыми, или вычислимыми, построениями, а идея актуальной бесконечности незаконна и противоестественна. Основным методом построения математических теорий должна быть не дедукция, а конструктивно-генетический метод. В результате этого метода любой математический объект и любые утверждения о нем должны быть результатом мышления построения более сложных конструкций из более простых. Определенные простые контролируемые правила – алгоритмы – за конечное число шагов и конечное время можно однозначно получить итоговую конструкцию.

Интуиционисты построили своеобразную математику, которая оказалась сложнее и более громоздкой, чем классическая математика. Положительным интуиционистского подхода явилось то, что был проведен тщательный анализ многих трудностей развития математики того этапа, а также четко определено различие между конструктивным и неконструктивным в математике.

Интуиционизм в целом нельзя признать состоятельным, так как в его рамках такие разделы современной математики, например, математический анализ и др., прикладного характера нельзя построить.

Еще один подход состоял в **аксиоматическом построении теории** множеств. Э. Цермело и его сторонники пытались построить надежные аксиоматические системы, из которых можно развивать значительную часть классической математики. При этом традиционный метод доказательства непротиворечивости аксиоматической системы состоял в указании ее модели, взятой из другой теории, непротиворечивость которой несомненна. Признавая ненадежность геометрической интуиции, в 1899 г. в «Основаниях геометрии» Д. Гильберт построил модель евклидовой геометрии средствами арифметики действительных чисел. Однако этот метод нельзя было применить к аксиоматике теории множеств, т.к. модель должна быть бесконечной, а в силу обнаруженных парадоксов никакая теория, в которой можно строить бесконечные модели, не могла заведомо считаться непротиворечивой. Новый метод доказательства непротиворечивости аксиоматической системы предложил Д. Гильберт в так называемой **программе формализма**. Прежде вся математика должна быть формализована, т.е. надо построить ***формальную систему***, из аксиом которой с помощью некоторого четко описанного множества ***правил вывода*** можно было бы получить все основные математические теоремы. Затем установить, что никакое формальное доказательство не является доказательством противоречия, т.е. доказательством двух теорем, являющихся отрицанием друг друга. Теорию, в которой Д. Гильберт предполагал вести исследование математических доказательств, он назвал ***метаматематикой***.

По замыслу Д. Гильберта, всякую математическую теорию надо строить как аксиоматическую теорию, а затем в рамках этого формализма попытаться доказать ее непротиворечивость и полноту этой системы, не используя понятия актуальной (уже существующей) бесконечности, сугубо конструктивными методами (методы таких допустимых рассуждений Гильберт называл ***финитными***). Программа Д. Гильберта оказалась невыполнимой. В 1931 г. австрийский ученый К. Гёдель доказал, что всякая непротиворечивая формализация арифметики неполна в том смысле, что всегда можно указать истинное арифметическое утверждение, которое не доказуемо средствами данной формальной системы. К. Гёдель также показал, что если формальная система арифметики непротиворечива, то, хотя утверждение о ее непротиворечивости выражено на языке арифметики, его нельзя доказать средствами этой же системы. Таким образом, нельзя получить финитное доказательство непротиворечивости, если относить к финитным методам только методы, не выходящие за рамки методов, применяемых в формальных системах. Метаматематика сыграла большую роль в развитии математической логики. Применяя средства более широкие, чем те, которые используются в формальной арифметике, Г. Генцен все же доказал ее непротиворечивость. При исследовании формализованных математических систем стали использоваться нефинитные методы, а метаматематику стали ассоциировать с «теорией доказательств».

Считается, что программы обоснования математики начала XX в. не достигли своих целей. От парадоксов теории множеств удалось избавиться, но вопрос о логической непротиворечивости той же теории множеств остается открытым. Добавился еще один «парадокс», когда около 1963 г. Пол Коэн решил знаменитую первую проблему Гильберта «континуум-гипотеза», которая, оказалось, не зависит от аксиом теории множеств. Удовлетворительного объяснения этого «парадокса» не существует, по-видимому, до сих пор. В 1970-х гг. (американские математики Ловер и Тирни) обнаружилось, что существует огромный класс алгебраических категорий (так называемые топосы), в которых имеются внутренние средства для выражения, в принципе, всего того, что может быть выражено с помощью множеств, хотя в каждом конкретном случае получаются какие-то новые «математики». Понятие топоса является категорным аналогом понятия множества в классической математике. Сама же теория множеств, если ее рассматривать как алгебраическую категорию, является частным примером топоса, а аксиомы, определяющие категории, логически независимы от аксиом теории множеств. Таким образом, в перспективе может оказаться, что фундаментом всей математики вместо теории множеств, может стать теория топосов.

Отдельные положения рассмотренных программ сохраняют свою значимость и по сей день. Так логицистами и конструктивистами была создана в значительной степени современная математическая логика. После появления в 1930-х гг. строго понятия алгоритма от интуитивизма математические конструктивисты внесли большой вклад в развитие современной теории вычислительной математики и информационной техники, а в 1970–1980-е гг. выявились связи идей интуитивистов с математической теорией топосов.

На современном этапе развития математики происходит освоение философских категорий: теория вероятностей «осваивает» категории возможного и случайного; топология – категории отношения и непрерывности; теория катастроф – категорию скачка; теория групп – категории симметрии и гармонии и т.д. Об обосновании математики сегодня в основном рассуждают философы. Абсолютное большинство математиков не воспринимают проблему обоснования математики как сколь бы ни было существенную.

1.5 Роль математики в гуманитарных науках

Математика играет огромную роль в истории всей человеческой культуры. Возникновение и развитие математики связано с запросами практики. Первые математические знания были добыты цивилизациями Древнего Востока – в Египте, Вавилоне, Китае, Индии, – в связи с потребностями земледелия и строительства. С течением времени практическая деятельность людей становится шире и разнообразнее, поэтому к математике предъявляются новые требования. Современные запросы общественного производства и управления стимулируют создание и развитие новых математических теорий. В настоящее время математика является необходимым помощником всех крупнейших исследований нашего времени, будь то полеты человека в космос или создание сверхмощных ЭВМ. Математические методы уже давно проникли во многие естественные науки. Этот процесс получил название ***математизации знаний***. На стыке математики и наук, где она применяется, возникли такие дисциплины, как математическая физика, математическая логика, кибернетика, дискретный анализ и другие. В последнее время говорят об интеграции математики и гуманитарных дисциплин. Использование математических методов сближает гуманитарные и естественные науки, поэтому в настоящее время говорят о ***математизации гуманитарных наук***. Возникновение таких дисциплин, как математическая биология, математическая лингвистика, математическая экономика, математическая психология говорит о том, что по мере усложнения задач, которые решает общество, возрастает роль математики.

Задачи гуманитарной сферы жизнедеятельности иногда выявляют неприспособленность известных математических теорий для их решения, тогда рождаются новые ветви математики. Так появились теория измерений, многомерное шкалирование. Примером математизации сугубо гуманитарных взглядов является латентно-структурный анализ (американский социолог П.Ф. Лазарсфельд), теория конфликтов (Г.М. Блейлок, 1989 г.), теория коллективного действия (Дж. Клоумен, 1990 г.). Следует признать, что соответствующей формализации поддались сравнительно простые социологические образования, т.е. математика отразила относительно простые ситуации. Это говорит еще и о наличии проблем с разработкой социологической теории (Конт, в 1996 г. в своей классификации наук математику отнес к самым простым, а социологию – к самым сложным).

Необходимость изучения математики современным специалистом-гуманитарием вызвано несколькими причинами. Одна из них заключается в том, что в процессе изучения математики могут быть развиты такие качества мышления, как логичность и критичность, гибкость и конструктивность, системность и последовательность. Эти качества мышления сами по себе не связаны с каким-либо математическим содержанием и вообще с математикой, но обучение математике играет в их формировании важную роль. Вторая причина заключается в том, что человек, знающий математический язык, способен глубже проникнуть в суть реальных процессов, возникающих в его профессиональной деятельности. Специалистам-гуманитариям в настоящее время приходится решать множество задач, связанных обработкой информации, статистических данных. Умение делать из имеющегося статистического материала достоверные выводы и прогнозы придают ценность специалисту любой профессии.

1.6 Метод математического моделирования

Прежде, чем подвергнуть математическому изучению какое-нибудь явление природы или технический, экономический, социальный процесс, необходимо составить его математическую модель. Это означает, что логическому анализу подвергается стоящая перед нами практическая задача и из всего многообразия свойств, присущих явлению или процессу, отбираются лишь те, которые станут учитываться. Модель явления не тождественна самому явлению, она дает только некоторое представление для его понимания, некоторое приближение к действительности. Создание модели – важный этап познания. Он позволяет четко формулировать наши представления о ходе интересующих нас явлений и действующих в них связях.

Моделированием называется замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели. Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью. И.Т. Фролов [10] отмечал, что «моделирование означает материальное или мысленное имитирование реально существующей системы путем специального конструирования аналогов (моделей), в которых воспроизводятся принципы организации и функционирования этой системы». Здесь в основе мысль, что модель – средство познания, главный ее признак – отображение. Теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследование свойств объектов на их моделях называется теорией моделирования.

Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. При этом адекватность модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.

Процесс моделирования начинается с моделирования упрощенного процесса, который с одной стороны отражает основные качественные явления, с другой стороны допускает достаточно простое математическое описание. По мере углубления исследования строятся новые модели, более детально описывающие явление. Факторы, которые считаются второстепенными на данном этапе, отбрасываются. Однако, на следующих этапах исследования, по мере усложнения модели, они могут быть включены в рассмотрение. В зависимости от цели исследования один и тот же фактор может считаться основным или второстепенным.

Математическая модель и реальный процесс не тождественны между собой. Как правило, математическая модель строится с некоторым упрощением и при некоторой идеализации. Она лишь приближенно отражает реальный объект исследования, и результаты исследования реального объекта математическими методами носят приближенный характер. Точность исследования зависит от степени адекватности модели и объекта и от точности применяемых методов вычислительной математики.

Схема построения математических моделей следующая:

1. Выделение параметра или функции, подлежащей исследованию.
2. Выбор закона, которому подчиняется эта величина.
3. Выбор области, в которой требуется изучить данное явление.

Существуют всевозможные классификации математических моделей. Выделяют линейные и нелинейные модели, стационарные и динамические, модели, описываемые алгебраическими, интегральными и дифференциальными уравнениями, уравнениями в частных производных. Можно выделять классы детерминируемых моделей, вся информация в которых является полностью определяемой, и стохастических моделей, то есть зависящих от случайных величин и функций. Так же математические модели различают по применению к различным отраслям науки.

Рассмотрим следующую классификацию математических моделей [10]. Все математические модели разобьем условно на четыре группы.

I. Модели прогноза или расчетные модели без управления.

Их можно разделить на стационарные и динамические.

Основное назначение этих моделей: зная начальное состояние и информацию о поведение на границе, дать прогноз о поведении системы во времени и в пространстве. Такие модели могут быть и стохастическими.

Как правило, модели прогнозирования описываются алгебраическими, трансцендентными, дифференциальными, интегральными, интегро-дифференциальными уравнениями и неравенствами. Примерами могут служить модели распределения тепла, электрического поля, химической кинетики, гидродинамики.

II. Оптимизационные модели.

Их так же разбивают на стационарные и динамические. Стационарные модели используются на уровне проектирования различных технологических систем. Динамические – как на уровне проектирования, так и, главным образом, для оптимального управления различными процессами – технологическими, экономическими и др.

В задачах оптимизации имеется два направления. К первому относятся детерминированные задачи. Вся входная информация в них является полностью определяемой. Второе направление относится к стохастическим процессам. В этих задачах некоторые параметры носят случайный характер или содержат элемент неопределенности. Многие задачи оптимизации автоматических устройств, например, содержат параметры в виде случайных помех с некоторыми вероятностными характеристиками.

Методы отыскания экстремума функции многих переменных с различными ограничениями часто называются методами математического программирования. Задачи математического программирования – одни из важных оптимизационных задач.

Модели теории оптимального управления – одни из важных в оптимизационных моделях. Математическая теория оптимального управления относится к одной из теорий, имеющих важные практические применения, в основном, для оптимального управления процессами.

Различают три вида математических моделей теории оптимального управления. К первому виду относятся дискретные модели оптимального управления. Традиционно такие модели называют моделями динамического программирования. Широко известен метод динамического программирования Беллмана. Ко второму типу относятся модели, описываемые задачам Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Их часто называют моделями оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами. Третий вид моделей описывается краевыми задачами, как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Такие модели называют моделями оптимального управления системами с распределенными параметрами.

III. Кибернетические модели.

Этот тип моделей используется для анализа конфликтных ситуаций.

Предполагается, что динамический процесс определяется несколькими субъектами, в распоряжении которых имеется несколько управляющих параметров. С кибернетической системой ассоциируется целая группа субъектов со своими собственными интересами.

IV. Вышеописанные типы моделей не охватывают большого числа различных ситуаций, таких, которые могут быть полностью формализированы. Для изучения таких процессов необходимо включение в математическую модель функционирующего «биологического» звена – человека. В таких ситуациях используется имитационное моделирование, а также методы экспертиз и информационных процедур.

Темы рефератов:

1. Значение математики в развитии социологии как гуманитарной науки.
2. Суть аксиоматического метода в построении математической теории.
3. Философско-методологическое значение парадоксов теории множеств.
4. Математическое доказательство. Доказательство методом от противного.
5. Математическое доказательство. Доказательство методом перебора.
6. Математическое доказательство. Доказательство существования (прямое, косвенное). Принцип Дирихле.
7. Математическое доказательство. Доказательство методом математической индукции.
8. Математическое доказательство. Прямая и обратная теоремы.
9. Значение неевклидовых геометрий в развитии естественнонаучных теорий.
10. Основные черты математического мышления.

Рекомендуемая литература

1. *Ахтямов, А. М.* Математика для социологов и экономистов: учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.
2. *Базылев, В. Т.*, Дуничев К.И. Геометрия: учебное пособие для студентов физ.-мат. факультетов пединститутов. – М.: Просвещение, 1975.
3. *Гнеденко, Б. В.* Введение в специальность математика. – М.: Наука. 1991
4. *Кудряшев, А. Ф.* О математизации научного знания // Философские науки. – 1975. – № 4. – С. 137.
5. *Максименко, В. С.*, Паниотто В. И. Зачем социологу математика. – Киев: Радянська школа, 1988.
6. *Моисеев, Н. Н.* Математика в социальных науках // Математические методы в социологическом исследовании. – М.: Наука, 1981
7. *Самарский А. А.*, Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989
8. *Петров А. А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1996
9. *Толстова Ю.* Социология и математика. – М.: Научный мир, 2003.
10. *Фролов И. Т.* Гносеологические проблемы моделирования. – М.: Наука, 1961

Тема 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, ОТОБРАЖЕНИЯ, ЧИСЛА

Математическое доказательство (***рассуждение с целью обоснования истинности того или иного утверждения (теоремы)***) – то, что существенно отличает математическую книгу от любой другой. То или иное рассуждение является доказательством не само по себе, а в рамках некоторой аксиоматической теории. Все утверждения располагаются в некоторую последовательность, называемую **выводом (доказательством)**, причем одни из этих утверждений принимаются в качестве допущений (**аксиом**), а другие логически вытекают из предшествующих им в этой последовательности.

2.1 Высказывания

Математическая логика – это раздел математики, изучающий правила выведения следствий из различных посылок, истинность которых очевидна. Математическая логика возникла в середине XIX в. для потребностей математики и стала применяться в самых различных областях знаний. Одним из исходных, неопределяемых понятий математической логики является понятие высказывания (будем обозначать высказывания латинскими заглавными буквами A, B, C,…). Под высказыванием понимается повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить истинно оно или ложно (т.е. высказывание не может быть одновременно истинным и ложным). При этом допускается, что одно и то же высказывание может быть ложным в одних условиях, а в других – истинным.

Пример. Значение истинности высказывания «Лицам, осваивающим содержание образовательных программ высшего образования, из числа инвалидов 1 и 2 группы, получающим учебные, социальные, персональные стипендии совета учреждения высшего образования, повышаются в 1,5 раза» определяется соответствующим приказом учреждения образования.

Различают простые и составные высказывания. Из простых высказываний с помощью слов «не», «и», «или», если …, то», «тогда и только тогда, когда…» можно строить сложные высказывания. Приведенные слова называют логическими связками. Высказывание «город – это место пересечения территориально-поселенческих и социально-общностных структур» – составное, в то время как высказывания «город – это территориально-поселенческая структура» и «город – это социально-общностная структура» – простые.

2.2 Логические операции

Над простыми высказываниями можно выполнять логические операции. Рассмотрим следующие логические операции: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и двойную импликацию. Значения истинности составного высказывания можно определить с помощью так называемой таблицы истинности, которая отражает зависимость составного высказывания от значений истинности его компонентов.

Отрицанием высказывания A называется высказывание «не A» (обозначают $\overline{A}$), которое истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно.

Таблица истинности отрицания высказывания имеет вид:

A	$\overline{A}$
и	л
л	и

Конъюнкцией высказываний A и B называется высказывание «A и B», которое истинно тогда и только тогда, когда A и B одновременно истинны, в противном случае конъюнкция высказываний A и B ложна. Обозначается конъюнкция $A \wedge B$.

Таблица истинности конъюнкции имеет вид:

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Пример. Высказывание «наследники умершей – ее муж и сын» является конъюнкцией $A \wedge B$ двух высказываний: «наследник умершей – ее муж» (A), «наследник умершей – ее сын» (B).

Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание «A или B», которое ложно тогда и только тогда, когда A и B одновременно ложны, в противном случае дизъюнкция высказываний A и B истинна. Обозначается дизъюнкция $A \vee B$.

Таблица истинности дизъюнкции имеет вид:

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

В обыденном смысле употребление связки «или» двусмысленно: в неразделительном смысле «одно или другое, или оба»; в разделительном смысле «одно или другое, но не оба», тогда одновременная истинность невозможна, т.е. ложна. Например, высказывание «договор может быть заключен в устной или письменной форме» допускает как одну или другую, так и обе формы. В высказывании «право на пособие в связи с рождением ребенка имеют мать или отец ребенка» исключает одновременное получение пособия матерью и отцом ребенка. Для устранения двусмысленности введем термины:

– дизъюнкция в неразделительном (неисключающем) смысле – это дизъюнкция $A \vee B$, заданная предыдущим определением и таблицей истинности (см. выше);

– дизъюнкция в разделительном (исключающем) смысле – это дизъюнкция (обозначают ее $A \veebar B$), истинная при истинности только одного из высказываний A или B, но не обоих. Ее таблица истинности имеет вид:

A	B	$A \veebar B$
и	и	л
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Пример. Высказывание «Лицо, осуществляющее уход за ребенком в возрасте до 3 лет и одновременно получающее профессионально-техническое, среднее специальное или высшее образование в дневной форме получения образования, пособие по уходу за ребенком в возрасте до 3 лет назначается и выплачивается в установленном размере, независимо от получения стипендии» является сложным. Расчленим его на простые: Если «Лицо осуществляет уход за ребенком в возрасте до 3 лет» (A), «Лицо получает профессионально-техническое образование в дневной форме получения образования» (B), «Лицо получает среднее специальное образование в дневной форме получения образования» (C), «Лицо получает высшее образование в дневной форме получения образования» (D), «Лицо получает стипендию» (E), то «Пособие назначается и выплачивается в установленном размере» (F). Формальная запись данного высказывания имеет вид: $\big((A \wedge (B \veebar C \veebar D) \wedge (E \veebar \overline{E})\big) \to F$.

Импликацией высказываний A и B называется высказывание «если A, то B», которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B – ложно, а в остальных случаях истинно. Обозначается импликация $A \to B$. Часто в математике A называют посылкой, B – следствием или заключением.

Таблица истинности импликации имеет вид:

A	B	$A \to B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Проанализируем соответствие определения импликации с общепринятым значением сложноподчиненного предложения с использованием союза «если ..., то ...». Рассмотрим следующее сложное высказывание: «*Если* гражданин совершил кражу, *то* он может быть наказан лишением свободы на срок до двух лет». Если оба простые высказывания «гражданин совершил кражу» и «он может быть наказан лишением свободы на срок до двух лет» истинны, то истинность сложного высказывания не вызывает сомнения. При истинности совершения кражи невозможность применения наказания в виде лишения свободы на срок до двух лет должно быть оценено нами как ложное высказывание, так как такое наказание предусмотрено соответствующей статьей Уголовного кодекса РБ. Заметим, что при ложном значении высказывания A значение истинности импликации $A \to B$, вообще говоря, неопределенно. Но поскольку каждое высказывание должно быть либо истинным, либо ложным, то оценивание сложного высказывания как истинного соответствует истинности импликации при этих значениях простых высказываний в конкретных определенных условиях. При ложном первом высказывании «гражданин совершил кражу» применение данного вида наказания к гражданину все же может быть осуществимо, если он, например, обвиняется по другой статье УК РБ, предусматривающей наказание лишением свободы сроком до двух лет. И, наконец, при ложности простых высказываний, т.е. истинности противоположных: «гражданин не совершил кражу» и «он не может быть наказан лишением свободы на срок до двух лет», рассмотренная причинно-следственная связь является истинной.

Пример. Высказывание «Если по истечении срока трудового договора трудовые отношения фактически выполняются и ни одна из сторон не потребовала их прекращения, то действие трудового договора считается продолженным на неопределенный срок» (Ст. 39 Трудового кодекса РБ) является сложным. Разобьем его на простые высказывания: «Если по истечении срока трудового договора» (A) «трудовые отношения фактически выполняются» (B) и «ни одна из сторон не потребовала их прекращения» (C), то «действие трудового договора считается продолженным на неопределенный срок» (D). Данное высказывание имеет следующий вид: $(A \wedge B \wedge C) \to D$.

Двойной импликацией высказываний A и B называется высказывание «B тогда и только тогда, когда A» или «B если и только если A», которое истинно тогда и только тогда, когда A и B принимают одинаковые значения истинности. Обозначается двойная импликация $A \leftrightarrow B$. Двойная импликация означает истинность двух высказываний «если A истинно, то и B истинно» и «если A ложно, то и B ложно».

Таблица истинности двойной импликации имеет вид:

A	B	$A \leftrightarrow B$
И	и	и
И	л	л
Л	и	л
Л	л	и

Таблица истинности высказывания, состоящего из двух простых высказываний A и B, содержала $2^2 = 4$ строки – столько различных комбинаций значений истинности двух простых высказываний. Таблица истинности высказывания, состоящего из трех простых высказываний, содержит $2^3 = 8$ строк, а для высказывания, состоящего из n простых высказываний, число строк в таблице истинности равно 2^n, причем некоторые комбинации невозможны в принципе, поэтому число содержательно логических возможностей может быть меньше, чем количество строк в таблице истинности.

Высказывание, истинное при каждой логической возможности, называют ***логически истинным***. Высказывание, ложное при каждой логической возможности, называют ***логически ложным***.

Анализ административных и других норм с точки зрения формальной логики позволяет в ряде случаев обнаружить двусмысленность их применения. Например, высказывание «собственность на землю, земельные участки может быть государственной и частной» (Кодекс РБ о земле, 23 июля 2008 г. № 425-З, гл. I, ст. 12) представляет конъюнкцию двух высказываний: «собственность на землю, земельные участки может быть государственной» (A) и «собственность на землю, земельные участки может быть частной» (B). По сути оно ложно, так как истинным высказывание $A \wedge B$ может быть только в случае одновременной истинности компонентов, что логически невозможно (земля не может быть одновременно государственной и частной). Поэтому в правовом тексте целесообразно применение связки «или», как в дизъюнкции в разделительном смысле. Таким образом, формально-логический анализ уяснения содержательных контекстов, построения текстовой информации позволяет добиться определенной однозначности толкований.

2.3 Формулы логики высказываний, отношения следования, эквивалентности

Формулы логики высказываний образуются из букв, обозначающих высказывания, знаков логических операций и символов «и», «л». Для правильного вычисления значения логических формул необходимо задать порядок выполнения логических операций. Сначала выполняется операция отрицания, затем конъюнкция и дизъюнкция (они равноправны), затем импликация и, последней, двойная импликация. Как и в алгебре, скобки необходимы для изменения порядка действий, а равноправные операции вычисляются слева направо.

Формулы называются равносильными, если при одинаковом наборе значений входящих в них высказываний они принимают одинаковые значения. То, что формулы A и B равносильны, обозначают $A \Leftrightarrow B$. Равносильности доказываются путем построения таблиц истинности для левых и правых частей формул. Приведем некоторые равносильности:

1. $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$. 2. $A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow$ л. 3. $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.

Построим таблицу истинности для последней равносильности:

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
и	и	и	л	л	л	л
и	л	л	и	л	и	и
л	и	л	и	и	л	и
л	л	л	и	и	и	и

Сравнивая четвертый и седьмой столбцы видим, что значения истинности формул $\overline{A \wedge B}$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$ на одних и тех же значениях A и B совпадают. Это означает, что формулы являются равносильными. Формулы, которые являются истинными при всех возможных наборах значений входящих в них высказываний, называются законами. Например, закон контрапозиции состоит в том, что высказывание $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$ является логически истинным. Иначе можно сказать, что формулы $A \rightarrow B$ и $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ являются равносильными.

Таким образом, между высказываниями устанавливаются логические отношения. Отношение следования: из высказывания A логически следует высказывание B, если при истинности A всегда истинно и B. Запись: $A \Rightarrow B$. Отношение эквивалентности (равносильности): если из высказывания A логически следует высказывание B, и, наоборот, из B логически следует A. Запись: $A \Leftrightarrow B$. Высказывания A и B ***несовместны***, если нет ни одной логической возможности их одновременной истинности. В противном случае высказывания *совместны*. Например, высказывания A и $\overline{A}$ несовместны. Высказывания $A \wedge B$ и $A \vee B$ являются совместными.

Между отношением следования и импликацией, отношением эквивалентности и двойной импликацией есть связь. Из высказывания A следует высказывание B, если и только если импликация $A \to B$ логически истинна. Логические возможные значения высказываний A и B для импликации $A \to B$ следующие:

A	B	$A \to B$
и	и	и
л	и	и
л	л	и

Пример. Построим таблицу истинности формулы $\overline{A} \to (A \to B)$:

A	B	$\overline{A}$	$A \to B$	$\overline{A} \to (A \to B)$
и	и	л	и	И
и	л	л	л	и
л	и	и	и	и
л	л	и	и	и

Следовательно, из высказывания $\overline{A}$ следует высказывание $A \to B$: $\overline{A} \Rightarrow (A \to B)$.

Высказывания A и B эквивалентны (равносильны), если и только если двойная импликация $A \leftrightarrow B$ логически истинна. Логические возможные значения высказываний A и B для двойной импликации $A \leftrightarrow B$ следующие:

A	B	$A \leftrightarrow B$
и	и	и
л	л	и

Пример. Построим таблицу истинности формулы $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$:

A	B	$A \to B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$(\overline{B} \to \overline{A})$	$(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$
и	и	и	л	л	и	и
и	л	л	л	и	л	и
л	и	и	и	л	и	и
л	л	и	и	и	и	и

Следовательно, высказывания $A \to B$ и $(\overline{B} \to \overline{A})$ эквивалентны: $(A \to B) \Leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$.

2.4 Аргументация социологических заключений и поиск противоречий

Значимость аргументации социологических заключений (высказываний) неоспорима. Утверждение того, что некоторое высказывание (заключение) логически следует из конъюнкции других высказываний (посылок), называют аргументом. Аргумент называют правильным, если из истинности всех посылок следует истинность заключения. Аргумент, не являющийся правильным, называют ложным.

Примеры.

1. Из посылок «Если студент обучается на II ступени высшего образования, то студент является магистрантом» (ст. 30 Кодекса РБ об образовании, 13 января 2011 г. № 243, т. 3) и «Петров не является магистрантом» сделано заключение «Петров не обучается на II ступени высшего образования». Верно ли оно?

Решение. Сделаем следующие обозначения высказываний:

Посылки	Словесная форма	Формально-логическая запись
1	Если «студент обучается на II ступени высшего образования» (A), то «студент является магистрантом» (B) (ст. 30 Кодекса РБ об образовании, 13 января 2011 г. №243, т.3)	$A \to B$
2	Петров не является магистрантом	$\overline{B}$
заключение	Петров не обучается на II ступени высшего образования»	$\overline{A}$

Формально-логическая запись аргумента следующая: $(A \to B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Нам нужно проверить, следует ли из истинности посылок $A \to B$ и $\overline{B}$ истинность заключения $\overline{A}$. Построим таблицу истинности всех высказываний:

A	B	$A \to B$	$\overline{B}$	$(A \to B) \wedge \overline{B}$	$\overline{A}$
и	и	и	л	л	л
и	л	л	и	л	л
л	и	и	л	л	и
л	л	и	и	и	и

Сравнивая два последних столбца таблицы истинности, видим, что из истинности конъюнкции посылок $(A \to B) \wedge \overline{B}$ следует истинность заключения $\overline{A}$. Таким образом, аргумент правильный.

2. Из посылок «Если нашедший вещь откажется от приобретения ее в собственность, то найденная вещь поступает в коммунальную собственность» (ст. 229 Гражданского кодекса РБ) и «Нашедший вещь не отказался от приобретения ее в собственность» сделано заключение «найденная вещь не поступила в коммунальную собственность». Верно ли оно?

Решение. Сделаем следующие обозначения высказываний:

Посылки	Словесная форма	Формально-логическая запись
1	Если «нашедший вещь откажется от приобретения ее в собственность» (A), то «найденная вещь поступает в коммунальную собственность» (B) (ст. 229 Гражданского кодекса РБ)	$A \to B$
2	Нашедший вещь не отказался от приобретения ее в собственность	$\overline{A}$
заключение	найденная вещь не поступила в коммунальную собственность»	$\overline{B}$

Формально-логическая запись аргумента следующая: $(A \to B) \wedge \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$. Нам нужно проверить, следует ли из истинности посылок $A \to B$ и $\overline{A}$. истинность заключения $\overline{B}$. Построим таблицу истинности всех высказываний:

A	B	$A \to B$	$\overline{A}$	$(A \to B) \wedge \overline{B}$	$\overline{B}$
и	и	и	л	л	л
и	л	л	л	л	и
л	и	и	и	и	л
л	л	и	и	и	и

Сравнивая два последних столбца таблицы истинности, видим, что из истинности конъюнкции посылок $(A \to B) \wedge \overline{B}$ не следует истинность заключения. Таким образом, аргумент ложный.

2.5 Понятие множества. Операции над множествами

Понятие множества является одним из основных в математике. Невозможно дать строгое математическое определение этого понятия, но, тем не менее, когда речь идет о множестве, то представляют некоторую совокупность объектов, объединенных по одному признаку. Например, множество натуральных чисел, множество социальных работников, множество коммерческих банков и т п. Создатель теории множеств Г. Кантор формулировал понятие множества следующими словами: «Множество или совокупность – это собрание определенных и различных объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое в качестве единого». Такая формулировка не может рассматриваться как обычное математическое определение, это лишь описание идеи. Понятие множества по существу является первоначальным, поэтому его нельзя свести к еще более ранним элементарным понятиям. Множества будем обозначать жирными прописными буквами латинского алфавита $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ...

Множества могут быть конечными и бесконечными. Конечные множества состоят из конечного числа элементов. Например, конечным множеством является множество букв русского алфавита, множество студентов группы, множество жителей города, множество статей Гражданского кодекса республики Беларусь. Конечным считают также множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называется пустым и обозначается $\varnothing$. Бесконечные множества состоят из бесконечного числа элементов. Например, бесконечным множеством является множество натуральных чисел, множество точек прямой. Для обозначения множества используют $\{\ \}$. Если некоторый предмет x принадлежит множеству $\boldsymbol{M}$, то используется обозначение $x \in \boldsymbol{M}$. Если некоторый предмет x не принадлежит множеству $\boldsymbol{M}$, то используется обозначение $x \notin \boldsymbol{M}$. Например, пусть $\boldsymbol{M}$ – множество гласных букв русского алфавита, тогда $а \in \boldsymbol{M}, о \in \boldsymbol{M}, р \notin \boldsymbol{M}$. Конечное множество можно задавать перечнем всех его элементов. Например, $\boldsymbol{M} = \{а, е, и, о, и, у, ы, э, ю, я\}$ – множество гласных букв русского алфавита. Если ясен закон, при помощи которого строятся или определяются элементы, то все элементы можно не выписывать, а употреблять знак многоточия или правила принадлежности. Например, множество всех букв русского алфавита можно записать в виде: $\boldsymbol{M} = \{а, б, в, \dots, ю, я\}$; числовой отрезок $[0,1]$ можно записать в виде: $\boldsymbol{P} = \{p \in \boldsymbol{R} | 0 \le p \le 1\}$.

Множество $\boldsymbol{A}$ называется ***подмножеством*** множества $\boldsymbol{B}$, если каждый элемент множества $\boldsymbol{A}$ является элементом множества $\boldsymbol{B}$.

В этом случае говорят также, что множество $\boldsymbol{A}$ включается в множество $\boldsymbol{B}$ и используют обозначение $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$.

Например, $\{2, 4\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$. Множество пешек в шахматах является подмножеством шахматных фигур, множество квадратов – подмножеством прямоугольников, множество отличников группы – подмножеством студентов этой группы.

Множества A и B называются ***равными***, если каждое из них является подмножеством другого.

Следовательно $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Можно отметить, что равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Исходное множество будем называть универсальным и обозначать $\mathbf{\Omega}$. Условимся считать, что само множество $\mathbf{\Omega}$ и $\varnothing$ считать подмножествами $\mathbf{\Omega}$.

Над множествами можно осуществлять операции, с помощью которых можно получить новые множества.

Пересечением множеств A и B называется множество, которое состоит из элементов, входящих в каждое из множеств A и B.

Обозначается пересечение множеств A и B следующим образом: $A \cap B$. Например, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $B = \{2, 4, 6, 7\}$, то $A \cap B = \{2, 4\}$. Если A – множество лиц, совершивших преступление в Могилевской области, а B – множество лиц, совершивших уголовное преступление в РБ, то $A \cap B$ – множество лиц, совершивших преступление в Могилевской области.

Объединением множеств A и B называется множество, которое состоит из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B.

Обозначается объединение множеств A и B следующим образом: $A \cup B$. Например, если $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $B=\{2, 4, 6, 7\}$, то $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Разностью множеств A и B называется множество, которое состоит из элементов множества A не входящих в множество B.

Обозначается разность множеств A и B следующим образом: $A \setminus B$. Например, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $B = \{2, 4\}$, то $A \setminus B=\{1, 3, 5\}$. Если A – множество женщин, проживающих в Могилеве, а B – множество всех людей, проживающих в этом городе, то $B \setminus A$ – множество мужчин – жителей Могилева.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат какому-то одному из множеств A или B.

Симметрическая разность множеств A и B обозначается через $A \Delta B$. Можно заметить, что $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Дополнением множества A называется множество $\bar{A}$ (не A), которое состоит из тех и только тех элементов множества $\mathbf{\Omega}$, которые не принадлежат A.

Заметим, что A – дополнение $\bar{A}$, т.е. A и $\bar{A}$ – взаимодополняющие множества.

Операции с множествами удобно иллюстрировать при помощи графических схем, в которых отдельные множества представляются в виде кругов или овалов. Предполагается, что элементами множества являются все точки круга (или овала). Такие круги называются кругами Эйлера. Изображение множеств называют диаграммой Венна. Универсальное множество **Ω** изображается прямоугольником, а его подмножества – кругами (или овалами).

Заштрихованная фигура на рис. 1 изображает объединение множеств ***A*** и ***B***.

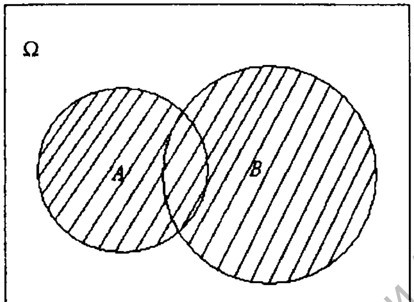


Рис. 1

Заштрихованная фигура на рис. 2 изображает пересечение множеств ***A*** и ***B***.

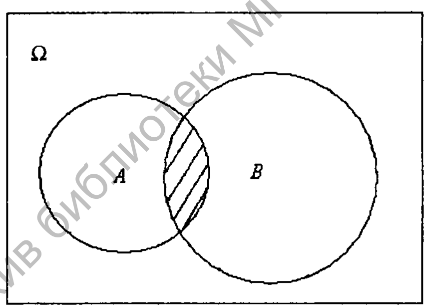


Рис. 2

Заштрихованная фигура на рис. 3 изображает разность множеств ***A*** и ***B***.

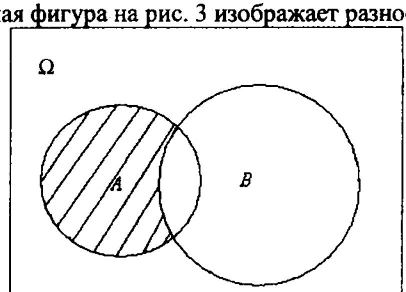


Рис. 3

2.6 Числовые множества. Проценты

Примером известных множеств являются числовые множества. Понятия и свойства числовых множеств лежат в основе почти всех разделов математики, изучаемых и в средней и в высшей школе. Выделим основные числовые множества:

N – множество натуральных чисел. Это множество чисел, которые используются для счета и состоит из чисел 1, 2, 3,….

Z – множество целых чисел. Это множество состоит из натуральных чисел, противоположных им чисел и числа 0.

Q – множество рациональных чисел. Это множество состоит из чисел вида $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$. Отметим, что любое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби либо бесконечной периодической десятичной дроби.

J – множество иррациональных чисел. Это множество состоит из всех чисел, которые можно записать в виде бесконечной десятичной непериодической дроби. Примерами таких чисел являются, например, число $\pi \approx 3{,}14$, число $\sqrt{2}$, число $e \approx 2{,}7$ и другие.

R – множество действительных чисел. Это множество является объединением рациональных и иррациональных чисел. На рис. 4 изображены основные числовые множества.

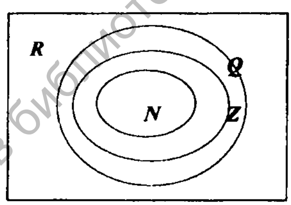


Рис. 4

Одним из важных математических понятий, связанным с понятием числа, является понятие «процент». Это понятие часто встречаются и в повседневной жизни. Можно прочитать или услышать, например, что, в выборах приняли участие 57% избирателей, рейтинг победителя хит-парада равен 75%, успеваемость в классе 85%, банк начисляет 17% годовых, молоко содержит 1,5% жира, материал содержит 100% хлопка и т.д.

Само слово «процент» происходит от латинского «pro centum», что означает в переводе «сотая доля». ***Процент*** – это сотая часть единицы. Запись 1% означает 0.01. *В 1685 г. в Париже была издана книга «Руководство по коммерческой арифметике» Матье де ла Порта. В одном месте речь шла о процентах, которые тогда обозначали «cto» (сокращенно от cento). Однако наборщик принял это «cto» за дробь и напечатал «%». Так из-за опечатки этот знак вошёл в обиход. Были известны проценты и в Индии. Индийские математики вычислили проценты, применяя так назы-*

ваемое тройное правило, то есть пользуясь пропорцией. В Древнем Риме были широко распространены денежные расчеты с процентами. Римский сенат установил максимально доступный процент, взимавшийся с должника.

Простейшие задачи на проценты

1. Нахождение процента от числа.

Чтобы найти процент p от числа a, надо это число a умножить на дробь $\frac{p}{100}$.

$$b = a \cdot \frac{p}{100}.$$

Пример. Вклад в банке имеет годовой прирост 6%. Начальная сумма вклада равнялась 10000 руб. На сколько рублей возрастёт сумма вклада в конце года?

Решение: $10000 \cdot 6 : 100 = 600$ руб.

1. Нахождение числа по проценту.

Чтобы найти число a по его проценту p, надо часть b, соответствующую этому проценту p, разделить на дробь $\frac{p}{100}$: $a = b : \frac{p}{100}$.

Пример. Если на предприятии в статистическом отделе работает 3 человека, что составляет 1,5% от количества всех работников предприятия, то всего на предприятии работает $3 : \frac{1,5}{100} = 200$ человек.

2. Нахождение процентного отношения двух чисел.

Чтобы узнать, сколько процентов число b составляет от числа a, надо число b разделить на число a и результат умножить на 100%.

$$p = \frac{b}{a} \cdot 100(\%)$$

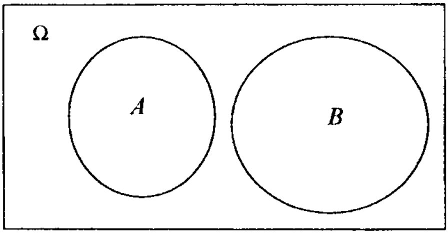
Пример. Завод произвёл за год 40000 автомобилей, а в следующем году – только 36000 автомобилей. Сколько процентов это составило по отношению к выпуску предыдущего года?

Решение: $36000 : 40000 \cdot 100 = 90(\%)$.

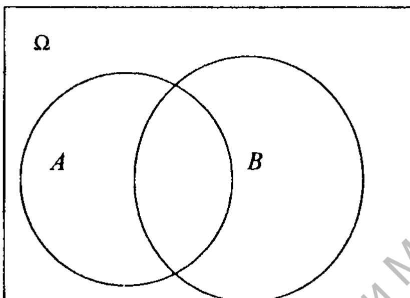
2.7 Множество логических возможностей высказываний

Между множествами и высказываниями, между соответствующими операциями над ними можно установить соответствие.

Через $\mathbf{\Omega}$ обозначим множество всех логически возможных высказываний. Истинные высказывания в логических возможностях выделим в подмножества $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ...(высказывания, благоприятствующие истинности – множества истинности соответствующих высказываний). Каждому высказыванию поставим в соответствие его множество истинности. Например, $\boldsymbol{A \cap B}$ – множество истинности высказывания $A \wedge B$, $\boldsymbol{A \cup B}$ – множество истинности высказывания $A \vee B$. Если высказывания A и B несовместные, то их изобразим кругами без общей части:



Если высказывания A и B совместные, то их изобразим кругами с общей частью:



Для несовместных высказываний A и B соответствие между высказываниями и множествами представим в виде таблицы:

Высказывание	Множество истинности
Логически истинное	Ω
Логически ложное	$\varnothing$.
A	$A \subset \Omega$
B	$B \subset \Omega$
$A \wedge B$	$A \cap B$
$A \vee B$	$A \cup B$
$A \to B$	$\overline{A} \cup B$
$A \leftrightarrow B$	$(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$
Отношения между высказываниями	Отношения между множествами
$A \Rightarrow B$ (из A следует B)	$A \subset B$
$A \Leftrightarrow B$ (A эквивалентно или равносильно B)	$A = B$

Можно рассматривать, что здесь приведен пример моделирования логики высказываний в теории множеств или наоборот. Тогда любая задача логики высказываний может быть переведена в задачу теории множеств, и наоборот.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Следующее высказывание расчлените на простые и запишите с помощью символов логических операций: «Если в период получения пособия по уходу за ребенком в возрасте до 3 лет возникает право на пособие по беременности и родам, то пособие по уходу за ребенком в возрасте до 3 лет в период получения пособия по беременности и родам выплачивается в установленном размере».

2. Следующее высказывание расчлените на простые и запишите с помощью символов логических операций: «Если пешеход хочет перейти нерегулируемый перекресток, то он должен посмотреть налево и, пропустив идущий транспорт, перейти улицу до середины, затем посмотреть направо и, пропустив идущий транспорт, перейти улицу до конца».

3. Постройте таблицы истинности следующих формул и выясните, какие из формул являются законами:

а) $A \to B \leftrightarrow \overline{A} \vee B$; б) $(A \to B) \wedge (B \to A)$; в) $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$.

4. Может ли множество двух отцов и двух детей состоять из трех человек?

5. Из 15 спортсменов, занимающихся боксом или борьбой, 10 – боксеры. Сколько спортсменов занимается обоими видами спорта, если борьбой занимается 8 из них?

6. В двух группах учатся 50 студентов. Для прибытия в институт 12 из них пользуются автобусом, 18 добираются пешком, 7 и идут, и едут в автобусе. Сколько человек или добираются пешком или пользуются автобусом? Сколько человек пользуется только автобусом? Сколько человек пользуется другим транспортом?

7. В некотором городе всего 300 социальных работников. Сколько человек составляют 4% от их общего числа?

8. Некто утаил прибыль в размере 10 млн руб. Какую сумму недополучила казна, если налог на прибыль составляет 22%?

9. Отдел воспитательной работы с молодежью проводил анкетирование, в котором приняли участие 380 студентов вузов. Из них 133 студента-первокурсника; 92 студента обучаются на 2-м или 3-м курсах. Остальные студенты-выпускники. Заполните до конца следующую таблицу:

Всего студентов	380	100%
Студенты 1 курса	133	
Студенты 2-го и 3-го курсов	92	
Суденты-выпускники		

В первом столбце проставьте соответствующие абсолютные значения, а во втором укажите, какой процент они составляют от общего числа студентов.

Рекомендуемая литература

1. *Ахтямов А.М.* Математика для социологов и экономистов: учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

2. *Гусак А.А.*, Гусак Г.М. Высшая математика. – Минск, 1991.
3. *Ляпин Е.С.*, Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. – М.: Просвещение, 1974.
4. *Лельчук М.П.*, Полевченко И.И., Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д. Практические занятия по алгебре и теории чисел. – Минск: Выш.шк., 1986.
5. *Павловский А.И.*, Пупцев А.Е., Гращенко П.Л. Информатика: учеб. пособие для 10-го кл. с углубл. изучением информатики. – Минск: Нар. Асвета, 2000.

Тема 3. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЯ

3.1 Задачи о принятии решения

Целенаправленная человеческая деятельность сопровождается принятием решений. Каждый человек стремится принимать оптимальные решения при определении места учебы, работы, покупке одежды, продуктов и т.п. В таких ситуациях полезны различные простые приемы принятия решений. Например, при сравнении двух возможных мест работы весьма помогает таблица из трех столбцов. В левом из них перечислены характеристики рабочего места: заработок, продолжительность рабочего времени, время в пути от дома до работы, надежность предприятия, возможности для профессионального роста, характеристики рабочего места и непосредственного начальства и др. А в двух других столбцах – оценки этих характеристик, в "натуральных" показателях или в процентах от максимума. Иногда при взгляде на подобную таблицу все сразу становится ясно. Но можно вычислить значения обобщенного показателя, введя весовые коэффициенты и сложив взвешенные оценки вдоль столбцов. Не менее полезно изобразить на бумаге возможные варианты решения, которое предстоит принять, а также возможные реакции лиц и организаций на те или иные варианты решения, а затем и возможные ответы на эти реакции. Полезны таблицы доводов «за» и «против» и др. В профессиональной деятельности специалист среди множества решений должен уметь отыскивать наилучшие и учитывать при этом ограниченность различных ресурсов (сырьевых, денежных, технологических и др.). Иногда решения приходится принимать в неопределенных или конфликтных ситуациях, в условиях риска и т.д. Тогда, когда от принятого решения зависят жизнь людей, состояние их здоровья, благополучие, значительные материальные затраты для анализа ситуации выбора необходимо использовать современные достижения наук, в частности, математики. Число математических методов, которые используются в настоящее время в теории принятия решений довольно велико. Мы предлагаем познакомиться с методами оптимизации, которые применяются для поиска оптимальных решений.

3.2 Математическое моделирование в теории принятия решений

При научном подходе к принятию решений современные ученые, экономисты, руководители применяют весь арсенал методов современной прикладной математики. Они используются для оценки ситуации и прогнозирования при выборе целей, для генерирования множества возможных вариантов решений и выбора из них наилучшего. Центральное место при принятии решения занимает выбор наилучшего или оптимального варианта. Один из наиболее эффективных методов состоит в том, что строится **математическая модель** рассматриваемой ситуации или рассматриваемого объекта. Область математики, которая занимается решением задач, связанных с поиском оптимальных решений, называется **математическим программированием.** Методы, которые применяются при решении задач математического программирования, называются методами оптимизации. Математическая модель задачи математического программирования включает:

1) совокупность неизвестных величин $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, действуя на которые систему можно совершенствовать. Их называют **планом задачи** (вектором управления, решением, стратегией, поведением и т.д.).

2) **целевую функцию** (функцию цели, показатель эффективности, критерий оптимальности, функционал задачи и др.) Целевая функция позволяет выбрать наилучший вариант из множества возможных. Наилучший вариант является экстремальным значением целевой функции. Обозначим целевую функцию $Z = Z(X)$.

3) условия (или **систему ограничений**), налагаемые на неизвестные величины. Эти условия следуют из ограниченности материальных, финансовых, трудовых ресурсов, времени, технического, технологического потенциала и др. Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует **область допустимых решений.** Объединение всех условий (ограничений), налагаемых на неизвестные искомые величины x_i обозначим A. При таких обозначениях математическая модель задачи примет вид:

$Z(X) \to \max(\min)$;

$X \in A$.

План $X \in A$, т.е. удовлетворяющий системе ограничений, называется **допустимым**. Допустимый план, при котором функция цели принимает экстремальное значение, называется **оптимальным**. Оптимальное решение, вообще говоря, не является единственным. Возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бесконечное множество оптимальных решений.

В зависимости от особенностей целевой функции и системы ограничений в математическом программировании выделяют различные типы и, соответственно ним, следующие основные разделы:

– Линейное программирование. Целевая функция линейна, а множество, на котором ищется экстремум целевой функции, задается системой линейных равенств и неравенств.

– Нелинейное программирование. Целевая функция нелинейная и нелинейные ограничения.

– Выпуклое программирование. Целевая функция выпуклая и выпуклое множество, на котором решается экстремальная задача.

– Квадратичное программирование. Целевая функция квадратичная, а ограничения – линейные равенства и неравенства.

– Многоэкстремальные задачи. Задачи, в которых целевая функция имеет несколько локальных экстремумов.

– Целочисленное программирование. В подобных задачах на переменные накладываются условия целочисленности.

В качестве примера математической модели задачи о принятии решения рассмотрим задачу выбора оптимального маршрута.

Задача выбора оптимального маршрута впервые была сформулирована как задача о бродячем торговце или коммивояжере. Суть ее заключается в следующем: Коммивояжер должен посетить один, и только один, раз каждый из n городов и вернуться в исходный пункт. Расстояние между городами известно. Необходимо составить маршрут так, чтобы суммарная длина пройденного пути была минимальной.

Составим математическую модель этой задачи.

Пусть имеется n городов M_1, $M_2,\ldots$, M_n. Расстояния между ними известны и приведены в таблице:

	1	2	...	n
0	c_{01}	c_{02}	...	c_{0n}
1	–	c_{12}	...	c_{1n}
...	...	...	...	...
n	c_{n1}	c_{n2}	...	–

Первая строка таблицы содержит расстояния c_{0i} от исходного пункта (местонахождения коммивояжера) до города M_i, все последующие – расстояния c_{ij} межу городами M_i и M_j. Необходимо найти кратчайший маршрут, при котором коммивояжер должен посетить один и только один раз каждый из городов и вернуться в исходный пункт.

Для решения этой задачи применим метод **исчерпывающего перебора**. Суть этого метода заключается в том, что при заданном числе n объектов проверяется все множество перестановок (вариантов маршрутов), равное $n!$. Заметим, что при увеличении числа n количество вариантов стремительно увеличивается, поэтому для решения задачи целесообразно применять компьютерную технику, тем более, что алгоритмизация решения довольна проста.

Для математической записи функции цели введем следующие обозначения. Пусть $X=\sigma=(i_1,i_2,..,i_n)$ – перестановка из n элементов множества $\{1,2,\ldots,n\}$, соответствующая последовательности номеров объектов в выбранном маршруте. Тогда функция цели имеет следующий вид:

$$Z(X)=c_{0i_1}+\sum_{k=1}^{n-1}c_{i_k i_{k+1}}\to\min.$$

Алгоритм исчерпывающего перебора

1. Строится первоначальная перестановка $\sigma = \sigma_1$, все элементы которой упорядочены по возрастанию и определяется $Z(\sigma_1)$.

2. Пусть $p = 1$.

3. Просматриваются с конца элементы перестановки σ_p и находится первое число, удовлетворяющее условию $i_{k-1} \langle i_k$. Это число называется обрывающим и обозначается $e = i_{k-1}$.

4. В $\Delta\sigma = (i_k, \ldots, i_n)$ находится минимальный элемент больший числа e. Этот элемент меняется местом с числом e;

5. Пусть $p = p + 1$.

6. Все элементы $\Delta\sigma = (i_k, \ldots, i_n)$ упорядочиваются по возрастанию и новая подстановка обозначается σ_p;

7. Определяется $Z(\sigma_p)$ и, если $Z(\sigma_p) \langle Z(\sigma_{p-1})$, то это значение берется за оптимальное и алгоритм повторяется с пункта 3;

8. Алгоритм заканчивается, когда во вновь исследуемой перестановке σ_p отсутствует e.

Пример. Пусть социальный работник должен посетить 3-х пенсионеров, проживающих в населенных пунктах M_1, M_2, M_3. Расстояния (в километрах) известны и приведены в таблице:

	1	2	3
0	3,2	2,4	1,1
1	–	6,5	7,5
2	4	–	3,5
3	2,5	2,2	–

В первой строке таблицы приведены расстояния от здания социальной службы до указанных населенных пунктов, а в остальных – расстояния между деревнями. Необходимо найти кратчайший маршрут, начинающийся возле здания социальной службы и проходящий через все населенные пункты.

Решение.

Строим первоначальную перестановку $\sigma_1 = (1,2,3)$, все элементы которой упорядочены по возрастанию и определяем значение $Z(\sigma_1)$ = 3,2 + +6,5 + 3,5 = =13,2(км). Находим обрывающее число e = 2, меняем местами элементы 2 и 3, получаем новую подстановку $\sigma_2 = (1,3,2)$ и определяем значение $Z(\sigma_2)$ = 3,2 + 7,5 + 2,2 = 12,9 (км). Так как $Z(\sigma_2) \langle Z(\sigma_1)$, то наилучшим является $Z(\sigma_2)$ = 12,9 (км). Поступаем далее в соответствии с алгоритмом исчерпывающего перебора:

e = 1, $\sigma_3 = (2,1,3)$, $Z(\sigma_3)$ = 2,4 + 4 + 7,5 = 13, 9(км); e = 1, $\sigma_4 = (2,3,1)$, $Z(\sigma_4)$ = 2,4 + 3,5 + 2,5 = 8, 4(км); e = 2, $\sigma_5 = (3,1,2)$, $Z(\sigma_5)$ = 1,1 + 2,5 + 6,5 = 10, 1(км); e = 1, $\sigma_6 = (3,2,1)$, $Z(\sigma_6)$ = 1,1 + 2,2 + 4 = 7, 3(км).

В последней перестановке отсутствует обрывающее число e. Следовательно, просмотрены все варианты маршрутов и оптимальный вариант маршрута следующий: $3 \to 2 \to 1$. Расстояние, которое необходимо пройти социальному работнику при таком маршруте, равно 7,3 км.

3.3 Задачи линейного программирования и графический способ их решения

В зависимости от особенностей целевой функции выделяют различные типы задач математического программирования. Если целевая функция и система ограничений имеют линейный вид, то такие задачи называются задачами линейного программирования.

Пример. Некоторое производство выпускает два вида продукции из трех видов сырья. Потребность сырья в тоннах для выпуска одной тонны продукции и запасы сырья показаны в следующей таблице:

	Продукция 1	Продукция 2	Запас сырья
Сырье 1	1	4	24
Сырье 2	3	1	18
Сырье 3	2	0	14

От реализации одной тонны продукции 1 предприятие получает 10 тыс. рублей прибыли, реализация одной тонны продукции 2 дает предприятию 8 тыс. рублей чистой прибыли. Требуется рассчитать план выпуска продукции, дающий максимальную прибыль.

Составим математическую модель задачи. Пусть следует выпускать x тонн продукции 1 и y тонн продукции 2. Очевидно, что прибыль составит при этом $f = 10x + 8y$. Это функция цели, для которой необходимо найти максимальное значение. Так как запасы сырья ограниченны, то неизвестные должны удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 4y \le 24; \\ 3x + y \le 18; \\ 2x \le 14. \end{cases}$$

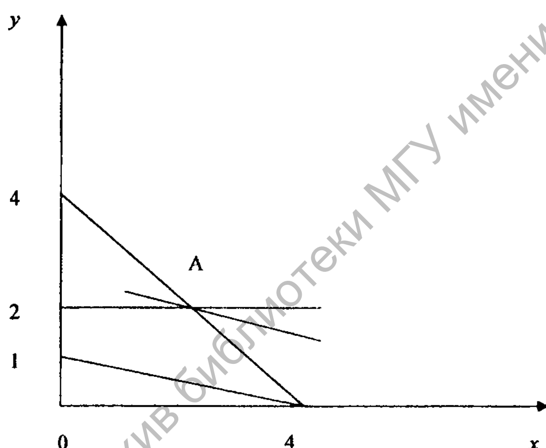
Кроме того, по смыслу задачи, $x \ge 0$ и $y \ge 0$.

В том случае, когда функция цели и ограничения зависят от двух переменных, можно применять графический способ решения задач линейного программирования. Этот способ заключается в том, что на координатной плоскости строится область допустимых решений и находятся граничные точки этой области, в которых достигаются экстремальные значения целевой функции. Достоинства графического способа заключаются в его простоте и наглядности, к недостаткам же следует отнести ограниченность применения. Продемонстрируем графический способ решения задач линейного программирования на следующем примере.

Пример. Решить задачу линейного программирования графическим способом, если
$f = x + 3y \to \max$,

$$\begin{cases} x + 4y \geq 4; \\ x + y \leq 4; \\ y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Построим в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости прямые, соответствующие ограничениям задачи и выделим область решений. В нашем случае нужно построить прямые, заданные уравнениями $x + 4y = 4, x + y = 4, y = 2, x = 0, y = 0$. Каждая из этих прямых разбивает плоскость на две полуплоскости. Исходя из системы неравенств, находим пересечение этих полуплоскостей – область решений (в нашем случае это четырехугольник 12A4).



Затем от начала координат откладываем вектор **c**(1, 3), координаты которого являются коэффициентами в уравнении функции цели. После этого строим линию уровня $x + 3y = a$, где a – любое число, и параллельным переносом передвигаем ее в направлении вектора **c** до тех пор, пока она не коснется многоугольника решений в крайней граничной точке или точках так, что весь многоугольник будет расположен ниже или левее этой линии (если это невозможно, то делаем вывод, что задача не имеет решения). Пусть A – крайняя граничная точка многоугольника решений.. Находим координаты точки A из системы $\begin{cases} x + y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$: A(2; 2). Подставляем координаты точки A в уравнение функции цели, получим $f_{\max} = 2 + 3 \cdot 2 = 8$.

Замечание: Если решается задача на нахождение минимального значения для функции цели, то линию уровня следует передвигать параллельно до тех пор, пока она не коснется многоугольника решений в крайней граничной точке или точках так, что весь многоугольник будет расположен выше или правее этой линии.

3.4 Элементы теории игр

Теория игр изучает математические модели принятия решений в условиях конфликта, когда при выборе одного варианта действий из многих участвует несколько противоборствующих сторон. Многие ситуации юридической практики можно промоделировать игровыми методами. Например, следователь и преступник, прокурор и обвиняемый и т.д., в определенных ситуациях являются противниками.

Поскольку теория игр – это теория математических моделей, то рассматриваемая ситуация и сам о решение описывается в виде упрощенной схемы. В этой схеме необходимо описать правила игры, количество игроков, их цели, возможные действия и результаты этих действий. Последовательность действий игрока во всех возможных случаях развития игры называется ***стратегией*** игрока. Правилами игры предусматриваются определенные выигрыши для игроков в зависимости от примененных ими стратегий и исходов игры. ***Выигрыш*** – это мера эффективности действий игрока. Если выигрыш можно выразить количественно, то отрицательному выигрышу соответствует проигрыш игрока.

Различные реальные конфликтные ситуации приводят к различным схемам игр. Рассмотрим более подробно случай, когда в игре участвуют два игрока. Ограничимся ситуацией, когда игра рассчитана лишь на один ход из нескольких возможных для каждого из игроков. Если условие игры позволяет выигрыши игроков записать в виде таблицы чисел, которая называется ***матрицей платежей***, то такие игры называются матричными. Каждый игрок выбирает для себя наиболее выгодную стратегию. Если первый игрок стремится к тому, чтобы получить наибольший выигрыш, то второй выбирает стратегию, которая доставляет ему минимальный проигрыш.

Пусть платежная матрица имеет вид:

	B_1	B_2	…	B_m
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}
…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}

Нижней чистой ценой игры называется число $\alpha = \max\limits_i \left\{ \min\limits_j c_{ij} \right\}$.

Верхней чистой ценой игры называется число $\beta = \min\limits_j \left\{ \max\limits_i c_{ij} \right\}$.

Если $\alpha = \beta$, то этот элемент называют ***седловым элементом*** или ***чистой ценой*** игры. Если игра имеет седловой элемент, то для игроков существуют чистые стратегии, т.е. возможные ходы выбираются с вероятностью 1. Если игра не имеет седловой точки, то решение затрудняется и приходится применять смешанные стратегии.

Пример. Отряду милиции поставлена задача задержать группу преступников. Преступники могут выбрать один из трех маршрутов движения B_1, B_2, B_3. Отряд милиции может также выбрать один из трех других маршрутов движения A_1, A_2, A_3, выйти наперерез преступникам и задержать их. Таким образом, существует 9 возможных участков встречи отряда милиции и группы преступников. Все они располагаются на разных относительных высотах, которые приведены в таблице:

Маршруты движения	B_1	B_2	B_3
A_1	9	5	6
A_2	1	4	3
A_3	6	3	2

Отряду милиции выгоднее осуществлять перехват на местности с наибольшей высотой, а преступникам легче скрыться на местности с наименьшей высотой. Определить, какой маршрут для отряда милиции оптимален.

Решение. Найдем верхнюю и нижнюю цену игры. Для этого в каждой строке найдем минимальное значение, из которых затем выберем максимальное. Получим верхнюю цену игры $\alpha = \max\left\{5{,}1{,}2\right\} = 5$. Теперь выберем в каждом столбце максимальное значение, из которых затем выберем минимальное. Получим нижнюю цену игры $\beta = \min\{9{,}5{,}6\} = 5$. Игра имеет седловой элемент $\alpha = \beta = 5$. Значит, преступники выберут второй маршрут, а отряд милиции должен выбрать первый маршрут.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Работник социальной службы должен посетить трех граждан, проживающих в трех различных домах M_1, M_2, M_3, расположенных на его участке. Маршрут должен начинаться и заканчиваться возле здания районного отделения социальной службы. Расстояния (в метрах) между зданием районного отделения социальной службы и домами M_1, M_2, M_3 приведены в первой строке таблицы. Расстояния между домами приведены в остальных строках таблицы:

	0	1	2	3
0	–	300	700	500
1	300	–	900	200
2	700	900	–	350
3	500	200	350	–

Необходимо найти кратчайший маршрут, начинающийся возле здания районного отделения социальной службы и проходящий через все дома M_1, M_2, M_3.

2. Составить математическую модель задачи линейного программирования:

Магазин оптовой торговли реализует три вида продукции. Для этого используется два ограниченных ресурса:

– полезная площадь помещений, которая составляет 500 $м^2$;

– рабочее время работников магазина, которое составляет 600 $чел.\cdot ч$.

Затраты первого ресурса на реализацию единицы продукции каждого вида составляют 1 $м^2$, 2 $м^2$ и 3 $м^2$ соответственно. Затраты второго ресурса на реализацию единицы продукции каждого вида составляют 3 $чел.\cdot ч$, 2 $чел.\cdot ч$ и 4 $чел.\cdot ч$ соответственно. От реализации единицы продукции 1 предприятие получает 10 тыс. рублей прибыли, реализация единицы продукции 2 дает предприятию 12 тыс. рублей прибыли, а продукции 3 – 14 тыс. рублей прибыли. Требуется рассчитать план реализации продукции, дающий максимальную прибыль.

3. Составить математическую модель задачи линейного программирования и решить ее графическим способом:

Цех выпускает два вида продукции, используя два вида полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, причем на единицу продукции первого вида требуется не более 2-х единиц продукции второго вида. Нормы расхода полуфабрикатов каждого вида на единицу выпускаемой продукции, общие объемы полуфабрикатов и прибыль от единицы каждой продукции представлены в таблице:

Полуфабрикаты	Нормы затрат на единицу продукции		Запас полуфабрикатов
1	4	3	1200
2	2	4	1400
Прибыль	15	20	

Требуется рассчитать план выпуска продукции, дающий максимальную прибыль.

4. Решить задачу линейного программирования графическим способом

а) $f = 2x + 2y \to \max(\min)$, б) $f = 6x + 2y \to \max(\min)$, в) $f = x + y \to \max(\min)$,

$$\begin{cases} 3x - 2y \ge -6; \\ 3x + y \ge 3; \\ x \le 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y \ge 2; \\ x - y \le 0; \\ x \ge \frac{1}{2}, y \le 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y \ge 11; \\ -2x + y \ge 2; \\ x - 3y \le 0. \end{cases}$$

5. Отряду милиции поставлена задача задержать группу преступников. Преступники могут выбрать один из трех маршрутов движения B_1, B_2, B_3. Отряд милиции может также выбрать один из трех других маршрутов движения A_1, A_2, A_3, выйти наперерез преступникам и задержать их. Таким образом, существует 9 возможных участков встречи отряда милиции и группы преступников. Все они располагаются на разных относительных высотах, которые приведены в таблице:

Маршруты движения	B_1	B_2	B_3
A_1	4	1,5	3
A_2	0,5	1	0
A_3	2	1	1,5

Отряду милиции выгоднее осуществлять перехват на местности с наибольшей высотой, а преступникам легче скрыться на местности с наименьшей высотой. Определить, какой маршрут для отряда милиции оптимален.

Рекомендуемая литература

1. *Ахтямов А. М.* Математика для социологов и экономистов: учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

2. *Кузнецов А. В.*, Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: Математическое программирование. – Минск: Выш. шк., 1994. – 286 с.

Тема 4. КОМБИНАТОРИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.1 События

Возникновение или преднамеренное создание определенного комплекса условий, результатом которого является тот или иной исход, называют **опытом, испытанием, экспериментом или процессом**. Исход опыта понимается как **событие**. Будем рассматривать высказывание, описывающее исход опыта, **событием**. Логически истинное высказывание–событие соответствует ***достоверному событию*** (это событие произойдет всегда в данном опыте, т.е. в каждой логической возможности). Обозначают достоверное событие символом Ω. Логически ложное высказывание–событие соответствует ***невозможному событию*** (это событие при выполнении данного комплекса условий никогда не произойдет, т.е. не произойдет ни в одной логической возможности). Обозначают невозможное событие символом $\varnothing$. ***Случайное*** событие при выполнении данного комплекса условий может как произойти, так и не произойти, т.е. исход неоднозначен. Обозначают случайные события, как и высказывания, заглавными латинскими буквами A, B, C, …***Элементарные*** события ω_i – это те события, которые нельзя разложить на составляющие их события. Множество Ω всех возможных элементарных событий в данном опыте называют ***пространством элементарных событий*** Ω. Любое событие A из пространства Ω можно составить из элементарных событий.

Пример. Бросают игральную кость (кубика). Элементарными событиями являются $\omega_1, \omega_2, \omega_1, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ – выпадение на верхней грани соответственно чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Событие A – выпадение нечетного числа – можно представить в виде: $A=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$. Событие $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_1, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ – достоверное. Событие – выпадение числа 7 – невозможное.

События A и B ***несовместны***, если в результате опыта они не могут произойти одновременно, в противном случае – ***совместны***. (Сравните соответствие с несовместными и совместными высказываниями). События A_1, A_2, …, A_n ***попарно несовместны***, если любые два из них несовместны. События A и B ***равновозможны***, если ни одно из них не имеет объективного преимущества появления перед другим. События A_1, A_2, …, A_n образуют ***полную группу***, если в результате опыта может произойти хотя бы одно из них. В частности, если эти события попарно несовместны, то в результате опыта может произойти только одно из них и кроме этих событий ничего не может произойти.

Контрольные задания

1. Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт – бросание двух монет. События A – появление двух гербов, B – появление двух цифр?

b) опыт – автобус отправляется с 12 пассажирами и делает на маршруте пять остановок. Событие C – на первых четырех остановках сошло не более

11 пассажиров, событие F – на последней остановке вышел хотя бы один пассажир.

c) опыт – бросание двух игральных костей. Событие L – хотя бы на одной кости появилось пять очков, событие D – появление четного числа очков на каждой кости.

2. Являются ли равновозможными следующие события:

a) опыт – выстрел по мишени. События A – попадание при выстреле, событие B – промах при выстреле.

b) опыт – бросание двух игральных кубиков. События C – сумма очков на верхних гранях равна 7, D – произведение очков на верхних гранях равно 12.

c) опыт – бросание двух монет. События F – появление двух цифр, D – появление двух гербов, R – появление одной цифры и одного герба.

Если из наступления события A наступает и событие B, то говорят, что **событие *A* *влечет за собой событие B* (*или событие A благоприятствует событию B*)** и это обозначается $A \subset B$, т.е. все элементарные события, входящие в A, входят в событие B (сравните с отношением следования для высказываний $A \Rightarrow B$).

Пример. Бросают игральный кубик. Событие A – выпадение на верхней грани числа 4, влечет за собой событие B – выпадение на верхней грани четного числа.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что ***события A и B равны*** и обозначают $A=B$, т.е. события A и B состоят из одних и тех же элементарных событий (сравните с отношением эквивалентности высказываний $A \Leftrightarrow B$).

Пример. Бросают игральный кубик. Событие A – выпадение на верхней грани числа, кратного трем, – равно событию B – выпадение на верхней грани чисел 3 или 6.

Суммой событий A и B называют событие $C = A + B$, которое означает наступление хотя бы одного из этих событий, т.е. события A или события B. Сумма событий описывается дизъюнкцией высказываний $A \vee B$.

Пример. Стрелок произвел три выстрела по мишени. Событие A_1 – попал при первом выстреле, событие A_2 – попал при втором выстреле, событие A_3 – попал при третьем выстреле. Тогда событие C – «хотя бы одно попадание» – это сумма событий $C = A_1 + A_2 + A_3$.

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в одновременном наступлении событий A и B. Произведение событий описывается конъюнкцией высказываний $A \wedge B$. Для несовместных событий A и B их произведение является невозможным событием, т.е. $A \cdot B = \varnothing$. ***Дополнением к событию A*** или ***отрицанием события A*** (противоположным событию A) называют событие $\overline{A}$, определяемое равенствами: $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = \Omega$. Событие $\overline{A}$ соответствует отрицанию высказывания A. ***Разностью событий A и B*** называется событие $A - B$, состоящее из наступления события A и не наступления события B, характеризующееся условием $A - B = A \cdot \overline{B}$.

Пример. Бросают игральный кубик. Событие A – выпадение на верхней грани четного числа, событие B – выпадение на верхней грани чисел 3 или 6. Событие $A \cdot B$ – это выпадение на верхней грани числа 6; событие А – В – это выпадение на верхней грани чисел 2 или 4; отрицанием события А является событие $\overline{A}$, состоящее в выпадении чисел или 1, или 3, или 5 на верхней грани кубика.

События рассматриваются как подмножества некоторого множества Ω. Операции над событиями представляют как операции над множествами:

– сумме событий $A+B$ эквивалентно объединение $A \cup B$;

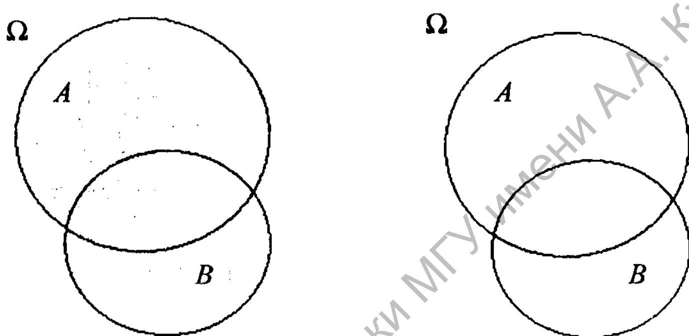
– произведению $A\,B$ событий A и B эквивалентно пересечение $A \cap B$;

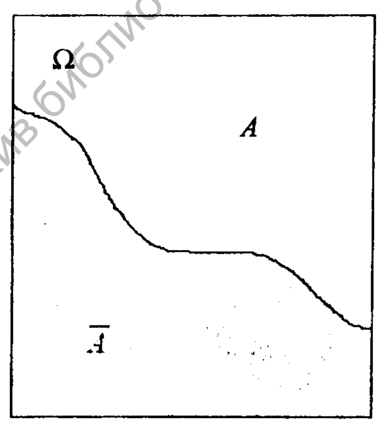
– невозможное событие эквивалентно пустому множеству $\varnothing$;

– достоверное событие эквивалентно объемлющему множеству Ω;

– событие, противоположное событию A, эквивалентно дополнению к событию A во множестве Ω.

Иллюстрация операций над событиями может быть отражена на диаграммах Венна:





Сведем в таблицу соответствие между событиями, высказываниями и множествами истинности:

События	Высказывания, отношения между ними	Множества истинности, отношения между ними
достоверное	логически истинное	Ω
невозможное	логически ложное	$\varnothing$
A благоприятствует B	$A \Rightarrow B$	$A \subset B$
$A+B$	$A \vee B$	$A \cup B$
$A \cdot B$	$A \wedge B$	$A \cap B$
$\overline{A}$	$\overline{A}$	$\overline{A}$
$A-B$	$A \wedge \overline{B}$	$A \cap \overline{B}$
$A=B$	$A \Leftrightarrow B$	$A=B$

В дальнейшем, для простоты, если нет неоднозначности, будем **высказывание, описывающие событие, также называть событием**.

Заметим, что пространство элементарных событий Ω является замкнутым относительно введенных операций сложения и умножения событий, т.е. как сумма событий, противоположное событие, так и произведение событий принадлежат пространству Ω. Говорят, что этим самым введена σ-алгебра подмножеств Ω, называемых событиями, т.е. образована пара (Ω, σ).

АЛГОРИТМ*. Пусть рассматриваются опыт и связанное с ним сложное событие A, тогда A можно выразить через элементарные события:*

а) рассматриваются простейшие элементарные события $A_1, A_2, \dots An$, образующие для данного опыта полную группу;

в) из элементарных событий с помощью операций сложения, умножения и отрицания формируют необходимое, для решения данной задачи, сложное событие.

Пример.

Монета подбрасывается три раза. Элементарные события:

A_1 – выпадение герба при первом бросании; $\overline{A}_1$ – выпадение цифры при первом бросании;

A_2 – выпадение герба при втором бросании; A_2 – выпадение цифры при втором бросании;

A_3 – выпадение герба при третьем бросании; $\overline{A}_3$ – выпадение цифры при третьем бросании;

Выразим через элементарные события и их отрицания следующие события:

а) хотя бы одно выпадение герба: $A = A_1 + A_2 + A_3$;

b) не более одного выпадения герба:

$B = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$;

c) выпадение герба после первого бросания:

$C = \overline{A}_1 \cdot (A_2 \cdot A_3 + \overline{A}_2 \cdot A_3 + A_2 \cdot \overline{A}_3)$.

4.2 Вероятности событий

Под вероятностью события понимается численная мера объективной возможности наступления этого события в данном опыте. Рассмотрим основные подходы к определению вероятности.

Аксиоматическое определение вероятности.

Каждому событию A ставится в соответствие число p – **вероятность события A,** при этом выполняются следующие аксиомы:

1. $P(A) = p \geq 0$, где A – любое событие из пространства событий (Ω, σ) (неотрицательность p);

2. Для несовместных событий A и B

$P(A+B)=P(A) + P(B)$;

3. $P(\Omega) = 1$ (нормированность p).

Для решения теоретических задач добавляется еще аксиома непрерывности.

Тогда тройку (Ω, σ, p) называют ***вероятностным пространством.***

Аксиоматический подход не указывает, как конкретно находить вероятность, поэтому для решения задач целесообразно использовать другие определения вероятности.

Классическое определение вероятности.

Классической схемой, или схемой случаев, называется опыт, при котором число элементарных исходов ***конечно*** и все они ***равновозможны***.

Элементарное событие (исход) ω называется благоприятствующим событию A, если его появление влечет наступление события A. т.е. ω входит в число элементов, составляющих A).

Классической вероятностью события A называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу n всех возможных элементарных событий из этой схемы:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Из определения вероятности следует, что $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$.

Если пространство Ω состоит из n элементарных событий (равновозможных), то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{n}$.

Пример. По следствию должны пройти три человека A, B, C. Какова вероятность того, что в списке этих трех человек, составленном случайным образом B будет сразу следовать за C?

Решение. Количество равновозможных списков из трех человек равно $n = 6$ – это ABC, ACB, BAC, BCA, CBA, CAB. Из них благоприятствующих , где B следует сразу за C, имеется $m = 2$ – это ACB и CBA. Тогда по классическому определению вероятность указанного события $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Заметим, что количество элементарных событий подсчитано путем перебора возможных случаев.

Статистическое определение вероятности.

Пусть при проведении n одинаковых опытов некоторое событие A появилось m раз. Отношение $\frac{m}{n}$ называют ***частостью*** или ***относительной частотой*** события A.

Статистической вероятностью события A называют постоянную величину, вокруг которой колеблются значения частостей при неограниченном возрастании числа n.

Пример. Опыты по подбрасыванию монеты. Появление герба – событие A.

Опыт	Число опытов, n	Появление герба, m	$\frac{m}{n}$
Опыт Бюффона	4040	2048	0,5069
Опыт Керриха	10000	5087	0,5087
Опыт 1 Пирсона	12000	6019	0,5016
Опыт 2 Пирсона	24000	12012	0,5005

Из таблицы видно, что $\frac{m}{n} \to 0{,}5$ при возрастании числа опытов n. Таким образом, статистическая вероятность подсчитывается непосредственно из наблюдений.

Известный бельгийский математик Я. Бернулли (1654–1705) доказал теорему, в которой говорится о статистической устойчивости относительной частоты: при неограниченном увеличении числа опытов, проводимых в неизменных условиях, увеличивается уверенность в приближении относительной частоты $\hat{p} = \frac{m}{n}$ успехов к некоторому постоянному числу p – вероятности успехов. Например, в больших городах отношение родившихся мальчиков к числу всех родившихся детей из года в год чуть больше 0,5.

Статистическая устойчивость относится не только к частости, но и к среднему арифметическому исходов опытов, другим функциям результатов опытов (среднее число ДТП в год в больших городах, средний возраст преступников и т.д.)

Случайные явления, обладающие статистической устойчивостью, и изучает теория вероятностей и математическая статистика.

При рассмотрении *бесконечных* множеств удобно рассматривать геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности.

Геометрической вероятностью события A называют отношение меры $mes\ g$ области событий, благоприятствующих появлению события A, к мере $mes\ G$ всей возможной области событий.

$$P(A)=\frac{mes\ g}{mes\ G}.$$

Пример. На дороге Могилев – Чаусы длиной 45 км произошло дорожно-транспортное происшествие. Найдите вероятность того, что ДТП произошло не далее 15 км от Чаус. Технические характеристики дороги на всем протяжении можно считать одинаковыми.

Решение. Мера области , благоприятствующей событию A – ДТП, равна $mes\ g$ = 15 км, мера возможной области $mes\ G$ = 45 км. По геометрическому определению вероятности $P(A)=\frac{mes\,g}{mes\,G}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

Пример. В квадрат со стороной 30 см вписан круг-мишень радиуса 10 см. Стрелок делает выстрел в квадрат. Какова вероятность, что мишень будет поражена?

Решение. Мера области, благоприятствующей появлению события A, – площадь круга-мишени, mes g = $\pi r^2 = 100\pi$. Мера всей возможной области – площадь квадрата, mes G = $30^2 = 900$. По определению геометрической вероятности $P(A)=\frac{100\pi}{900}\approx 0{,}349$.

4.3 Элементы комбинаторики

Наиболее употребляемой в социологической практике является классическое определение вероятности события.

Числовые значения входящих в формулу m и n не всегда можно определить перебором возможностей. Часто требуется применение правил и формул **комбинаторики** – раздела математики, изучающего количества наборов элементов, взятых из данного множества.

Первые комбинаторные задачи были связаны с азартными играми: картами, костями, «орлянкой». Наиболее любопытные игроки интересовались, например, тем, сколькими способами можно выбросить данное количество очков, бросая две или три кости или сколькими способами можно получить двух тузов при раздаче карт. Основы теоретических положений комбинаторики были разработаны французскими учеными Блезом Паскалем и Пьером Ферма в XVII в. Дальнейшее развитие комбинаторика получила в работах Я. Бернулли, Г. Лейбница и Л. Эйлера. В наше время комбинаторика получила новый толчок для развития в связи с появлением быстродействующих ЭВМ и широким использованием методов дискретной математики. Комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, задач по составлению расписаний, для разработки, кодирования и декодирования шифров, в задачах линейного программирования, статистики, теории информации.

Большинство комбинаторных задач может быть решено с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.

Основные правила комбинаторики

Пусть множество A состоит из n элементов.

Множество, в котором указан порядок следования элементов, называется *упорядоченным*. Например, множества (m, n, p) и (m, p, n) – различные упорядоченные множества.

Правило суммы

Если из множества А элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, элемент a_2 можно выбрать другими n_2 способами, то выбор одного из элементов a_1 или a_2 можно осуществить $n_1 + n_2$ способами.

При использовании правила суммы необходимо осознавать, что множество объектов a_1 и множество объектов a_2 не должно иметь общей части, в противном случае из суммы $n_1 + n_2$ нужно вычесть величину способов выбора общей части этих множеств из a_1 и a_2.

Пример.

Лидер на рынке кетчупа решил расширить продуктовую линию новыми видами кетчупов с добавлением майонезных соусов и другими пищевыми добавками. Известно, что только 5 видов майонезных соусов и 3 пищевые добавки улучшили вкус кетчупа. Сколько всего существует новых видов кетчупа?

Решение.

Так как способы создания новых видов кетчупа различны, то мы можем воспользоваться правилом суммы. Тогда количество способов создания видов кетчупа добавлением майонезного соуса **или** пищевых добавок, т.е. количество

Правило умножения

Если из множества А элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после этого элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, то одновременный выбор элементов a_1 и a_2 указанном порядке можно осуществить $n_1 \; n_2$ способами.

Пример. В группе 25 студентов. Сколько существует способов выбрать старосту группы и его заместителя?

Решение. Сначала выберем старосту. Число способов выбора равно 25, так как каждый студент может быть выбран старостой. После этого остается 24 студента, из которых может быть выбран заместитель старосты. По правилу произведения количество способов выбора пары студентов равно $25 \cdot 24 = 600$.

Правило произведения можно обобщить на случай более чем двух множеств.

Пример. Пусть в коробке лежат 9 красных, 7 зеленых и 12 желтых карандашей. Сколько можно осуществить наборов карандашей «красный, зеленый, желтый» в указанном порядке?

Решение. Число наборов совпадает с числом выборов одного красного карандаша из 9, другого зеленого из 7 и третьего желтого из 12. Поэтому число указанных наборов равно $9 \cdot 7 \cdot 12 = 756$.

различных способов получения новых видов кетчупа, будет равно 5+3=8.

Правило суммы распространяется и на большее количество объектов.

Пример. Пусть в коробке лежат 9 красных, 7 зеленых и 12 желтых карандашей. Выбор одного карандаша (красного, или зеленого, или желтого) можно сделать 28 способами

$(9 + 7 + 12 = 28)$

Пример. Для запирания некоторых автоматических камер хранения, кейсов применяют цифровые кодовые замки, которые отпираются при наборе заданной комбинации цифр. Замок состоит из 4 дисков, на каждом из которых нанесены все цифры. Сколько времени необходимо злоумышленнику для перебора всех комбинаций замка, если на одну комбинацию он тратит 2 секунды.

Решение. При кодировании и открывании замка каждую цифру можно выбрать 10 способами, поскольку цифры могут повторяться. Всего цифр – 4, причем в комбинации важен порядок расположения цифр. Значит, по правилу произведения общее число комбинаций равно $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$. Таким образом, для перебора всех комбинаций необходимо потратить $2 \cdot 10000 = 20000$ секунд или 5 часов 33 минуты и 20 секунд непрерывной работы. Заметим, что найденное время необходимо для перебора всех комбинаций. Но нужная комбинация может вовсе и не быть последней.

Размещения без повторений

Пусть множество A состоит из n различных элементов.

Размещением из n элементов по k элементов называется каждое упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, взятых из множества A, где $k \le n$.

Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k (читается: «A из n по k) и подсчитывается по формуле:

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-(k-1)).$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается

Размещения с повторениями

Если при выборе k элементов из n элементы возвращаются обратно и при выборе упорядочиваются, то говорят, что это ***размещения с повторениями.*** Число размещений с повторениями из n по k:

$$\overline{A}_n^k = n^k, \text{ где } k \ge 0.$$

При подсчете строк 2^k в таблице истинности высказываний n=2 (значения «истина» и «ложь»), k- количество простых высказываний, составляющих данное сложное высказывание.

$n!$ («n («эн») **факториал**»), т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. При этом условно считается $0!=1$.

Тогда $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Пример. Множество A состоит из трех элементов – цифр 2, 5 и 9. Сколько можно составить двузначных чисел из этих цифр?

Количество двузначных чисел, составленных из этих цифр, совпадает с числом размещений из трех элементов по два. Числа 25, 29, 59, 52, 92, 95 соответствуют размещениям (2,5), (2,9), (5,9), (5.2), (9,2), (9,5). Число всех размещений равно $6=3 \cdot 2=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1}=A_3^2$

Пример. Абонент забыл последние две цифры номера телефона. Сколько существует способов набора этих двух цифр?

Множество A состоит из десяти элементов – цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Двузначные числа могут содержать повторяющиеся цифры, причем порядок разных цифр дает разные числа, поэтому здесь имеет место размещения с повторениями из десяти элементов по два элемента. Их количество равно $\overline{A}_{10}^2 = 10^2 = 100$.

Перестановки без повторения

Размещение из n элементов по n называется ***перестановкой из n элементов***. Число всех таких перестановок обозначается $\mathbf{P_n}$ и вычисляется по формуле:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Пример. При составлении анкеты необходимо включить четыре вопроса. Сколькими способами можно составить анкету?

Количество способов равно количеству перестановок из четырех элементов:

$$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

Перестановки с повторениями

Пусть множество из n элементов можно разбить на m упорядоченных частей (m подмножеств или m групп), из которых первая содержит k_1 элементов, вторая – k_2 элементов и т.д., m-ая - k_m элементов ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$). Число таких способов разбиения (***перестановок с повторе-ниями***) обозначается

$$\overline{P_n}(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

Пример. Сколько слов можно составить из букв слова «статистика»?

В слове «статистика» 10 букв, однако различных букв 5:

«с» повторяется $k_1 = 2$ раза;
«т» повторяется $k_2 = 3$ раза;
«а» повторяется $k_3 = 2$ раза;
«и» повторяется $k_4 = 2$ раза;
«к» повторяется $k_5 = 1$ раз.
$k_1 + k_2 + \ldots + k_5 = 10$.

Поэтому имеем перестановки с повторениями:

$$\overline{P}_{10}(2,3,2,2,1) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!} = 75600.$$

Сочетания без повторений

Сочетанием из n элементов по k элементов называется каждое неупорядоченное подмножество, состоящее из k элементов ($k \le n$). Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k («С («цэ») из n по k») и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Справедливо свойство: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Пример. Из 5 вопросов предлагается выбрать 2 (порядок следования вопросов не важен). Сколько можно составить таких комбинаций?

Решение. Если пронумеровать вопросы, то неупорядоченные наборы могут быть следующими: (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5), поскольку набор, например, (2,3) не отличается от набора (3,2). Всего таких комбинаций будет

$$C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10.$$

Сочетания с повторениями

Если при выборе k элементов из n элементы возвращаются обратно и при выборе не упорядочиваются, то говорят, что это ***сочетание с повторениями***. Число сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^k$ из n элементов по k определяется по формуле C_{n+k-1}^k, т.е.

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}, \text{ где } k \ge 0.$$

Пример. Инвестор формирует пакет из ценных бумаг. Он может вложить свои деньги в акции трех различных фирм. Сколькими способами он может составить пакет из 5 акций?

Решение. Имеются акции $n = 3$ фирм, надо составить набор из $k = 5$ акций, где важен только состав, а не порядок следования в пакете. Поэтому имеем сочетания с повторениями:

$$\overline{C}_3^5 = C_{3+5-1} = \frac{(3+5-1)!}{5!\cdot(3-1)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21.$$

4.4 Условные вероятности, теорема умножения вероятностей

Наступление некоторого события может значительно менять вероятность наступления другого события. Если произошло событие B, то новая вероятность события A называется ***условной вероятностью*** и обозначается $P_B(A)$ или $P(A|B)$, *говорят: «вероятность события A при условии B».*

При этом событие B является достоверным и играет роль пространства элементарных событий Ω.

При $P(B) > 0$ ***условная вероятность*** $P(A|B)$ определяется формулой

$$P(A|B) = \frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

Пример. В отделе из 5 штатных сотрудников проходят практику 3 курсанта (один выпускник-дипломник и два третьекурсника). Необходимо составить график дежурств из трех человек, причем обязательно присутствие хотя бы одного штатного работника. Какова вероятность того, что в список попадет курсант-дипломник, при условии, что в этот список попали два штатных работника?

Решение. Всего количество списков по 3 человека, в котором обязательно присутствие хотя бы одного штатного работника, $C_5^1 \cdot C^2_{(5-1)+3} = 5 \cdot \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 5 \cdot 21 = 105.$

В состав события A входят все списки из трех человек, состоящие из курсанта-выпускника, а также двух штатных работников или одного штатного работника и курсанта-третьекурсника. Всего таких наборов $1 \cdot (C_5^2 + C_5^1 \cdot C_2^1) = \frac{5!}{2!\cdot 3!} + 5 \cdot 2 = 20.$ $P(A) = \frac{20}{105}.$

В состав события B входят только те списки, в которые вошли два штатных работника, а также один курсант-выпускник или курсант-третьекурсник. Таких наборов $C_5^2 \cdot (1 + C_2^1) = \frac{5!}{2!\cdot 3!}(1+2) = 30.$ $P(B) = \frac{30}{105}.$

В состав события $A\cdot B$ входят списки, состоящие из курсанта-дипломника и двух штатных работников. Количество таких наборов $1 \cdot C_5^2 = 10$.

$$P(A\cdot B) = \frac{10}{105}.\ P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{105}}{\frac{30}{105}} = \frac{1}{3}.$$

Действительно, согласно определения в состав события B входят 30 списков, но только 10 из них входят в событие A. По формуле классической вероятности $P(A|B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$

Из определения формулы условной вероятности следует, что

$$P(A\cdot B) = P(B)\cdot P(A\,|\,B), \text{ где } P(B) > 0,$$

и в симметричной форме

$$P(B\cdot A) = P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(A\,|\,B), \text{ где } P(A) > 0 .$$

Независимыми называются такие события A и B, что

$$\cdot P(A\,|\,B) = P(A).$$

Теорема умножения вероятностей:

Если события A и B ***независимы***, то $P(A\cdot B) = P(A)\cdot p(B)$.

Последнее соотношение часто служит определением независимости событий, т.е. события называются ***независимыми***, если вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно независимы и имеют одинаковые вероятности появления ($P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$, $P(\overline{A}_i) = q$), то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q^n.$$

АЛГОРИТМ.

1. Составить формулу, выражающую событие, вероятность которого необходимо определить, через элементарные события.

2. Применить теоремы сложения и умножения вероятностей. Предполагается, что все события в рамках каждой теоремы, принадлежат одному пространству элементарных событий.

Пример. Вероятность успешной сдачи экзамена первым студентом составляет 0,7, а вторым 0,8. Каждый из студентов может пересдать один экзамен, если он его первый раз не сдал. Какова вероятность того, что экзамен сдаст только один студент.

Решение. A_1 – первый студент успешно сдал экзамен (с первого раза). $P(A_1) = 0{,}7$.

$\overline{A}_1$ – (с первого раза) первый студент не сдал экзамен. $P(\overline{A}_1) = 0{,}3$.

A – первый студент успешно сдал экзамен со второй попытки, т.е. он не сдал экзамен в первый раз и сдал успешно экзамен во второй раз, значит, $A = \overline{A}_1 \cdot A_1$, $P(A) = P(\overline{A}_1 \cdot A_1) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$.

B – первый студент успешно сдал один экзамен (с первой **или** со второй попытки), значит, $B = A_1 + A$. $P(B) = P(A_1 + A) = P(A_1) + P(A) = 0{,}7 + 0{,}21 = 0{,}91$.

B_0 – первый студент не сдал экзамен с первой попытки **и** не сдал экзамен со второй попытки, значит, $B_0 = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_1$, $P(B_0) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_1) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$.

C_1 – второй студент успешно сдал экзамен (с первого раза). $P(C_1) = 0{,}8$.

$\overline{C}_1$ – (с первого раза) второй студент не сдал экзамен. $P(\overline{C}_1) = 0{,}2$.

D – второй студент успешно сдал экзамен со второй попытки, т.е. в первый раз он экзамен не сдал и успешно сдал его во второй раз, значит, $D = \overline{C}_1 \cdot C_1$, $P(D) = P(\overline{C}_1 \cdot C_1) = P(\overline{C}_1) \cdot P(C_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$.

F – второй студент успешно сдал экзамен один экзамен (с первой попытки **или** со второй попытки), значит, $F = C_1 + D$, $P(F) = P(C_1 + D) = P(C_1) + P(D) = 0{,}8 + 0{,}16 = 0{,}96$.

F_0 – второй студент не сдал экзамен с двух попыток, т.е. $F_0 = \overline{C}_1 \cdot \overline{C}_1$. $P(F_0) = P(\overline{C}_1 \cdot \overline{C}_1) = P(\overline{C}_1) \cdot P(\overline{C}_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$.

Интересующее по условию задачи событие E – успешно сдал экзамен только один из двух студентов при условии двух попыток, значит, $E = B_0 \cdot F + B \cdot F_0$.

$P(E) = P(B_0 \cdot F + B \cdot F_0) = P(B_0 \cdot F) + P(B \cdot F_0) = P(B_0) \cdot P(F) + P(B) \cdot P(F_0) = 0{,}09 \cdot 0{,}96 + 0{,}91 \cdot 0{,}04 = 0{,}1228$.

Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть события H_1, $H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместны и образуют ***полную группу событий***, т.е. их сумма является достоверным событием:

$H_i \cdot H_j = \varnothing$, при $i \neq j$ и $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$.

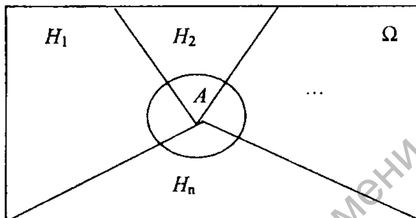
Такие события называются ***гипотезами.***

По теореме сложения вероятностей справедлива формула

$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$.

Простейшим примером полной группы событий является произвольное событие A и его отрицание $\overline{A}$.

Полную группу событий можно проиллюстрировать диаграммой:



Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда любое событие A можно представить в виде:

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A.$$

По теореме сложения вероятностей имеем

$P(A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \ldots + P(H_n \cdot A)$, а по теореме умножения вероятностей получим

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$ –

формула полной вероятности, или в виде

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

В формулу полной вероятности входят вероятности $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, которые называются априорными. Если событие A наступило, то эти вероятности изменяются. Это будут теперь условные вероятности $P(H_1|A)$, $P(H_2|A), \ldots, P(H_n|A)$. Они могут быть найдены по ***формуле Байеса***:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)P(H_k)}.$$

АЛГОРИТМ.

1. По условию задачи определяют, что некоторое событие A может наступить только при одновременном наступлении одного из попарно независимых событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу.

2. По имеющимся данным определяют вероятности $P(H_i)$, $P(A|H_i)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Применяются формулы полной вероятности, Байеса.

Пример. В социологической группе три студента. Вероятность того, что составление анкеты будет успешно выполнено, для первого студента равна 0,9; для второго равна 0,7, а для третьего – 0,8. В группу поступило задание составить анкету, разрабатывать которую равновероятно для каждого студента.

а) Найдите вероятность того, что анкета будет составлена;

б) Анкета составлена. Найдите вероятность, что анкету составил первый студент.

Решение. Обозначим гипотезы: H_1 – анкету составил первый студент, H_2 – анкету составил второй студент, H_3 – анкету составил третий студент. Эти гипотезы равновероятны, попарно несовместны, образуют полную группу.

$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Событие A – анкета составлена. $P(A|H_1) = 0,9$; $P(A|H_2) = 0,7$; $P(H_3)=0,8$.

а) По формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3) = \frac{1}{3}\cdot 0,9 + \frac{1}{3}\cdot 0,7 + \frac{1}{3}\cdot 0,8 = 0,8.$$

б) По формуле Байеса находим вероятность того, что анкету составил первый студент

$$P(H_1|\,A) = \frac{P(H_1)P(A\,|\,H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0,9}{0,8} = 0,375.$$

4.5 Повторение испытаний

Формула Бернулли

Несколько испытаний называются ***независимыми*** относительно события A, если вероятность события А в каждом из них не зависит от исходов других испытаний.

Как связаны независимость n испытаний и независимость событий, которые могут произойти в результате этих испытаний?

Пусть проводятся n независимых испытаний , в каждом из которых событие A (успех) может наступить с одинаковой вероятностью p, т.е. вероятность события A не изменяется от того, какие события произойдут в остальных испытаниях.(*схема Бернулли*) Практически событие A может появиться в n независимых испытаниях любое число $k \le n$ раз в разных последовательностях или комбинациях, чередуясь с противоположным событием $\overline{A}$. Таким образом, из независимости n испытаний относительно события A следует независимость в совокупности группы n событий, представляющей собой произвольную комбинацию событий A и $\overline{A}$, одно из которых обязательно произойдет в каждом из рассматриваемых испытаний. Если в результате n испытаний событие A произошло m раз (неважно, в каком порядке), то это означает, что в совокупности наступили m событий A и n-m событий $\overline{A}$, вероятности которых в каждом отдельном опыте равны p и $q=1-p$ соответственно. Все n событий независимы, поэтому по теореме умножения, вероятность появления m раз события A в определенной последовательности равна $p^m \cdot q^{n-m}$. Поскольку событие A может появиться m раз в n опытах в совершенно другой последовательности и число таких последовательностей равно числу сочетаний из n по m, т.е. C_n^m, то вероятность появления события A точно m раз в n независимых испытаниях равна (***формула Бернулли***)

$$P_n(m) = C_n^m\, p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Часто применяемые формулы в схеме Бернулли:

Вероятность наступления события A:

- *менее m раз в n испытаниях*

$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1)$;

- *более m раз в n испытаниях*

$P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n)$;

- *не менее m раз в n испытаниях*

$P(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n)$;

- *не более m раз в n испытаниях*

$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m)$;

- *хотя бы один раз в n испытаниях*

$1 - P_n(0)$,

- *после k неудач*

$P_{k+1}(1) = pq^k$.

Наивероятнейшее число m_0 наступивших событий в схеме Бернулли определяется из следующего неравенства $np - q \le m_0 \le np + p$, которое получено решением системы неравенств $\begin{cases} P_n(m_0) \ge P_n(m_0-1), \\ P_n(m_0) \ge P_n(m_0+1). \end{cases}$

АЛГОРИТМ.

1. Проверить, выполняется ли в условии задачи схема Бернулли.

2. Определить вероятность p события A (вероятность успеха) и вероятность неудачи $q=1-p=P(\overline{A})$.

3. При заданных n – числе независимых испытаний и m – количестве наступления события A, воспользоваться одной из формул.

Пример. Респондент проходит тестированный опрос. Тест состоит из пяти вопросов. На каждый даны три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность, что методом угадывания респонденту удастся выбрать, по крайней мере, четыре правильных ответа?

Решение. Испытание – ответ на один вопрос. Всего испытаний пять. Событие A – выбор наугад правильного ответа на вопрос. Вероятность события A в каждом испытании одинакова и равна $P(A) = p = \frac{1}{3}$. Событие B – выбор, по крайней мере, четырех правильных ответов, т.е. четыре правильных ответа в любом порядке или все пять правильных ответа. По теореме сложения вероятностей и формуле Бернулли

$$P(C) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 p^4 q^1 + C_5^5 p^5 q^0 =$$

$$C_5^1 p^4 q^1 + C_5^0 p5 q^0 = \frac{5!}{1!4!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot 1=\frac{11}{3^5}=0{,}045.$$

Примечание. При расчёте по формуле Бернулли возникают трудности, связанные с нахождением чисел C_n^m. Когда число опытов не слишком велико, например, не более двадцати, число сочетаний можно находить с помощью треугольника Паскаля, шесть первых строк которого представлены в качестве примера.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Единица, размещенная в нулевой строке этого треугольника, соответствует числу C_0^0. В следующей его строке записаны числа C_1^0 и C_1^1, далее – величины C_2^0, C_2^1, C_2^2 и т.д. Пользуясь треугольником Паскаля, найдём числа

$$P_5(4) + P_5(5) = 5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot 1=\frac{11}{3^5}=0{,}045.$$

Для случаев, когда n или m достаточно велики, используют приближенные вычисления по соответствующим формулам.

4.6 Случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики.

Основным объектом, изучаемым математической статистикой, является **случайная величина (СВ)**. Случайная величина является основным объектом изучения и для эмпирической социологии. В качестве типичного для социолога случайного события является выбор того или иного респондента. Случайными величинами (одномерными) могут служить признаки, определенные для этих респондентов. Например, признак – возраст. Переходя от одного респондента к другому (от события к событию, в частности, перебирая анкеты), фиксируются разные значения возраста (15 лет, 40 лет, …), т.е. разные значения СВ.

СВ может быть многомерной, когда ей отвечает несколько признаков, а ее значениями являются не отдельные числа, а набор чисел – значений рассматриваемых признаков. Например, наряду с возрастом рассматривают пол (0 – мужчина, 1 – женщина), образование (0 – высшее, 1 – среднее специальное, 2 – среднее), зарплату (в у.е.), тогда в качестве значений указанной четырехмерной СВ могут выступать четверки чисел: (18, 0, 2, 386), (38, 1, 0, 520) и т.д.

Числовая переменная X, для которой известно множество значений $\{x_1, x_2, ..., x_i, ...\}$, но неизвестно, какое именно значение примет событие в результате данного опыта, называют случайной величиной X (одномерной) (кратко, СВ X).

Если значения СВ X можно пронумеровать, пусть даже до бесконечности, то случайную величину X называют **дискретной (ДСВ X)**.

Если значения случайной величины X – любое число некоторого или некоторых числовых промежутков, то случайную величину называют **непрерывной** (НСВ X). Например, измеряется рост призывников. Рост может быть любым значением числового промежутка (1,4 м; 2,3 м), поэтому рост – непрерывная случайная величина. Однако, если рост измерять с погрешностью до 0,5 см (например, 176 см, 176,5 см, 177 см …), то рост – дискретная величина.

Для каждого набора значений СВ должна быть определена вероятность того, что, обследуя респондентов (в определенных, могущих повторяться неограниченное число раз, условиях) социолог встретит значение этого набора. Только условие задания вероятности встречаемости значений определяет рассматриваемую СВ. **Совокупность** вероятностей встречаемости значений этой СВ X называют **законом распределения, вероятностным распределением** (точнее функцией плотности распределения вероятностей $p(x)$) этой случайной величины X. Задать СВ и означает задать ее значения и соответствующее вероятностное распределение. ***Заметим, что вероятность исследователь никогда не наблюдает, это результат мышления.***

Пример 1. При трех бросаниях игрального кубика пятерка может появиться 0, 1, 2 или 3 раза. Числовая переменная X, для которой известно множество значений $\{x_1, x_2, ..., x_i, ...\}$, но неизвестно, какое именно значение примет событие в результате данного опыта, называют случайной величиной X (кратко, СВ X). В приведенном примере X=0, или X=1, или X=2, или X=3. Заметим, что эти значения можно пронумеровать: №№ 1,2,3,4.

Дискретная случайная величина (ДСВ X) задается таблицей (**ряд распределения или закон распределения**), где указаны все значения СВ X в возрастающем порядке (значения СВ X ранжированы) и соответствующие вероятности появления этих значений.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Контроль: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Для приведенного выше примера 1 выполняется схема Бернулли. Вероятность выпадения «пятерки» при каждом из трех независимых бросков кубика (n=3) равна $p=\frac{1}{6}, q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

$$P(X=0)=C_3^0\cdot(\frac{1}{6})^0\cdot(\frac{5}{6})^3=\frac{125}{216};$$

$$P(X=1)=C_3^1\cdot(\frac{1}{6})\cdot(\frac{5}{6})^2=3\cdot\frac{25}{216}=\frac{75}{16};$$

$$P(X=2)=C_3^2\cdot(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})=3\cdot\frac{5}{216}=\frac{15}{216};$$

$$P(X=3)=C_3^3\cdot(\frac{1}{6})^3\cdot(\frac{5}{6})^0=\frac{1}{216};$$

$$\frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}=1.$$

Ряд распределения случайной величины X – количество выпадений «пятерки» при трех бросаниях игрального кубика – имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	125/216	75/216	15/216	1/216

Обобщим этот пример. Проводится n независимых испытаний (n может принимать как конечное, так и бесконечное значение). В каждом испытании успех появляется с вероятностью p. СВ X – число x успехов в n испытаниях. Составим таблицу возможных значений СВ X и соответствующих вероятностей по формуле Бернулли.

x_i	0	1	…	m	…	n
p_i	$C_n^0 p^0(1-p)^n$	$C_n^1 p\ (1-p)^{n-1}$	…	$C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$	…	$C_n^n p^n(1-p)^0$

Сумма всех вероятностей равна 1, как вероятность логически истинного высказывания: «в n испытаниях успех может появиться 0 или 1 или 2 или … n раз». Эта таблица носит название **биномиального закона распределения**.

Среднее значение дискретной случайной величины X (или **математическое ожидание** MX) подсчитывают по формуле:

$$MX=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Характеристикой среднего значения служат и ***мода*** x_{mo} *(значение случайной величины X, соответствующей наибольшему значению вероятности) и* ***медиана*** x_{me} *(значений случайной величины, удовлетворяющей условию* $P(x<x_{me})=P(x>x_{me})=0{,}5$.

Для биномиального закона распределения $MX=np$.

Характеристикой разброса значений случайной величины X вокруг математического ожидания MX служит дисперсия (рассеяние) (DX) случайной величины X. Дисперсия дискретной случайной величины X подсчитывается по любой из формул:

$$DX=\sum_{i=1}^{n}(x_i-MX)^2 p_i=(x_1-MX)^2 p_1+(x_2-MX)^2 p_2+...+(x_n-MX)^2 p_n;$$

$$DX=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\cdot p_i-(MX)^2=x_1^2 p_1+x_2^2 p_2+...+x_n^2 p_n-(MX)^2.$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma_X=\sqrt{DX}$ (σ читается «сигма») имеет ту же размерность, что и случайная величина X.

Среднеквадратическое отклонение, как и дисперсия, являются мерой рассеяния СВ X вокруг среднего значения (математического ожидания MX).

Для биномиального закона распределения $DX=np(1-p)=npq$; $\sigma_X=\sqrt{npq}$.

Пример 2. Среди 120 уголовных дел района 80% составляют кражи. Каково среднее значение краж? Каков разброс числа краж около этого среднего?

Решение. $n=120$; $p=0,8$; $q=1-p=1-0,8=0,2$; $MX=np=120\cdot0,8=96$.

$DX=npq=120\cdot0,8\cdot0,2=19,2$; $\sigma_X=\sqrt{npq}=\sqrt{19,2}=4,38$.

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико, а вероятность успеха p очень мала ($p\le0,1$) и $npq<10$, то вероятность СВ X для $X=m$ рассчитывают по формуле Пуассона

$$P(X=m)\approx\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda=np$, $e\approx2,7$ – основание натурального логарифма, неперово число (шотландский лорд Джон Непер (1550–1617) открыл логарифмы).

Таблица СВ X – числа успехов m в n испытаниях

x_i	0	1	...	m	...
p_i	$P(X=0)\approx\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}$	$P(X=1)\approx\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	...	$P(X=m)\approx\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

называется **законом Пуассона** или **законом редких событий.** Сумма всех вероятностей равна 1, даже в случае бесконечного числа испытаний.

$$MX=DX=\lambda=np.$$

Пример 3. Среди 120 уголовных дел района убийства составляют 5%. Каково среднее значение числа убийств? Каков разброс таких дел вокруг среднего?

Решение. $n=120$; $p=0,05$ – мало. Используем закон редких событий:
$MX=DX=np=120\cdot0,05=6$.

Число успехов m_0 (в схеме Бернулли), соответствующее наибольшей вероятности, называется **наивероятнейшим числом успехов**.

Для биномиального закона распределения целое число m_0 определяется из неравенства $np-(1-p)\le m_0\le np+p$, для закона Пуассона $\lambda-1\le m_0\le\lambda$.

Для примера 2 наивероятнейшее число краж $96-0{,}2 \le m_0 \le 96+0{,}8; m_0 = 96$.
Для примера 3 наивероятнейшее число убийств $6-1 \le m_0 \le 6$, $m_0 = 5$ *или* $m_0 = 6$.

Если в схеме Бернулли рассматривают число m успехов в некотором промежутке времени t, то вероятность этого числа событий подсчитывается по формуле $P_t(m) = \dfrac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!}$. При этом выполняются следующие условия (условия **простейшего потока**):

✓ В рассматриваемом промежутке времени одновременное наступление двух и более успехов практически невозможно;

✓ Среднее число успехов в единицу времени равно λ, которое называется интенсивностью потока однородных событий;

✓ На вероятность появления любого числа событий (успехов) в любой промежуток времени не влияют ни моменты времени их появления вне данного промежутка времени, ни число самих событий.

Для простейшего потока среднее значение $MX = \lambda t$, а вероятность на промежутке $t_1 < t < t_2$ рассчитывают по формуле $P(t_1 < t < t_2) = e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}$.

Пример. В установившейся на протяжении суток обстановке на автодорогах в районе происходит в среднем 4 дорожно-транспортных происшествий (ДТП). Определите среднее число ДТП, проходящих от 12^{00} до 18^{00}. Какова вероятность совершения ДТП в этот промежуток времени? Каково наивероятнейшее число ДТП в это время и какова соответствующая вероятность?

Решение. $\lambda = 4$; $MX = 4 \cdot \dfrac{(18-12)}{24} = 1$ – среднее число ДТП в указанном промежутке времени (18-12=6 часов).

Вероятность совершения ДТП в этот промежуток времени равна
$P\left(\dfrac{12}{24} \langle t \langle \dfrac{18}{24}\right) = e^{-4(12/24)} - e^{-4(18/24)} = e^{-2} - e^{-3} = 1/e^2 - 1/e^3 = 0{,}1353 - 0{,}049 = 0{,}0855.$

Наивероятнейшее число ДТП m_0 вычислим по формуле $\lambda t - 1 \le m_0 \le \lambda t$.

$4 \cdot \dfrac{6}{24} - 1 \le m_0 \le 4 \cdot \dfrac{6}{24}$, $0 \le m_0 \le 1$. Соответствующая вероятность

$$P(X=0) = \frac{(4 \cdot \frac{6}{24})^0 e^{-4(6/24)}}{0!} = e^{-1} = 0{,}368;$$

$$P(X=1) = \frac{(4 \cdot \frac{6}{24})^1 e^{-4(6/24)}}{1!} = e^{-1} = 0{,}368.$$

Ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i; p_i), называется ***многоугольником распределения вероятностей.***

Ряд распределения, как и многоугольник распределения, полностью характеризует случайную величину и является одним из способов задания закона распределения.

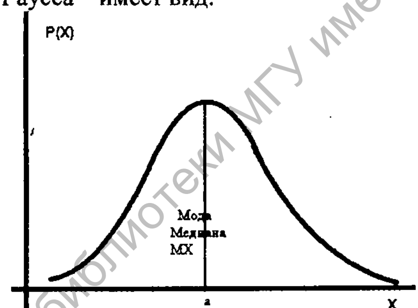
Заметим, что вероятности ряда распределения являются значениями функции $p(x)$, а аргумент x принимает значения случайной величины X.

Таким образом, **функция $p(x)$ полностью задает случайную величину X,** определяет **закон распределения случайной величины X.** Эта функция позволяет найти вероятность попадания случайной величины в любой числовой промежуток.

Для **непрерывных** случайных величин выделяют нормальный закон распределения (или закон распределения Гаусса), где вероятность попадания в малый интервал $(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$ с центром в точке x и сколь угодно малом $\varepsilon \geq 0$ описывается формулой

$$P(x-\varepsilon < X < x+\varepsilon) \approx \varepsilon \cdot p(x),$$

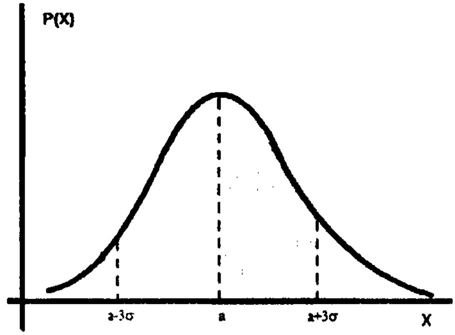
где $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ – функция плотности распределения вероятностей (закон распределения нормальной случайной величины) нормальной СВ X. Ее график – кривая Гаусса – имеет вид:



При MX = $a = 0$ и $\sigma = 1$ значения функции $p(x) = \varphi(x)$ (малая функция Лапласа) табулированы (имеются таблицы) для $0 \leq x \leq 5$, а для $x>5$ полагают $p(x) = 0$. В частности, если малый интервал имеет вид (MX-ε; MX+ε), где сколь угодно малое $\varepsilon >0$, то вероятность попадания в этот промежуток, симметричный математическому ожиданию, подсчитывается по формуле $P(|X-MX| < \varepsilon) \approx \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$ – значения большой функции Лапласа (нечетной) $\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-x^2/2}dx$ табулированы для $0 \leq u \leq 5$. При $u>5$ $\Phi(u) \approx 1$. Например,

u	1,96	2,17	2,33	2,58	3,5
$\varphi(u)$	0,0584	0,0379	0,0264	0,0143	0,0009
$\Phi(u)$	0,9500	0,97	0,9802	0,9901	0,9995

При $\varepsilon = 3\sigma$ получим $\varepsilon = P(|X-MX| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0{,}9973 \approx 1$. Это означает, что практически событие $\{|X-MX| < 3\sigma\}$ является достоверным **(правило трех сигм)**. Площадь всей области под графиком функции $y = p(x)$ до оси Ох равна 1, а площадь заштрихованной области 0,9973.



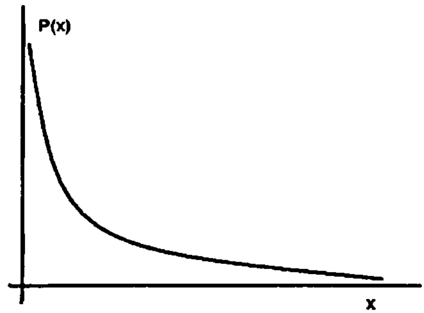
Если на случайную величину X действует доминирующий фактор (например, время ожидания автобуса, если тот подчиняется графику движения; погрешность измерительного прибора и т.д.), то используют **равномерный закон распределения,** задаваемый для непрерывной случайной величины X

функцией плотности распределения вероятностей $p(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin (a;b); \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ если } x \in (a;b). \end{cases}$

График плотности равномерного распределения изображен на рисунке.

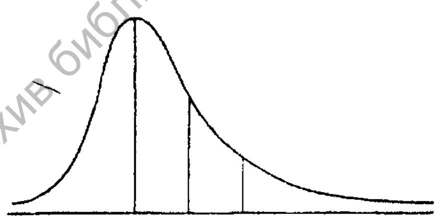
Математическое ожидание и дисперсия вычисляются, соответственно, по формулам $MX = \dfrac{a+b}{2}$, $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, а вероятность попадания в интервал (α,β) равна $P(\alpha < X < \beta) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

Для непрерывной случайной величины аналогом закона редких событий (закон Пуассона для дискретной случайной величины) является **экспоненциальный закон распределения** (или показательный закон распределения), который задается плотностью вероятности $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, где λ – постоянная положительная величина. Числовые характеристики показательного распределения: $MX = \dfrac{1}{\lambda}$, $DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$. Вероятность попадания в интервал (α,β) равна $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$. График плотности экспоненциального распределения имеет вид:

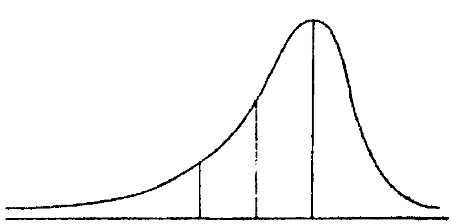


Особенностью экспоненциального распределения является равенство числовых значений математического ожидания MX и среднеквадратического отклонения σ.

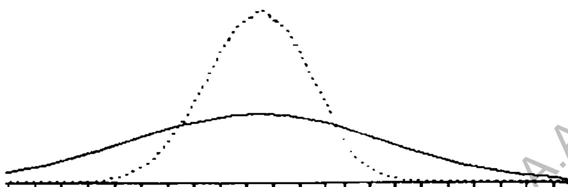
Для характеристики влияния на среднюю величину отклонений X-MX служит коэффициент **асимметрии** A, который вычисляется по формуле $A = \frac{(x - MX)^3}{\sigma^3}$. Нормальной распределение имеет A=0. Знак коэффициента асимметрии указывает вытянутость правого или левого участка кривой распределения. Если асимметрия положительна, то длинная часть кривой распределения расположена справа от моды:



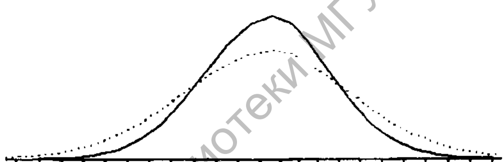
Если асимметрия отрицательна, то длинная часть кривой распределения расположена слева от моды:



Характеристикой островершинности распределения служит эксцесс E, который вычисляется по формуле $E = \frac{(x - MX)^4}{\sigma^4} - 3$. Если эксцесс отрицательный, то кривая этого распределения имеет более низкую и плоскую вершину, чем нормальная кривая:



Если эксцесс положительный, то кривая распределения имеет более высокую и острую вершину, чем нормальная кривая:



Существуют и другие законы распределения случайных величин, с которыми можно познакомиться, например, в [3, с. 72, 145, 149]. Здесь представим еще некоторые законы распределения, используемые в математической статистике.

Используемые в математической статистике распределения, связанные с нормальным распределением.

Распределение χ^2 (хи-квадрат) (распределение К. Пирсона)

Это распределение было создано немецким геодезистом и математиком Ф. Хельмертом в 1876 г., а в 1900 г. получило название χ^2 (хи-квадрат) в работе английского математика, биолога, философа К. Пирсона.

Пусть независимые случайные величины $u_1, u_2, \ldots, u_k$ имеют стандартное нормальное распределение: $u_i \sim N(0,1), i = \overline{1, \ldots k}$. Распределение $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} u_i^2$ называют ***распределением хи-квадрат*** с k степенями свободы, а сама величина χ^2 – случайной величиной хи-квадрат с k степенями свободы. Обозначают $\chi^2(k)$. Параметр k. Значения квантилей табулированы.

Замечание. Число степеней свободы определяют как разность между числом суммируемых случайных величин и числом линейных связей, ограничивающих свободу изменения этих величин (в нашем случае слагаемые независимы и их количество равно k).

Если СВ $\chi^2(k_1)$ и $\chi^2(k_2)$ *независимы, то их сумма имеет хи-квадрат распределение с числом степеней свободы* k_1+k_2.

Для этой случайной величины составлены разнообразные таблицы. Чаще всего используются таблицы **квантилей** χ^2-распределения – $\chi^2_{\alpha,k}$, отвечающим заданному уровню значимости α , - это такое значение $\chi^2=\chi^2_{\alpha,k}$, при котором $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}) = \alpha$.

$M(\chi^2)=k$, $D(\chi^2(k))= 2k$. $M(\chi^2)=k$, $D(\chi^2(k))= 2k$, $x_{mo}=k-2$ *(для* $k\geq 2$*).*

Замечание. Подчеркнем, что для каждого значения k степеней свободы существует *свое* распределение χ^2, поэтому следует обращать внимание на таблицы, соответствующие заданному числу степеней свободы. Важность понятия числа степеней свободы имеет смысл и для других распределений.

Распределение Стьюдента (*t*-распределение)

Ученик Пирсона английский математик и статистик У. Госсет (1876–1937 гг.) печатался под псевдонимом Стьюдент.

Пусть даны независимые случайные величины $U\in N(0,1)$ и $\chi^2(k)$. Распределение случайной величины $t(k)=\dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{\chi^2(k)}{k}}}$ ***(дробь Стьюдента)*** называется ***распределением Стьюдента (t(k) -распределением)*** с k степенями свободы. Параметр k. Значения квантилей табулированы. Графики функции плотности распределения $t(k)$- кривые Стьюдента симметричны относительно оси ординат.

В соответствующей таблице приведены значения квантилей распределения Стьюдента $t_{\frac{\alpha}{2},k}$ в зависимости от числа степеней свободы k и вероятности $\alpha/2$. Значения квантилей распределения Стьюдента $t_{\frac{\alpha}{2},k}$ найдены из уравнения $P(t > t_{\frac{\alpha}{2},k}) = \int\limits_{t_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} p(t)dt = \dfrac{\alpha}{2}$.

$M(t(k))=0$, $D(t(k))= \dfrac{k}{k-2}, k>2$. *При* $k=1$ *или* $k=2$ *соответствующего распределения Стьюдента не существует.*

Замечание. Будем считать, что при $k>30$ вместо распределения Стьюдента используют стандартное нормальное распределение.

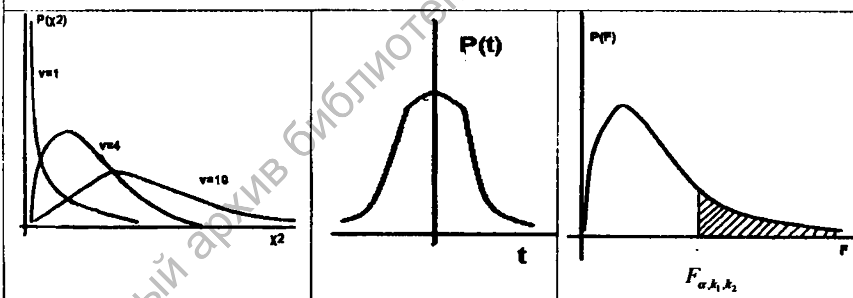
Распределение Фишера-Снедекора (*F*-распределение, распределение дисперсионного отношения)

Р.А. Фишер (1890–1962 гг.) – английский статистик и генетик. Дж. Снедекор (1881–1974 гг.) – американский математик и статистик, был учеником Р. Фишера. Существует мнение, что он открыл в 1924 г. F-распределение и назвал его в честь своего учителя.

Пусть даны независимые случайные величины $\chi^2(k_1)$ и $\chi^2(k_2)$, имеющие хи-квадрат распределение соответственно с k_1 и k_2 степенями свободы. Распределение случайной величины $F(k_1,k_2)=\dfrac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}$ называют ***распределением Фишера или F(k₁,k₂) -распределением*** с k_1 и k_2 степенями свободы. Заметим, что $F(k_1,k_2)\geq 0$. Параметры k_1 и k_2.

$M(F(k_1, k_2)) = k_2/(k_2-2)$ *для* $k_2>2$, $D(F(k_1, k_2)) = (2k_2^2(k_1+k_2-2))/(k_1(k_2-2)^2(k_2-4))$ *для* $k_2>4$.

В соответствующей таблице приведены значения квантилей F-распределения – F_{α,k_1,k_2}, в зависимости от числа степеней свободы k_1, k_2. Значения квантилей найдены из решения уравнения $P(F > F_{\alpha,k_1,k_2}) = \int_{F_{\alpha,k_1,k_2}}^{\infty} p(F)dF = \alpha$.



Предельные теоремы

Статистические закономерности отчетливо выражаются при достаточно большом числе испытаний. Эти закономерности описываются предельными теоремами.

Предельные теоремы устанавливают зависимость между случайностью и необходимостью, поскольку конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате большой массы подобных явлений, а числовые характеристики наблюдаемых в испытаниях случайных величин при неограниченном увеличении числа испытаний становятся практически неслучайными. По смыслу предельные теоремы можно разбить на две группы, одна из которых называется ***законом больших чисел*** (это обобщенное название нескольких теорем, из которых следует, что при неограниченном увеличении числа испытаний и выполнении определенных условий проявляется статистическая устойчивость, например, средние величины стремятся к некоторым постоянным, или **сумма большого числа независимых случайных величин X_i стремится к сумме их математических ожиданий MX_i** (теорема русского математика Чебышева, 1887 г.), а другая – ***центральной предельной теоремой*** (устанавливает связь между законом распределения суммы случайных величин и его предельной формой – нормальным законом распределения, когда на случайную величину действует большое число факторов, среди которых нет доминирующего (в формулировке русского математика Ляпунова, 1908 г.)). В другой формулировке, вероятность попадания средней арифметической $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$ независимых случайных величин X_i в промежуток $(\alpha; \beta)$ может быть вычислена приближенно по формуле: $P(\alpha < \overline{X} < \beta) \approx \frac{1}{2}\Phi(\frac{\beta - MX}{\sigma/\sqrt{n}}) - \frac{1}{2}\Phi(\frac{\alpha - MX}{\sigma/\sqrt{n}})$.

Откуда $P(|\overline{X} - MX| < \varepsilon) \approx \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}})$.

Так при определении статистической вероятности было замечено, что для малых количествах n наблюдений относительная частота $\frac{m}{n}$ (фактические данные по наблюдениям) может существенно отличаться от теоретической вероятности p, а при большом числе наблюдений она становится близкой к теоретической ($P(|\frac{m}{n} - p| \le \varepsilon) \approx \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ – теорема Бернулли).

Если в схеме Бернулли (проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A – «успех» происходит с одной и той же вероятностью p) число испытаний неограниченно увеличивается, то биномиальный закон распределения СВ X – количество «успехов» в n испытаниях приближается к нормальному закону распределения. Это позволяет найти приближенное значение вероятности «успехов».

Если число n независимых испытаний достаточно велико ($npq \ge 10$), а вероятность появления события A в каждом из них равна p и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна (***локальная формула Муавра-Лапласа***):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$,

а $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – малая функция Лапласа, описывающая стандартное нормальное распределение $N(0,1)$, значения которой находятся по соответствующим таблицам. (При $x \geq 5, \varphi(x) \to 0$, поэтому $\varphi(x)$ табулирована для $0 \leq x \leq 5$).

Если число n независимых испытаний достаточно велико (npq<10), вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, близка к нулю ($p \leq 0{,}1$), а произведение $n\,p = \lambda$ – const, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равно (***формула Пуассона***)

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = p(m),\ m=0,\ 1,\ldots,n.$$

Значения функции $p(m)$ можно найти в таблицах распределения Пуассона.

Пример. На тренировке стрелок выполнил 400 выстрелов в цель. Найдите вероятность 325 попаданий в цель, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.

Решение. $npq = 400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 64 > 10$, $p = 0{,}8 > 0{,}1$, поэтому применяем локальную формулу Муавра-Лапласа (1.20).

$$P_{400}(325) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\varphi\left(\frac{325 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = \frac{1}{8}\varphi(0{,}625) \approx 0{,}125 \cdot 0{,}3271 \approx 0{,}041.$$

Пример. Студент купил 500 билетов лотереи. Вероятность выигрыша одного билета составляет 0, 002. Найдите вероятность того, что выигрышными окажутся:

а) три билета,

б) один билет,

в) не более трех билетов.

Решение. $npq = 500 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}998 = 0{,}998 < 10$, p=0, 002<0,1, поэтому применяем формулу Пуассона (1.21), где $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

а) при $m = 3$: $P_{500}(3) \approx \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}061$,

б) при $m = 1$: $P_{500}(1) \approx \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}366$,

в) при $0 \leq m \leq 3$: $P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3) =$

$$= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} + \frac{1}{6e} = \frac{16}{6e} = \frac{8}{3e} \approx 0{,}976.$$

Интегральная формула Муавра-Лапласа:

Если в схеме Бернулли число m появления события A находится в заданном промежутке $a \leq m \leq b$, а n достаточно велико, то вероятность

$$P(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (или интеграл вероятности), нечетная, значения которой находят по таблицам (при $x \geq 5, \Phi(x) \to 1$, поэтому значения функции представлены в виде таблицы для $0 \leq x \leq 5$.)

Как следствием может служить формула вероятности для относительной частоты:

$$P\left(\frac{m_1}{n} \le \frac{m}{n} \le \frac{m_2}{n}\right) \approx \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Пример. Известно, что в учреждении бытового обслуживания 80% специалистов имеют среднее специальное образование. Найдите вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек среднее специальное образование имеют от 65 до 90 человек?

Решение. По условию задачи $n = 100$, $a = 65$, $в = 90$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$.

Используем интегральную формулу Муавра-Лапласа

$$P(65 \le m \le 90) \approx \Phi\left(\frac{90 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{65 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-3{,}75) =$$

$$\Phi(2{,}5) + \Phi(3{,}75) \approx 0{,}4938 + 0{,}49991 = 0{,}99371.$$

Пример: Отдел контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. С вероятностью 0,9544 найдите границы, в которых будет заключено число стандартных деталей.

Решение. Из условия задачи следует, что выполняется схема Бернулли: $n = 900$, $p = 0{,}9$, $q=0{,}1$. По условию $P(|m-np| \le \varepsilon)=0{,}9544$, откуда $np - \varepsilon \le m \le np + \varepsilon$, где m – число стандартных деталей.

Для большого числа испытаний из теоремы Бернулли

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$ следует, что $$P(|m - np| \le \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

По этой формуле имеем $P(|m - np| \le \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)=0{,}9544$. Из таблиц значений большой функции Лапласа $\Phi(x)$ найдем значение аргумента: $\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}=2$.

Тогда $\varepsilon = 2 \cdot \sqrt{900\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1} = 9$, откуда $900\cdot 0{,}9 - 9 \le m \le 900\cdot 0{,}9 + 9$ или $801 \le m \le 819$.

Предельные теоремы, в частности, обосновывают положение, что чем больше будет изучено случайных явлений (дорожно-транспортных происшествий, преступлений, гражданских исков и т.д.) в процессе решения юридических задач (криминологических, социально-правовых и т.д.), тем точнее будут выявлены закономерности и возможности прогнозирования. Например, исследуя закономерности роста преступности в 1990 г. по сравнению с 1960 годом, было установлено, что зарегистрированная преступность выросла в США в 7,2 раза, в Великобритании – в 6,1 раза, во Франции – более чем в 5 раз, в СССР – в 3,7 раза, в ФРГ – в 2,8, в Японии – в 1,5 раза. За тридцать лет в разных странах преступность не изменялась строго линейно (т.е. по прямой), она колебалась, но основная закономерность – рост преступности, обгоняющий рост народонаселения, прослеживался отчетливо.

Вопросы:

1. Всякая ли таблица значений случайной величины и их соответствующих вероятностей задает закон распределения этой случайной величины?
2. Назовите виды распределений дискретной случайной величины.
3. Какими параметрами характеризуется биномиальное распределение?
4. Как вычисляются числовые характеристики случайной величины, имеющей биномиальное распределение?
5. Каким параметром определяется распределение Пуассона?
6. Какой смысл имеет параметр λ в пуассоновском распределении?
7. При каких условиях используется закон Пуассона?
8. Какие виды распределений непрерывной случайной величины Вы знаете?
9. Какой смысл имеют параметры нормального распределения? Как влияют эти параметры на форму графика плотности его распределения?
10. Когда используется равномерное распределение?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Фирма использует различные методы оценки при подборе новых работников, в том числе тесты на математическую грамотность и логику речи. По прошлому опыту известно, что 60% кандидатов проходят успешно тест на математическую грамотность и 80% – тест на логику речи. Приняв допущение, что прохождение одного теста не влияет на результат прохождения второго теста, составить ряд распределения случайной величины X – числа успешного прохождения двух тестов, если фирма приняла двух работников.

2. Известно, что 30% управленцев-стажеров в клинике не прошли двухгодичного обучения. Если оба стажера приступят к обучению в один и тот же день, то составьте ряд распределения случайной величины X – числа стажеров, окончивших курс обучения.

3. Вероятность безотказной работы каждого из четырех автоматов в течение определенного времени равна 0,9. Составьте закон распределения случайной величины X – числа автоматов, работавших без поломок. Постройте многоугольник распределения вероятностей.

4. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии равна 0,2, на втором – 0,35, на третьем – 0,15. Составьте ряд распределения случайной величины X – числа предприятий, на которых акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды.

5. Имеется 7 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих пробах не участвует. Постройте многоугольник распределения.

Рекомендуемая литература

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1997. – 479 с.: ил.

2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов. – 4-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 400 с.: ил.

3. *Горелова Г.В.*, Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: учебное пособие для вузов. – 2-е издание исправленное и дополненное. – Ростов н/Д: Феникс, 2002. – 400 с.: ил.

4. *Калинина В.Н.*, Панкин В.Ф. Математическая статистика: учеб. для студ. сред. спец. учеб. заведений. – 3-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2001. – 336 с.: ил.

5. *Колемаев В.А.*, Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2003

6. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001.

7. *Толстова Ю.* Социология и математика. – М.: Научный мир, 2003

Тема 5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Понятие статистики имеет два значения:

- как набор количественных данных об определенных свойствах объектов некоторого множества (количество зарегистрированных финансовых нарушений за год; соотнесенный с доходами уровень благосостояния населения и т.д.)
- как основанные на анализе статистических данных с помощью теории вероятностей методы исследования, позволяющие получить научные и практические выводы (по среднему доходу населения можно изучать динамику изменения уровня жизни определенных групп населения и т.д.)

По содержательному наполнению статистических данных различают экономическую, финансовую, юридическую, статистику в социологии и другие статистики.

Фундаментальной же основой юридической статистики служит теория вероятности и математическая статистика.

5.1 Генеральная совокупность и выборка

При обработке статистического материала используется специальная терминология. Если в теории вероятности изучение СВ X ведется по ее воображаемым значениям, т.е. теоретически, то в математической статистике СВ X исследуется по наблюдаемым значениям (вариантам), т.е. эмпирически.

Для получения статистических данных необходимо провести обследование соответствующих объектов. Если их количество велико, то приходится для обследования отбирать только часть, т.е. проводить выборочное обследование. Обследование объектов всей совокупности иногда на практике не имеет смысла, т.к. в результате обследования они разрушаются. Иногда реально существующую совокупность объектов для обследования можно мысленно дополнить любым количеством таких же однородных объектов, чтобы наблюдаемые значения случайной величины можно было бы мысленно продолжать в неизменных условиях как угодно долго (например, совокупность звонков, поступивших в справочное бюро за неделю отпускного периода можно дополнить гипотетической совокупностью в следующих неделях этого периода). Неизменность условий означает неизменность только тех всех условий, которые можно проконтролировать при проведении наблюдений. Прочие неконтролируемые условия изменяются, что приводит к случайности результатов наблюдений

Исследуемую случайную величину по наблюдениям будем называть ***генеральной совокупностью.*** Число объектов (наблюдений) N генеральной совокупности называют ***объемом генеральной совокупности.***

*Заметим, что **генеральная совокупность** объектов данного вида и **соответствующая совокупность значений случайной величины $X(\omega)$ не различаются**, хотя понятие генеральной совокупности шире понятия случайной величины, т.к. любое значение случайной величины может быть результатом нескольких наблюдений. При этом не следует смешивать понятие генеральной совокупности с реально существующими совокупностями (например, поступившая на склад из цеха продукция является реально существующей совокупностью, которую нельзя назвать генеральной, т.к. выпуск этой продукции можно мысленно продолжить сколь угодно долго).*

Генеральная совокупность бывает:

- *конечная и реально существующая, например, такую совокупность образуют жители г. Могилева в фиксированный момент времени;*
- *бесконечная и реально существующая, например, такую совокупность образует множество действительных чисел из интервала* (0; 1);
- *воображаемая (гипотетическая) конечная или бесконечная. Например, совокупность всех мысленно возможных выпущенных, выпускаемых теперь и в будущем на одном оборудовании (в одинаковых условиях) изделий образует бесконечную генеральную совокупность.*

Часть отобранных объектов из генеральной совокупности или результаты наблюдений над ограниченным числом объектов из этой совокупности называется ***выборочной совокупностью (статистическими данными)*** или ***выборкой***. Число объектов (наблюдений) n выборочной совокупности называют ***объемом выборки***. Полагают, что N значительно больше n, т.е. $N>>n$.

*При изучении случайной величины X рассматриваются функции, которые характеризуют эту случайную величину. Такие функции от конкретной выборки называют **статистиками (выборочными статистиками). В теоретических исследованиях статистику рассматривают как функцию случайной выборки, чтобы статистика стала случайной величиной и ее распределение позволяло бы сделать вывод о распределении самой исследуемой случайной величины.***

Суть выборочного метода в математической статистике и состоит в том, что по выборке судят о свойствах генеральной совокупности в целом. Для этого выборочная совокупность должна быть ***репрезентативной (представительной)***, что обеспечивается объемом выборки и случайностью отбора из генеральной совокупности ее элементов, каждый из которых имеет одинаковую вероятность попадания в выборку.

Различают пять основных типов выборок:

1. *Собственно случайная*: *повторная* (после выбора элементы возвращаются обратно), *бесповторная* (выбранные элементы не возвращаются).

И для выборки с возвратом, и для выборки без возврата вероятность того, что объект попадет в выборку, не изменяется при переходе от одного испытания к другому, т.е. с вероятностной точки зрения условия испытаний не изменяются. Однако если в выборке с возвратом испытания независимы, то в выборке без возврата испытания зависимы (например, для урновой схемы условная вероятность не совпадает с безусловной). Условие независимости является одним из основных используемых в теоремах теории вероятности, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что имеет место случайная выборка с возвратом, и при этом иметь в виду, что выражение «случайная выборка с возвратом» равносильно выражению «испытания независимы и проведены в одинаковых условиях».

2. *Типическая*, когда генеральная совокупность предварительно разбивается на группы типических элементов, и выборка осуществляется из каждой: *равномерные выборки* (при равенстве объемов групп выбирают одинаковое количество элементов из каждой); *пропорциональные* (численность выборки формируется пропорционально численностям или средним квадратическим отклонениям групп генеральной совокупности); *комбинированные* (численность выборок пропорциональна и средним квадратическим отклонениям, и численностям групп генеральной совокупности).

3. *Механическая*, когда отбор элементов осуществляется через определенный интервал;

4. *Серийная*, когда отбор производится не по одному элементу, а сериями для проведения сплошного обследования;

5. *Комбинированная*, когда используются различные комбинации вышеуказанных методов.

После получения выборочной совокупности объектов все эти объекты обследуют по отношению к определенной случайной величине (или случайному событию), и в результате этого получают наблюдаемые данные, которые обрабатываются.

Важно выборку сделать правильно. От этого зависит, насколько достоверными будут полученные выводы и результаты прогноза для интересующего нас признака генеральной совокупности.

5.2 Вариационный ряд

Пусть случайная величина X описывает некоторый признак генеральной совокупности. Из генеральной совокупности осуществлена выборка $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ объема n. Элементы этой выборки представляют собой значения случайной величины X. Эти значения упорядочивают по возрастанию, что называется ***ранжированием*** выборки. Различные значения x_i называют ***вариантами***. Число m_i повторов в выборке варианты x_i называют ***частотой*** этого ***варианта***. ***Частостью, относительной частотой*** или ***долей*** варианта называют число $\hat{p}_i = \omega_i = \frac{m_i}{n}$.

Частоты и частости называются ***весами***. Зафиксируем некоторое число x. Количество m_x вариант, значения которых меньше x, называют ***накопленной частотой***:

$$m_x = \sum_{x_i<x} m_i \ .$$

Накопленной частостью называют отношение накопленной частоты к объему выборки:

$$w_x = \frac{m_x}{n} = \frac{1}{n}\sum_{x_i<x} m_i \ .$$

Заметим, что предел частости при неограниченном увеличении объема выборки является статистической вероятностью. Естественно считать частость w_i выборочным аналогом (вычисленной по выборочным данным) вероятности p_i появления значения x_i случайной величины X.

Вариационным (статистическим) рядом называют таблицу, состоящую из ранжированных в порядке возрастания значений вариант и соответствующих им весов. Вариационные ряды бывают дискретными и интервальными.

Дискретным называют вариационный ряд, представляющий выборку значений дискретной случайной величины.

x_i	-2	0	1	3
m_i	8	10	7	5
m_i / n	8/30	10/30	7/30	5/30

Интервальным (непрерывным) называют ряд, представляющий выборку значений непрерывной случайной величины.

Нецелесообразно также построение дискретного ряда для дискретной случайной величины, число возможных значений которой велико. В подобных случаях строят интервальный (вариационный) ряд распределения.

Для построения интервального вариационного ряда множество значений вариант разбивают на полуинтервалы $[a_i, a_{i+1})$, т.е. производят группировку. Количество интервалов k рекомендуется вычислять по формуле Стерджесса:

$$k = 1+3.322 \lg n = 1+1.4 \ln n.$$

Длину интервала, равную $h = \frac{R}{k}$, где число $R = x_{max} - x_{min}$, называют ***размахом варьирования.*** Подсчитывают число значений m_i (частоты), попавших в полуинтервал $[a_i, a_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Контроль: $\sum_i m_i = n$.

Если окажется, что h дробное число, то за длину частичного интервала берут либо ближайшее целое число, либо ближайшую простую дробь. За начало первого интервала рекомендуется брать величину $a_1 = x_{min} - 0{,}5h$. Конец последнего интервала a_{k+1} должен удовлетворять условию $a_{k+1} - h \leq x_{max} < a_{k+1}$.

Составляют интервальный вариационный ряд:

$[a_i, a_{i+1})$	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$	...	$[a_k, a_{k+1})$
m_i	m_1	m_2	...	m_k

или

$[a_i, a_{i+1})$	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$	...	$[a_k, a_{k+1})$
m_i / n	m_1 / n	m_2 / n	...	m_k / n

Контроль: $\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = 1$.

Иногда интервальный вариационный ряд для простоты исследований условно заменяют дискретным (и, наоборот, при большом числе наблюдений). В этом случае серединное значение i-го интервала принимают за вариант x_i с соответствующей частотой m_i.

Ломаная, соединяющая точки (x_i, m_{xi}), где m_x – накопленные частоты, а x_i – значения вариант для дискретного ряда, или середины интервалов для интервального вариационного ряда, называется ***кумулятой (кумулятивной кривой).***

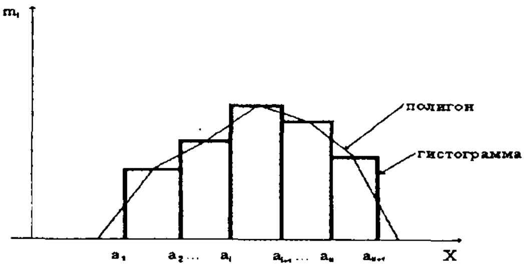
Для предположения закона распределения генеральной совокупности вариационные ряды графически изображают и с помощью ***полигона*** или ***гистограммы***.

Полигон частот (частостей) представляет собой ломаную, соединяющую точки плоскости с координатами (x_i, m_i) (или $(x_i, m_i/n)$) для дискретного статистического ряда, а для интервального вариационного ряда

$x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ – середина полуинтервала $[a_i, a_{i+1})$.

Полигон частостей, построенный по дискретному вариационному ряду дискретной случайной величины, называют ***многоугольником распределения частостей*** *– это выборочный аналог многоугольника распределения вероятностей. Полигон для интервального вариационного ряда дает первоначальное представление о графике функции плотности распределения вероятностей p(x).*

Гистограмма частот (частостей) изображает только интервальный статистический ряд, имеет вид ступенчатой фигуры из прямоугольников с основаниями, равными длине интервалов h, и высотами, равными частотам (частостям) интервалов. (Более строго, в качестве высот берут плотность частот $\frac{m_i}{h}$ (плотность частостей $\frac{m_i}{nh}$), чтобы площадь этой фигуры была равна n (1, как и под графиком плотности распределения вероятности)). Вид же гистограммы будет тот же.)



Пример 1. По количеству дорожных правонарушений отделом ГАИ было проверено 10 организаций с одинаковым числом транспортных средств в каждой организации. Число зафиксированных ДТП в организациях приведено в таблице:

Номер организации	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество ДТП (x_i)	3	2	1	3	0	2	2	1	4	2

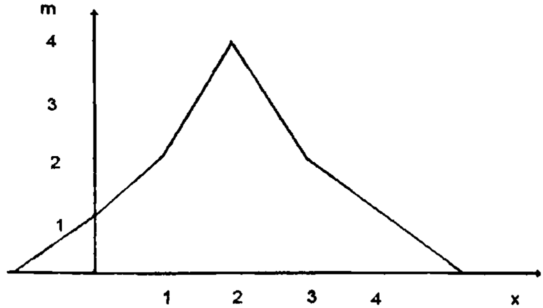
Составьте статистический ряд распределения частостей наблюдаемых значений дискретной случайной величины X – числа ДТП в организациях. Постройте полигон, кумулянту.

Решение. Проранжируем исходный ряд (несгруппированные данные) по возрастанию вариант, подсчитаем частоту и частость вариант(сгруппируем данные):случайная величина принимает значения 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4.

В результате получим дискретный вариационный ряд:

Количество ДТП (x_i)	Количество организаций, m_i	Относительная частота, частость, m_i/n
0	1	0,1
1	2	0,2
2	4	0,4
3	2	0,2
4	1	0,1
$\sum$	10	1

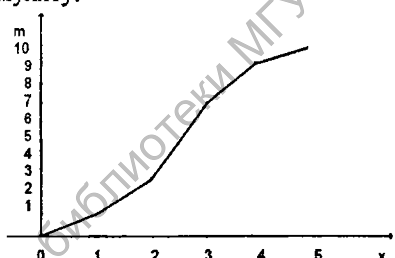
График полигона имеет следующий вид:



По данным дискретного вариационного ряда находим накопленные частоты и частости:

x_i	0	1	2	3	4	5
m_{xi}	0	1	3	7	9	10
m_{xi}/n	0	0.1	0.3	0.7	0.9	1

Изображаем кумуляту:



Пример 2. Для определения средней суммы вкладов в банке бесповторной выборкой произведено обследование 60 вкладов (в условных единицах):

6, 15, 11, 12, 9, 9, 6, 10, 8, 8, 11, 7, 6, 9, 4, 10, 10, 7, 11, 7, 5, 7, 8, 5, 12, 8, 7, 10, 8, 10, 8, 11, 7, 7 ,9 ,5, 6, 7, 10, 7, 8, 8, 7, 5, 10, 8, 9, 15, 6, 7, 10, 11, 7, 10, 9, 14, 13, 11, 12, 11.

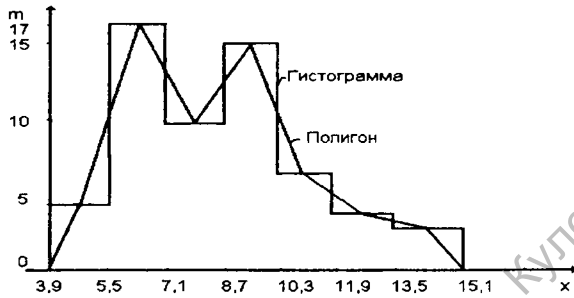
Постройте интервальный вариационный ряд, гистограмму, полигон частот, кумуляту.

Решение. По статистическим данным определяем $x_{max}=15$; $x_{min}=4$. Разобьем множество значений выборки на интервалы. Число интервалов по формуле Стерджесса равно $k \approx 1+1.4\ln 60 = 6.907$; *Примем* $k = 7$.

Длина частичного интервала $h \approx \frac{x_{max}-x_{min}}{k} = \frac{15-4}{7} \approx 1{,}6$. Выберем первый интервал так, чтобы в нем содержался вариант x_{min}, а последний седьмой интервал содержал x_{max}. Например, $a_1=3{,}9$, $a_7=13{,}5$. Подсчитывая число вариант, попадающих в каждый интервал, получим вариационный ряд частот:

$[a_i, a_{i+1})$	[3,9; 5,5)	[5,5; 7,1)	[7,1; 8,7)	[8,7; 10,3)	[10,3; 11,9)	[11,9; 13,5)	[13,5; 15,1)
m_i	5	17	9	15	7	4	3

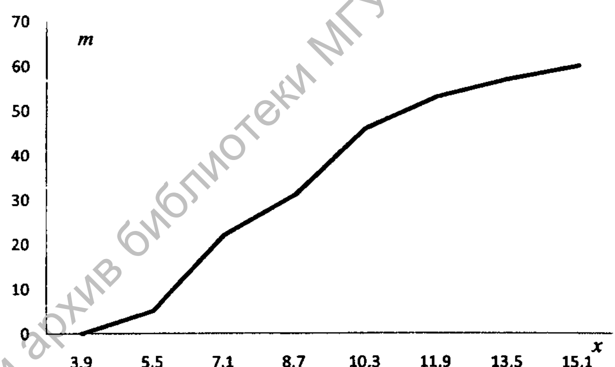
Контроль: 5+17+9+15+7+4+3=60.



Для построения кумуляты вычислим накопленные относительные частоты:

a_i	3,9	5,5	7,1	8,7	10,3	11,9	13,5	15,1
m_{xi}	0	5	22	31	46	53	57	60

Изображаем кумуляту:



5.3 Точечная и интервальная оценки

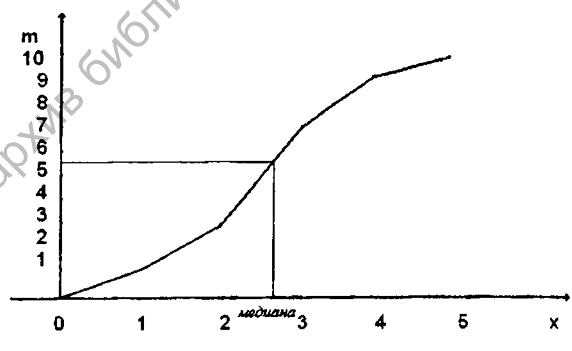
Вероятность присуща случайной величине генеральной совокупности. Вместо вероятности исследователь обычно имеет дело с ее выборочной оценкой – относительной частотой (частостью) встречаемости признака. Чтобы было возможным использование аппарата математической статистики, необходимо частотные выборочные распределения (статистические ряды) расценивать как выборочные представления генеральных распределений вероятностей. Каждое такое распределение ассоциируется со случайной величиной.

Таким образом, поскольку исследователь изначально имеет дело лишь с частотами, а не с соответствующими вероятностями, то фактически исходные случайные величины предстают перед ним в приближенном виде, т.е. на основе выборочных данных рассчитываются не сами параметры распределений, а лишь их выборочные оценки (статистики, выборочные числовые характеристики). И вид закона распределения, найденного по выборке, вообще говоря, будет отличаться от вида его для генеральной совокупности, поэтому важна оценка подобного различия.

Числовые характеристики (*статистические характеристики или оценки*) вариационных рядов являются аналогами числовых характеристик распределения теории вероятностей:

- характеристики положения середины – средняя арифметическая выборки (выборочная средняя) $\frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)=\bar{x}_{выб}$, мода (значение наблюдения с наибольшей частотой), медиана (значение варианты $\frac{n+1}{2}$-го номера наблюдения в вариационном ряду);

Для вышеприведенного примера 1 определим характеристики положения середины: $\bar{x}=(0\cdot1+1\cdot2+2\cdot4+3\cdot2+4\cdot1)/10=2$; мода $x_{mo}=2$ (соответствует наибольшей частоте $m_3=4$); медиана x_{me} соответствует $\frac{10+1}{2}=5{,}5$ наблюдению, по графику кумуляты находим значение абсциссы x_{me} по соответствующей ординате 5,5:



$x_{me}=2{,}6$.

- характеристики разброса признака вокруг середины (характеристика разброса попавших в выборку чисел около выборочной средней) – выборочная дисперсия $\hat{D}X=s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2m_i$ для $n>30$, а для $n<30$ $\hat{D}X=s^2_{исправленное}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2m_i$; выборочное среднее квадратическое отклонение $\hat{\sigma}=s$; коэффициент вариации $v=\frac{s}{\bar{x}}\cdot100\%$; размах вариации $R=x_{max}-x_{min}$;

Для вышеприведенного примера 1 выборочная дисперсия $s^2=(0^2\cdot 1+1^2\cdot 2+2^2\cdot 4+3^2\cdot 2+4^2\cdot 1)/(10-1)=5{,}8$; выборочное среднеквадратическое отклонение $s=2{,}4$.

- и др.

Найденные с помощью выборки среднеарифметическое $\bar{x}$ и выборочная дисперсия s^2 при больших объемах n выборки близка к гипотетическим величинам – среднему арифметическому $\bar{X}$ генеральной средней (или математическому ожиданию МХ) и дисперсии DX, которые могли бы быть получены при обработке всей генеральной совокупности.

Действительно, предполагаемый по изображению вариационного ряда закон распределения генеральной совокупности (СВ X) $p(x,\Theta)$ становится определенным, если известен параметр Θ этого распределения. По имеющейся выборке можно лишь дать оценку $\hat{\Theta}$, приблизительное значение этого параметра, как функцию вариант, т.е. $\hat{\Theta}=\hat{\Theta}_n=u(x_1,x_2,...,x_n)$. Поскольку значение функции изображается точкой на числовой прямой, то эту оценку называют ***точечной оценкой***.

Выборочную совокупность можно интерпретировать двояко:

- либо как конкретные числа $x_1, x_2,..., x_n$, и тогда все оценки (выборочные характеристики) – это тоже числа;
- либо обозначение случайных величин X_1, X_2, ..., X_n (распределенных так же как и исходная генеральная совокупность СВ X) и тех чисел, которые могли бы попасть в выборку; предвидеть же набор чисел в выборке заранее нельзя, поэтому значения оценок, как выборочных характеристик, случайные величины, и они, как и любая случайная величина, имеют математическое ожидание и дисперсию.

В частности, если интерпретировать выборочное среднее как случайную величину, его дисперсия $D\bar{X}=\dfrac{DX}{n}$, а выборочная оценка этой дисперсии $s_{\bar{X}}^2=\dfrac{s_X^2}{n}$; величину $s_{\bar{X}}=\dfrac{s_X}{n}=\dfrac{s}{n}$ называют ***стандартной ошибкой выборочного среднего.***

Рассмотрим примеры.

Из центральной предельной теоремы теории вероятностей напомним, что $P(|\bar{x}-MX|<\varepsilon)\approx\Phi(\dfrac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}})$ для большого числа наблюдений, где среднее арифметическое наблюдений $\bar{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)=\bar{x}_{выб}$ – выборочная средняя (или средняя выборки $\bar{x}$) известна, а математическое ожидание МХ=a (его называют в статистике генеральным средним $\bar{X}$) неизвестно. Проведем тождественные преобразования выражения $|\bar{x}-MX|<\varepsilon\to\bar{x}-\varepsilon<MX<\bar{x}+\varepsilon$. Тогда вероятность $P(\bar{x}-\dfrac{u\sigma}{\sqrt{n}}<MX<\bar{x}+\dfrac{u\sigma}{\sqrt{n}})\approx\Phi(u)=1-\alpha=\gamma,\ где\ u=\dfrac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}$, а α – уровень значимости (вероятность риска допустить ошибку), γ=1-α – вероятность доверия или надежность результата.

Выборочную среднюю $\bar{x}$ называют **точечной оценкой математического ожидания MX**, а $\varepsilon = \frac{u\sigma}{\sqrt{n}}$ называют **ошибкой выборочного среднего** $\bar{x}$.

Интервал $\bar{x} - \frac{u\sigma}{\sqrt{n}} < MX < \bar{x} + \frac{u\sigma}{\sqrt{n}}$ называют **интервальной оценкой математического ожидания.** При u=1,96 табличное значение Φ(1,96)=0,95. Это значит, что имеем 95%-ую интервальную оценку математического ожидания. Вероятностная ошибка составляет 5%.

Замечание. Если среднеквадратическое отклонение σ неизвестно, то его заменяют выборочным среднеквадратическим отклонением s.

Пример. Статистика числа карманных краж в общественном транспорте в течение года была проведена городским управлением внутренних дел. Оказалось, что среднее число краж в день составило 11. В то же время, среднее число таких краж в августе оказалось 11,2 при среднем квадратическом отклонении s=0,62. Можно ли считать, что данные за август завышены по сравнению с данными за год?

Решение. Следует проверить, что разница между средними несущественна. Определим отклонение средних: Δ=11,2-11=0,2 и сравним с величиной доверительного интервала генеральной средней $\bar{X}$. Для этого вычислим ошибку выборочной средней $\varepsilon = \frac{u\sigma}{\sqrt{n}}$, Φ($u$)=$\gamma$. Примем влияние случайных факторов, которыми можно пренебречь, за 5%, т.е уровень значимости α = 0,05, тогда γ =1-0,05 = 0,95 – надежность или доверительная вероятность. По таблицам функции Лапласа для Φ(u) = 0,95 аргумент u=1,96. n – число наблюдений дней в августе, т.е. n =31, а $\sqrt{n} = \sqrt{31} \approx 5{,}568$. В качестве σ принимаем ее точечную оценку: $\sigma = s$= 0,62. Тогда ошибка выборочной средней $\varepsilon = \frac{u\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}62}{5{,}568} \approx 0{,}218$. Оказалось, что ошибка выборочной средней ε =0,218 больше отклонения средних Δ= 0,2 . Следовательно, можно считать, что на уровне 95% доверия разница между средними несущественна, она зависит от случайных факторов, которыми можно пренебречь, а, значит, данные за август можно считать не завышенными.

Если число наблюдений менее 30, *то вместо функции Лапласа используют другую функцию (распределение Стьюдента), которая дает более точный результат.*

В «схеме Бернулли» для большого числа n испытаний (n>30)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \text{ или } P\left(\frac{m}{n} - u\sqrt{\frac{pq}{n}} < p < \frac{m}{n} + u\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \approx \Phi(u).$$

Точечной оценкой вероятности p **«успеха» в единичном испытании является относительная доля** $\hat{p} = \frac{m}{n}$ **успешных наблюдаемых испытаний.**

Интервал $(\frac{m}{n}-u\sqrt{\frac{pq}{n}};\frac{m}{n}+u\sqrt{\frac{pq}{n}})$ есть интервальная оценка вероятности p с надежностью $\Phi(u)\cdot 100\%$. Ошибка выборочной вероятности $\hat{p}=\frac{m}{n}$ составляет

$u\sqrt{\frac{pq}{n}}$. То есть $P(\frac{m}{n}-u\sqrt{\frac{pq}{n}}<p<\frac{m}{n}+u\sqrt{\frac{pq}{n}})\approx\Phi(u)=1-\alpha=\gamma$, где α – уровень значимости (вероятность риска допустить ошибку), γ – вероятность доверия или надежность результата.

Согласно «правилу трех сигм» практически достоверно (с вероятностью 0,9973) имеет место неравенство $\left|\frac{m}{n}-p\right|\le 3\sqrt{\frac{pq}{n}}$. Используя соотношение между средним геометрическим $\sqrt{pq}$ и средним арифметическим $\frac{p+q}{2}$, получаем $\sqrt{pq}\le\frac{p+q}{2}$. Тогда $\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\frac{3}{2\sqrt{n}}$.

Пример. Проверено 300 дел района по административным правонарушениям, по которым в 267 случаях выплачены денежные штрафы свыше двух базовых величин (событие А). В каких границах можно гарантировать значение вероятности события А?

Решение. Значение относительной частоты события А в данной серии опытов (поверки дел) равно $\frac{m}{n}=\frac{267}{300}=0{,}89$. Поскольку n=300, то $\frac{3}{2\sqrt{n}}=\frac{3}{2\sqrt{300}}\approx 0{,}087$. Следовательно, значение вероятности отличается от значения относительной частоты менее, чем на 0,087. Поэтому искомые границы будут равны 0,89-0,087=0,803 и 0,89+0,087=0,977. Таким, образом, практически достоверно, что вероятность p появления события А в одном испытании удовлетворяет неравенствам $0{,}803<p<0{,}977$.

5.4 Выбор решения в математической статистике

Напомним, что статистическому обследованию подвергается не вся генеральная совокупность, а только ее часть – выборка. Поэтому любое суждение о генеральной совокупности, сделанное на основании выборки, является приближенным, а, точнее, предположительным. Такие предположения (о модели закона распределения генеральной совокупности, о значении числовых характеристик предполагаемого распределения, о зависимости случайных величин и т.д.) называют **статистическими гипотезами.** Выше, в двух последних примерах, мы фактически рассмотрели проверку таких некоторых гипотез. Приведем **алгоритм** проверки статистических гипотез:

- формулируют основную, нулевую H_0 и альтернативную H_1 гипотезы;

• задают уровень значимости α (вероятность того, что будет принята альтернативная гипотеза, когда нулевая гипотеза верна); наиболее употребительны значения уровня значимости 0,001, 0,01 и 0,05.

• выбирают статистический критерий К, распределение которого известно при условии справедливости нулевой гипотезы, а значения распределения этого критерия имеются в соответствующих таблицах. Например, стандартная нормальная случайная величина U, распределение Стьюдента или t-распределение, распределение Пирсона или χ^2 (хи-квадрат)-распределение, распределение Фишера или F-распределение и др.

• находят расчетное значение $К_{расч}$ критерия по выборочным данным;

• по таблицам находят значение критерия (критическое значение) $К_{табл}$, которое на координатной прямой определяет критическую область – область принятия альтернативной гипотезы H_1;

• сравнивают расчетное и критическое значения критерия К и делают вывод: если расчетное значение критерия попало в критическую область, то принимается альтернативная гипотеза, в противном случае принимается нулевая гипотеза.

Выбор решения при неизвестном математическом ожидании

Строго говоря, формулы доверительного интервала, ошибки выборочного среднего предполагают, что генеральная совокупность, как случайная величина X (СВ X), распределена по нормальному закону. Приведем алгоритм проверки значения генеральной средней (математического ожидания MX) для нормально распределенной СВ X.

При неизвестном числовом значении генерального среднего $MX=\bar{\bar{X}}$ гипотезу H_0: $MX=a_0$ (генеральное среднее равно числу a_0), при альтернативной гипотезе H_1: $MX \neq a_0$, проверяют так:

✓ строят интервальную оценку генеральной средней, отвечающей вероятности доверия γ=1-α, где α – заданное числовое значения уровня значимости;

✓ если этот доверительный интервал

$\bar{x}-\frac{u\sigma}{\sqrt{n}}<MX<\bar{x}+\frac{u\sigma}{\sqrt{n}}, \Phi(u)=\gamma=1-\alpha$, не накрывает число a_0, то гипотезу H_0 отклоняют в пользу альтернативной гипотезы, в противном случае гипотезу H_0 принимают.

Примечание. В зависимости от формулировки альтернативной гипотезы доверительный интервал генеральной средней может меняться.

Так, если альтернативная гипотеза H_1:$MX > a_0$, то в качестве доверительного интервала рассматривают промежуток

$$MX<\bar{x}+\frac{u\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ где } \Phi(u)=1-2\alpha.$$

Если альтернативная гипотеза H_1: $MX<a_0$, то в качестве доверительного интервала рассматривают промежуток

$$MX > \bar{x} - \frac{u\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ где } \Phi(u) = 1 - 2\alpha.$$

Пример. Предполагается, что возраст граждан, впервые нарушивших уголовное законодательство, распределено по нормальному закону с математическим ожиданием MX=18,1 и среднеквадратическим отклонением σ = 2,3. Выборочная проверка зарегистрированных таких 50 дел показала, что соответствующий средний возраст граждан составил 19,5. Следует ли отклонить с точностью до 1% утверждение о том, что средний возраст граждан, впервые нарушивших уголовное законодательство, равен предполагаемому среднему?

Решение. Сформулируем основную гипотезу H_0: MX=18,1 и альтернативную гипотезу H_1: MX=19,5>18,1. Уровень значимости α=0,01.

Доверительный интервал $MX < \bar{x} + \frac{u\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ где } \Phi(u) = 1 - 2\alpha.$ n=50. По таблицам Лапласа Находим значение u для $\Phi(u) = 1 - 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}98$. $u \approx 2{,}33$. Тогда доверительный интервал $MX < 19{,}5 + \frac{2{,}33 \cdot 2{,}3}{\sqrt{50}} \approx 20{,}26$ накрывает предполагаемое значение генеральной средней, поэтому гипотеза H_0 принимается с доверием 99%.

Выбор решения при неизвестной вероятности осуществляется аналогично, исходя из суждений, что $P(p_1 < p < p_2) \approx \Phi(\frac{p_2 - p}{\sqrt{pq/n}}) - \Phi(\frac{p_1 - p}{\sqrt{pq/n}})$ распределение частоты p является нормальным с параметрами $a=p$ и $\sigma = \sqrt{pq/n}$, а по правилу «трех сигм» $|\hat{p} - p| \le \frac{3}{2\sqrt{n}}$, где $\hat{p} = \frac{m}{n}$ - относительная частота выборки, p- неизвестная вероятность генеральной совокупности в схеме Бернулли.

Выбор модели закона распределения

Предположения о модели распределения генеральной совокупности вытекают из вида гистограммы и полигона выборки. Рассмотрим это на примере.

Руководство центра здорового образа жизни решило выяснить, являются ли предлагаемые услуги одинаково популярными, или у посетителей есть какие-нибудь предпочтения. Был проведен опрос среди посетителей, и по результатам опроса составлена следующая таблица:

Виды услуг (случайная величина), k=4	1 бассейн	2 танцевальный зал	3 тренажерный зал	4 аэробика
число опрошенных (частота, m_i)	60	55	44	45

Сформулируем нулевую гипотезу H_0: «все услуги одинаково популярны», т.е. вероятностное распределение равномерное. H_1 – «не все услуги одинаково популярны». Выберем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. В качестве выборочного критерия используем χ^2 (хи-квадрат) со степенями свободы $\nu = k-1=4-1=3$. Проводим вычисление расчетного значения критерия:

$$\chi^2 = \sum \frac{(m_i^{теор} - m_i)^2}{m_i^{теор}} = \frac{(51-60)^2}{51} + \frac{(51-55)^2}{51} + \frac{(51-44)^2}{51} + \frac{(51-45)^2}{51} = 3{,}57,$$

где $m_1^{теор} = m_2^{теор} = m_3^{теор} = m_4^{теор} = \dfrac{60+55+44+45}{4} = 51$.

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим $\chi^2_{табл}=7{,}82$.

Так как $\chi^2_{расч} < \chi^2_{табл}$, то нулевую гипотезу о равномерном распределении принимаем, т.е. можно считать, что предлагаемые услуги одинаково популярны.

Для применения критерия χ^2 имеются ограничения. Критерий «работает» при условии, что частоты в статистических таблицах должны быть не менее 5. Иногда это условие можно соблюсти, за счет объединения категорий переменных.

Таким образом, основные методы математической статистики обычно делят на две большие группы, определяемые характером рассматриваемых закономерностей и технологией их поиска:

- методы статистической оценки параметров (способы расчета выборочных значений параметров и перехода от выборочных значений к генеральным; математическая статистика говорит о качестве оценок, как строить «хорошие» оценки, близкие к соответствующим параметрам законов распределения генеральной совокупности);
- методы проверки статистических гипотез (оценка степени правдоподобности гипотезы о значении неизвестных параметров генеральной совокупности, или о законе распределения генеральной совокупности).

Не всегда на практике выполняются условия для строгих теорем математической статистики. Тогда выступает не совсем строгое ее приближение – анализ данных. Это происходит из-за получения выборочных частотных распределений разной размерности, а также специфики социологических данных.

Основными задачами, которые решает анализ данных являются:

1) классификация объектов – поиск однотипных групп объектов, создание типологии;

2) сжатие информации:

– одномерный анализ – описательная статистика;

– многомерный анализ – связь между признаками;

– поиск латентных (скрытых) переменных.

5.5 Использование пакета программ «Анализ данных в Excel»

При решении задач правоприменительной деятельности используют пакет программ «Анализ данных» в Microsoft Excel [10]. Рассмотрим возможности некоторых из них.

Программой «Выборка» из чисел генеральной совокупности формируется выборочная совокупность (Случайная повторная выборка объема n или периодическая в соответствии с введенным периодом t отбора).

В **программе «Описательная статистика»** осуществляется подсчет числовых характеристик выборки (средней, стандартной ошибки, медиана, моды, стандартного отклонения, дисперсии, эксцесса, асимметрии по умолчанию с вероятностью доверия 95%).

Программа «Гистограмма» используется для построения гистограммы интегрального % – ряда накопленных частостей в процентах.

В случае, когда выборочная средняя $\bar{x}$ и стандартное отклонение s близки по значениям, предполагается экспоненциальный закон распределения генеральной совокупности и **программа «Экспоненциальное сглаживание»** дает возможность определения вероятности на любом промежутке времени.

Влияние на случайную величину X (СВ X) фактора А или нескольких факторов, обычно не поддающихся количественным измерениям, изучает **дисперсионный анализ (однофакторный или многофакторный).** Предполагается, что все наблюдения независимы, результаты – нормально распределенные случайные величины с одинаковыми дисперсиями. В качестве нулевой гипотезы H_0: «генеральные средние равны между собой», т.е. фактор не оказывает существенного влияния, а в альтернативной гипотезе равенство генеральных средних нарушается. Для изучения воздействия одного фактора (например, влияние профилактической работы – фактор А – на число административных нарушений (СВ X)) исходные данные представляют собой результаты наблюдений СВ X при зафиксированных k уровнях $A_1, A_2, \ldots, A_k$ фактора А, записываемые в виде таблицы, столбцы которой называют группами. Число наблюдений в группах может быть различным(например, A_1 – число административных нарушений по учреждениям района, где профилактическая работа проводилась регулярно; A_2 – число административных нарушений по учреждениям района, где профилактическая работа проводилась от случая к случаю; A_3 – число административных нарушений по учреждениям района, где профилактическая работа не проводилась;).

Суть дисперсионного анализа состоит в том, что общую дисперсию $s^2_{общ}$ представляют как сумму факторной дисперсии $s^2_ф$, вызванной влиянием фактора, и остаточной дисперсии $s^2_о$, вызванной влиянием неконтролируемых случайных воздействий: $s^2_{общ} = s^2_ф + s^2_о$,– и изучает эти слагаемые. Если $s^2_\phi \le s^2_o$, то влияние фактора признается несущественным. В противном случае, когда $s^2_ф > s^2_о$, или то же самое, что $\frac{s^2_\phi}{s^2_o} > 1$, можно считать, что фактор влияет на результат значимо. Однако факторная и остаточная дисперсии зависят от выборки, поэтому отношение $F=\frac{s_{ф}^2}{s_{о}^2}$ является случайной величиной. Для надежности выбора гипотезы надо знать распределение случайной величины F. Это распределение названо F-распределением или распределением Фишера (Р. Фишер – английский биолог, математик, статист, 1925 г.), таблицы значений которого разработал Снедекор (американский математик). Табличное, критическое значение $F_{кр}$(при данном уровне значимости α и степенями свободы $n-k$, $n-1$), сравнивают с подсчитанным по наблюдениям $F_{наб}$. Если $F_{наб}< F_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается (фактор влияет несущественно), в противном случае, когда $F_{нна} \geq F_{кк}$, нулевая гипотеза отвергается в пользу альтернативной (фактор влияет значимо) с вероятностью доверия $\gamma=1-\alpha$. Указанный метод заложен в **программу «Однофакторный дисперсионный анализ»**. Использование формул подсчета и смысл таблиц см. подробно [8].

Для изучения влияния двух факторов используют **программы «Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями» и «Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений».**

Сравнение характеристик двух одноименных генеральных совокупностей (например, повторные правонарушения в двух районных городах) можно осуществить с помощью программ «Двухвыборочный F-тест для дисперсий», «Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями», «Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями», «Двухвыборочный z-тест для средних», «Парный двухвыборочный t–тест для средних».

Изучение взаимосвязей процессов государственно-правового регулирования общественных отношений посредством математических моделей, позволяющих провести мониторинг и осуществить прогноз, является важным в государственной политике. Теснота связи между каждой парой случайных величин определяется ковариацией, коэффициентами корреляции, значение которых по наблюдениям дают **программы «Ковариация» и «Корреляция»** [6,8]. При этом предполагается, что каждому значению одной случайной величины соответствует целое распределение другой случайной величины, т.е. эти случайные величины находятся в стохастической зависимости.

Установив, что связь между случайными величинами существенна, определяют форму (вид) этой связи как функцию, зависимость между значениями одной случайной величины и соответствующими средними другой случайной величины. С помощью **программы «Регрессия»** вычисляют оценки параметров уравнения регрессии и проводят статистический анализ этих оценок.

Рекомендуемая литература

1. *Ахтямов А.М.* Математика для социологов и экономистов: учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

2. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов. 6-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1997. – 479 с.: ил.

3. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов. – 4-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 400 с., ил.

4. *Горелова Г.В.*, Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: учебное пособие для вузов. 2-е изд. исправленное и дополненное. – Ростов н/Д: Феникс, 2002. – 400 с.: ил.

5. *Калинина В.Н.*, Панкин В.Ф. Математическая статистика: учеб. для студ. сред. спец. учеб. заведений. – 3-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2001. – 336 с.: ил.

6. *Колемаев В.А.*, Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2003

7. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001.

8. *Персон Р.* Microsoft Excel 97 в подлиннике. Т. 1, 2. Пер. с анг. – BHV -Санкт-Петербург, 1997.

СОДЕРЖАНИЕ