Могилевский областной институт повышения квалификации и переподготовки руководящих работников и специалистов образования

А. М. Сазонова, А. Е. Устинов

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Могилев 2001

Печатается по решению редакционно-издательского совета
МОИПК и ПРР и СО.

Рецензенты: **Николаева В. В.** – доцент кафедры методики преподавания математики Могилевского государственного университета им. А. Кулешова;
Шустикова В. Я. – начальник отдела физико-математических дисциплин Могилевского областного ИПК и ПРР и СО;
Казакова Л. И. – учитель математики высшей категории Могилевского областного лицея при МГУ им. А. Кулешова.

А. М. Сазонова, А. Е. Устинов

Параллельные проекции в геометрических задачах – Могилев:
ИПК и ПРР и СО, 2000. - 28 с.

Разработки предназначены для учителей и учащихся средних общеобразовательных школ. Они содержат систему геометрических задач аффинного характера, образцы решения методом параллельных проекций, задачи для самостоятельного решения. Прилагается список методической литературы.

Решение геометрических задач, в отличие от алгебраических, не подлежат столь выраженной алгоритмизации, часто содержат искусственные приемы, требующие творческих догадок, фантазий. Вот почему так важно владеть тем реестром методов, которые органично вплетены в курс школьной геометрии.

Данное пособие выделяет одну тему "Параллельное проектирование и его свойства". Известно, что параллельное проектирование плоских фигур порождает аффинно-перспективное соответствие плоскости проекций, что позволяет использовать метод преобразований, состоящий в следующем:

1) убеждаемся, что задача сформулирована в терминах инвариантных (неизменных) свойств тех преобразований, которые мы собираемся применить;
2) на евклидовой плоскости подвергаем фигуру (или ее часть) преобразованию так, чтобы для "хорошей" фигуры-образа задача решалась "легко";
3) решаем задачу для "хорошей" фигуры-образа;
4) результат с помощью преобразования, обратного проделанному в п.2, переносим на данную фигуру.

И для стереометрических задач аффинного характера (сформулированных в терминах "точка", "прямая", "плоскость", "принадлежность", "лежать между", "параллельность", "отношение коллинеарных отрезков", т. е. всех тех свойств, которые сохраняются при параллельном проектировании) можно использовать метод параллельных проекций, состоящий в том, что:

1) выбирают "удобное" направление проектирования фигуры-оригинала;
2) проектируют фигуру (или ее часть) на евклидову плоскость, чтобы для "хорошей" фигуры-образа задача решалась "легко";
3) решают задачу для "хорошей" фигуры-образа;
4) результат "переносят" на данную фигуру.

Метод параллельных проекций также позволяет "посмотреть" на аффинную задачу плоскости как на изображение пространственной задачи, что упрощает решение задачи планиметрии.

Предложенная система задач по темам позволит не только развить пространственное воображение учащегося, но и постепенно, методически обоснованно, рассмотреть типы задач аффинного характера, решение которых возможно нестандартным методом – методом параллельных проекций.

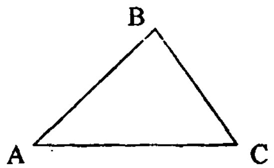
Методический материал апробирован автором Устиновым А.Е. в 11 классе областного лицея при МГУ им. А. Кулешова г. Могилева в 2000 г.

Построение параллельных проекций.

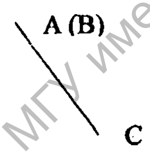
Изображением фигуры называют фигуру плоскости, подобную некоторой параллельной проекции оригинала. Поэтому параллельная проекция есть частный случай изображения фигуры.

Сущность метода параллельных проекций заключается в целесообразном выборе направления проектирования. Для решения задач этим методом необходимо научиться строить изображения в различных направлениях проектирования. Будем обозначать фигуру-оригинал и ее проекцию одинаковыми буквами, если это не вызывает разночтения.

Самый простой пример: построить изображение треугольника ABC, приняв за направление проектирования прямую AB.



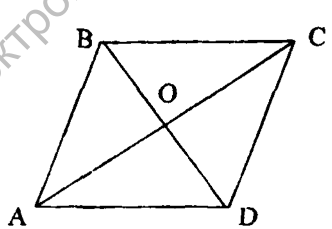
Ответ:



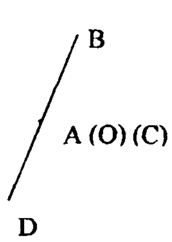
При проектировании плоской фигуры в направлении прямой, лежащей в этой плоскости изображением будет отрезок.

Задача 1. Построить изображение параллелограмма ABCD, приняв за направление проектирования диагональ AC.

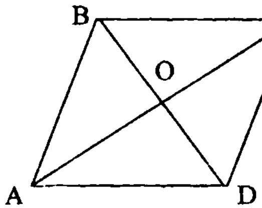
При проектировании все точки, лежащие на прямой, параллельной проектирующей, изображаются одной точкой.



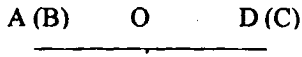
Ответ:



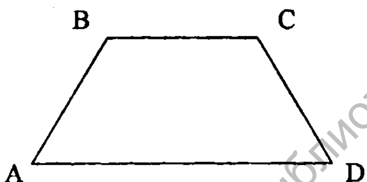
Задача 2. Построить изображение параллелограмма ABCD, приняв за направление проектирования сторону AB.



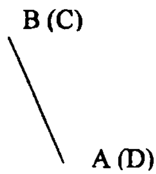
Ответ:



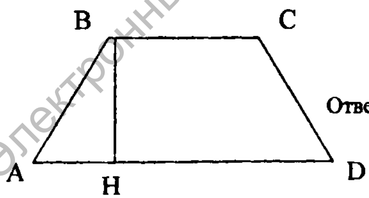
Задача 3. Построить изображение трапеции ABCD, приняв за направление проектирования прямую AD.



Ответ:



Задача 4. Построить изображение трапеции ABCD, приняв за направление проектирования высоту BH.

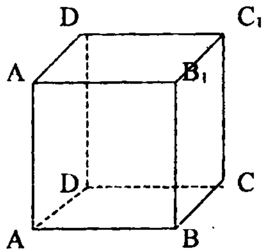


Ответ:

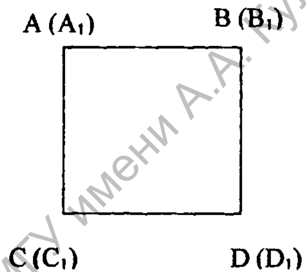
Изображением объемной фигуры будет плоская фигура, т.е. все точки фигуры переносятся параллельно проектирующей прямой на произвольную плоскость.

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить его изображение, приняв за направление проектирования:

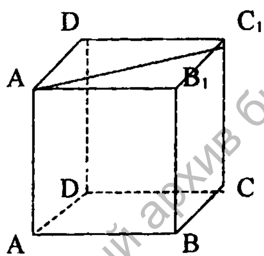
a) прямую AA_1



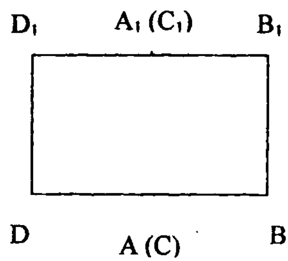
Ответ:



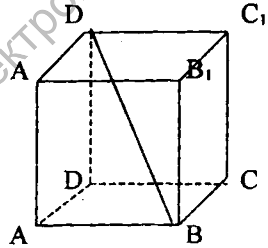
b) прямую A_1C_1



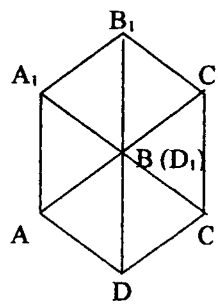
Ответ:



c) прямую BD_1

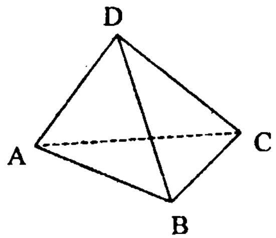


Ответ:

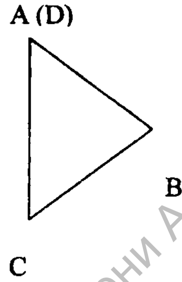


Задача 6. Дана треугольная пирамида ABCD. Построить его изображение, приняв за направление проектирования :

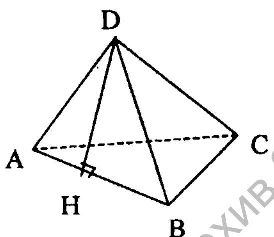
а) прямую AD



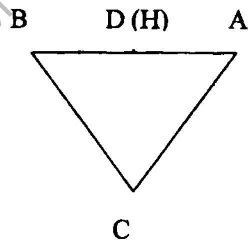
Ответ:



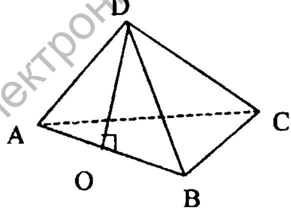
b) прямую DH



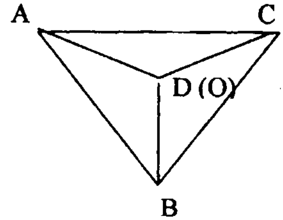
Ответ:



с) прямую DO



Ответ:



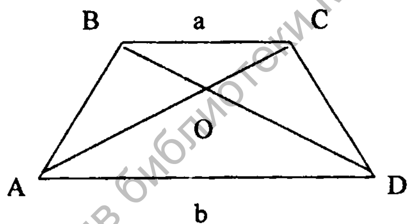
Метод параллельных проекций основывается на следующих свойствах параллельного проектирования:

- параллельные прямые изображаются параллельными прямыми;
- сохраняется принадлежность точек и прямых;
- сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или параллельных прямых.

Этим методом можно решать любые задачи аффинного характера, т.е. такие, где отсутствуют понятия длины (но существует отношение длин) и меры угла.

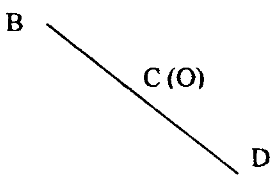
Отношения длин отрезков.

Задача 1. Основания трапеции равны a и b. В каком отношении делятся ее диагонали точкой пересечения?



Первый шаг состоит в выборе направления проектирования. Необходимо его выбрать так, чтобы концы отрезков, отношение которых мы ищем, совпали с концами отрезков, отношение которых мы знаем или можем вычислить.

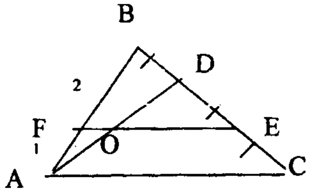
Выберем в качестве проектирующей прямой прямую AC:



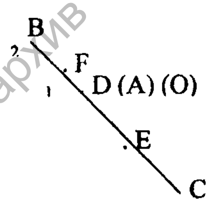
Поскольку проектирование сохраняет отношение отрезков на одной прямой, то BO:OD = BC:AD = a:b.

Ответ: a:b.

Задача 2. На стороне BC треугольника ABC взяты точки D и E так, что BD = DE = EC. Точка F принадлежит отрезку AB и EF||AC. Найти отношение длин отрезков FO и OE, где O - точка пересечения прямых AD и FE.



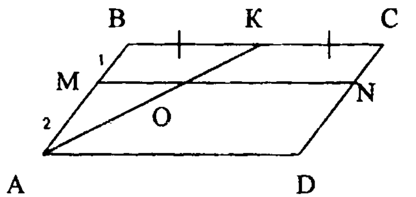
Так как FE||AC и BD = DE = EC, то AF:FB = 1:2.
Выберем в качестве проектирующей прямой прямую AD:



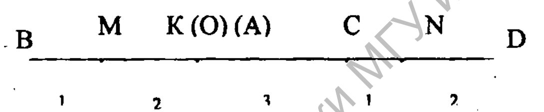
Видим, что FO:OE = FA:DE = FA:AB = 1:3.

Ответ: 1:3.

Задача 3. На сторонах AB, BC, CD параллелограмма ABCD взяты соответственно точки M, K, N так, что MN||AD. Известно, что отношение AM:MB = 2:1. Отрезок MN пересекается с AK в точке O. Найти отношение длин отрезков MO и ON, если точка K - середина BC.



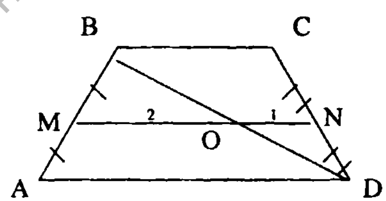
Выберем в качестве проектирующей прямой прямую AK:



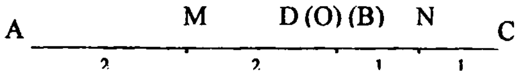
MO:ON = 2:4 = 1:2.

Ответ: 1:2.

Задача 4. В трапеции ABCD проведена средняя линия MN ($M \in AB$, $N \in CD$), которая пересекается с диагональю BD в точке O. Найти отношение длин оснований AD и BC трапеции, если MO=2ON.



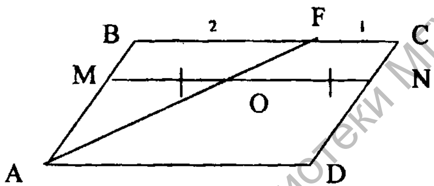
Выберем в качестве проектирующей прямой прямую BD:



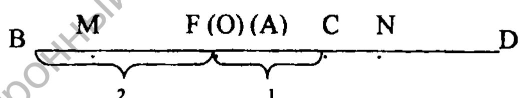
AD:BC = 4:2 = 2:1.

Ответ: 2:1.

Задача 5. В параллелограмме ABCD прямая MN ($M \in AB$, $N \in CD$) параллельна сторонам AD и BC. Через точку A и середину отрезка MN проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке F, причем BF=2FC. Найти отношение площадей параллелограммов AMND и MBCN.



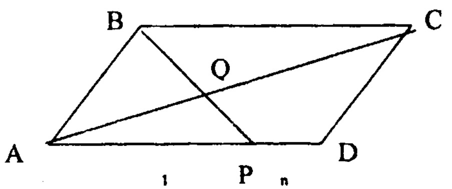
$S_{AMND}:S_{MBCN}$ = AM:MB, т.к. высоты этих параллелограммов одинаковы. Выберем в качестве проектирующей прямой прямую AF:



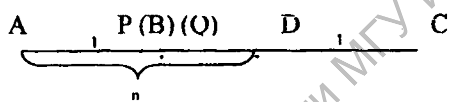
Обозначим BM = CN = x. Т.к. MO = ON и AM = ND, то MF = FN = 1,5. Следовательно, x = 0,5. Тогда AM:MB = 1,5:0,5 = 3. Получаем, что $S_{AMND}:S_{MBCN}$ = 3.

Ответ: 3:1.

Задача 6. В параллелограмме ABCD точка P, взятая на стороне AD, делит эту сторону в отношении AD:AP=n. Прямая PB пересекает диагональ AC в точке Q. Найти отношение AC:AQ.



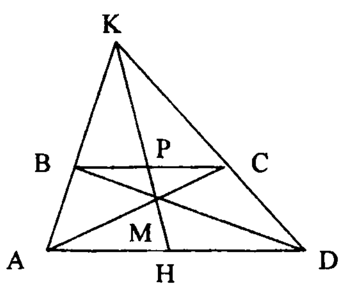
Выберем в качестве проектирующей прямой прямую BP:



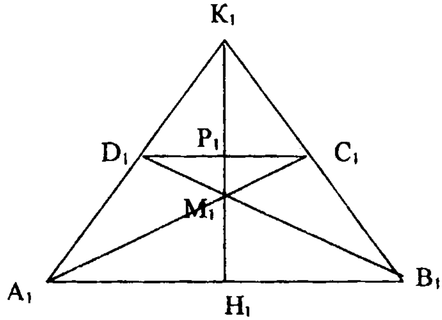
AC:AQ = (n+1):1 = n+1.

Ответ: (n+1):1.

Задача 7. В каком отношении делит основания трапеции прямая, проходящая через точку пересечения продолжений боковых сторон и точку пересечения диагоналей трапеции?



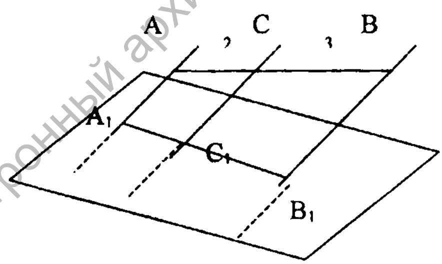
Треугольник AKB изобразим правильным треугольником $A_1K_1B_1$, а трапецию ABCD - равнобедренной трапецией $A_1B_1C_1D_1$.



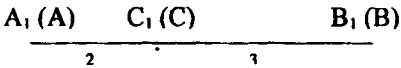
Прямая M_1K_1 является осью симметрии треугольника $A_1K_1B_1$ и трапеции $A_1B_1C_1D_1$. Поэтому прямая M_1K_1 делит пополам отрезки D_1C_1 и A_1B_1. Точки P и H являются образами точек P_1 и H_1 соответственно. Поэтому прямая KM проходит через середины сторон CD и AB данной трапеции.

Ответ: пополам.

Задача 8. Точка C делит отрезок AB в отношении AC:CB = 2:3. Параллельные прямые, проходящие через точки A, C, B пересекают некоторую плоскость в точках A_1, C_1, B_1. Найдите отношение A_1B_1:A_1C_1.



Выберем в качестве проектирующей прямой прямую AA_1:



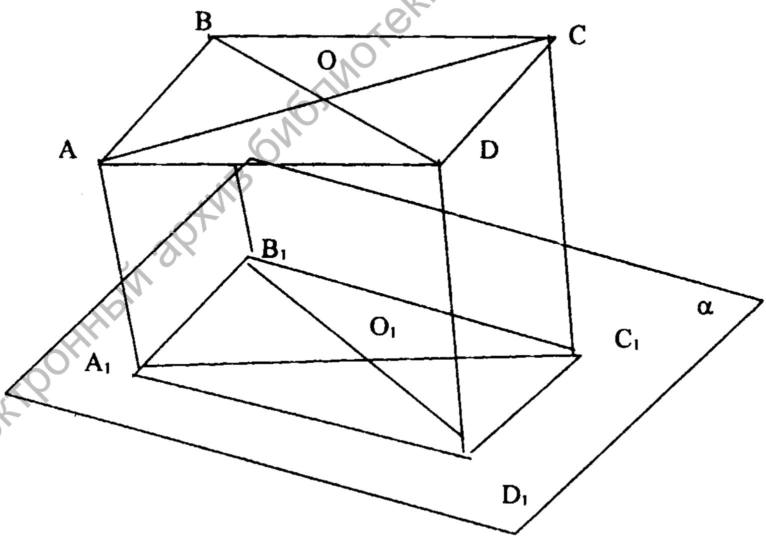
$A_1B_1:A_1C_1 = AB:AC = (2+3):2 = 5:2.$

Ответ: 5:2.

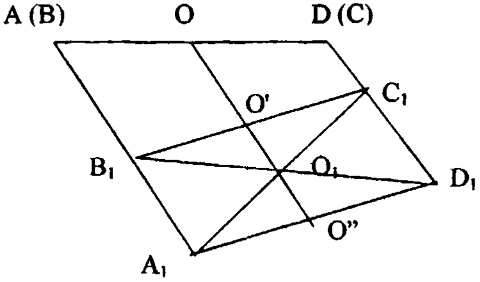
Задача 9. Пусть O - точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD, а α - плоскость, не пересекающая параллелограмм. Через точки A, B, C, D, O проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1. Докажите, что

а) $AA_1+BB_1+CC_1+DD_1=4OO_1$;

б) $AA_1+CC_1=BB_1+DD_1$.



Выберем в качестве проектирующей прямой прямую AB:



Так как параллельные отрезки изображаются параллельными отрезками, то $A_1B_1 \| C_1D_1$ и $B_1C_1 \| A_1D_1$ => $A_1B_1C_1D_1$ - параллелограмм.

а) $A_1+BB_1+CC_1+DD_1 = (AA_1+DD_1)+BB_1+CC_1 = (BB_1+CC_1+A_1B_1+C_1D_1)+BB_1+CC_1 = [B_1A_1 = O'O'' = C_1D_1] = 2(BB_1+CC_1)+2O'O''$ = [$AB_1 \| CC_1$ $AO = OC$ $B_1O'=O'C$ => OO' - средняя линия трапеции ADC_1B_1 => $BB_1+CC_1 = 2OO'$] $= 4OO'+2(2O'O_1) = 4(OO'+O'O_1) = 4OO_1$.

б) $AA_1+CC_1 = BB_1+A_1B_1+DD_1-C_1D_1 = [A_1B_1 = C_1D_1] = BB_1+DD_1$.

Пересечения трех прямых в одной точке и коллинеарность трех точек.

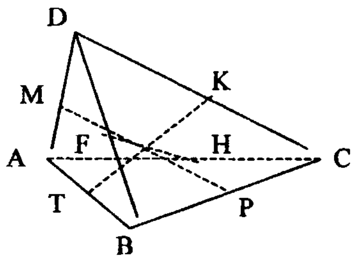
Коллинеарность трех точек – это принадлежность этих точек одной прямой.

При решении задач на доказательство пересечения трех прямых в одной точке, произвольные треугольники изображаются, как правило, правильными треугольниками.

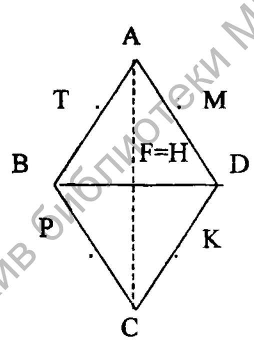
Задача 1. Доказать, что во всяком треугольнике его медианы пересекаются в одной точке.

Всякий треугольник можно считать изображением правильного треугольника. Утверждение задачи для правильного треугольника верно, потому что в этом треугольнике медианы являются его биссектрисами. Отсюда следует утверждение задачи.

Задача 2. Через середины противоположных ребер пирамиды DABC проведены прямые. Доказать, что они пересекаются в одной точке.

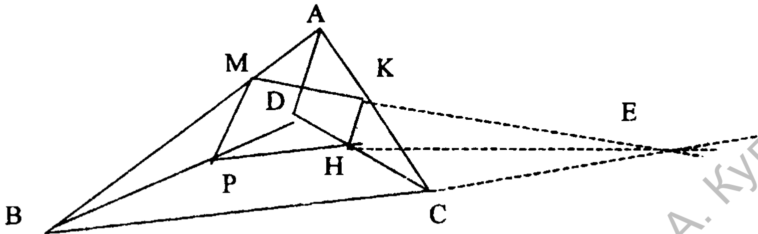


За направление проектирования принимаем прямую FH:



Тогда пирамида изображается параллелограммом (вместе с его диагоналями). Середины противоположных сторон параллелограмма симметричны относительно точки F=H. Задача решена.

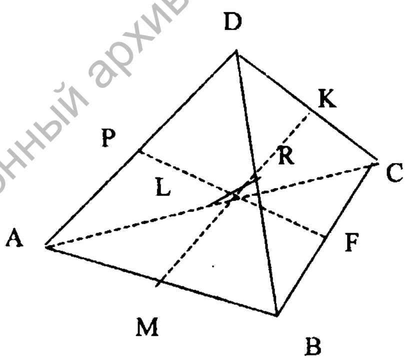
Задача 3. Отрезки MP, AD, и KH параллельны и четырехугольник PMKH является трапецией. Доказать, что прямые MK, PH и BC пересекаются в одной точке E.



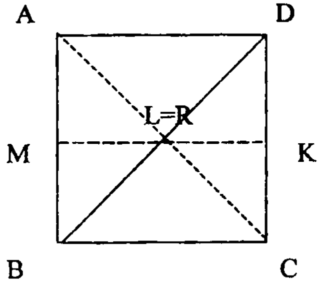
Считаем чертеж изображением пирамиды DABC и ее сечения PMKH плоскостью MPH. Поэтому точка E, в которой пересекаются прямые MK и PH, принадлежит прямой BC. Обоснуйте самостоятельно этот факт на основании аксиом стереометрии.

Задача 4. Доказать, что все отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника ABCD, и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке.

Чертеж считаем изображением правильного тетраэдра DABC.



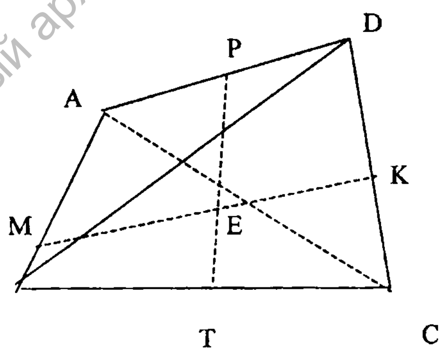
Этот тетраэдр можно изобразить квадратом, выбрав за направление проектирования прямую LP.



После этого утверждение задачи становится очевидным. Раскройте эту очевидность!

При решении задач на доказательство коллиниарности трех точек A, B, C, за направление проектирования обычно берут одну из прямых AB, BC или AC.

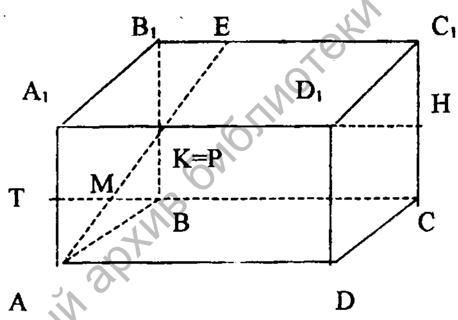
Задача 5. На сторонах AB и CD четырехугольника ABCD даны точки M и K, такие, что AM = kAB, DK = kDC. Доказать, что середины отрезков BC, MK, AD принадлежат одной прямой.



Чертеж считаем изображением правильного тетраэдра ABCD. Пусть точки P и T - середины ребер AD и BC. Прямая PT является осью симметрии этого тетраэдра (докажите!). Поэтому точки M и K симметричны относительно прямой PT, и точка E, в которой пересекаются прямые PT и MK, есть середина отрезка MK.

Задача 6. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K и P - середины ребер BB_1 и A_1D_1 соответственно. Точка H делит ребро CC_1 пополам. Точка E принадлежит ребру B_1C_1 и $B_1E:EC_1 = 1:3$. Верно ли, что прямая KP пересекает прямые AE и A_1H?

Пусть плоскость проекции параллельна грани BB_1C_1C прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и прямая KP параллельна направлению проектирования. Получаем изображение параллелепипеда, на котором прямая KP изображена точкой.

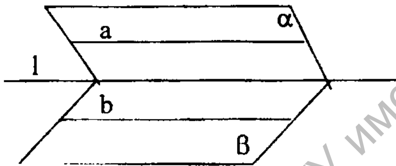


На этом чертеже прямая A_1H совпала с изображением прямой A_1D_1. Отрезок AK пересекает отрезок TB в его середине M. Поэтому треугольники MBK и EB_1K равны, и точки A, K и E лежат на одной прямой. Итак, на изображении прямые A_1H и AE проходят через точку K=P, т.е. эти прямые пересекают прямую KP.

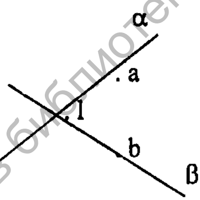
Параллельность прямых.

При решении задач на доказательство параллельности прямых одна из данных прямых принимается за направление проектирования.

Задача 1. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых. Докажите.



Выберем в качестве проектирующей прямой прямую a:

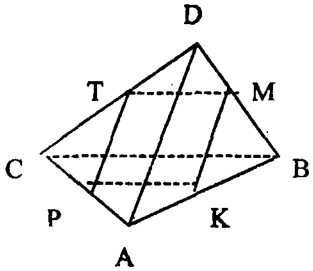


Так как плоскости α и β изобразились прямыми, то прямая их пересечения изобразится точкой, так как a||b, то прямая b так же изобразится точкой. Следовательно, все эти прямые a, b и l параллельны.

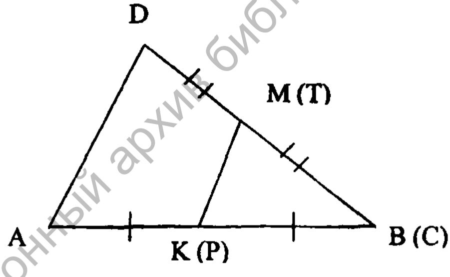
Задача 2. Прямые AB и CD скрещиваются. Могут ли быть параллельными прямые AC и BD? а пересекающимися?

Если бы прямые AC и BD были параллельны или пересекались, через них можно было бы провести плоскость. В этой плоскости лежали бы точки A, B, C, D, а значит, и прямые AB и CD. Но по условию прямые AB и CD не лежат в одной плоскости. Значит прямые AC и BD не могут быть ни параллельными ни пересекающимися.

Задача 3. K, P, T, M - середины ребер AB, AC, CD, DB тетраэдра. Докажите, что четырехугольник KPTM - параллелограмм.



В качестве проектирующей прямой выберем прямую BC:

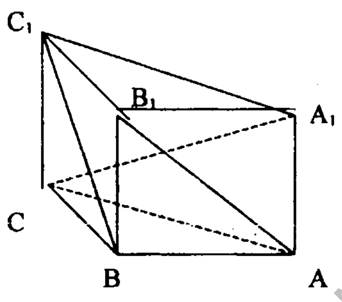


Так как TM и PK изобразились точками, то они параллельны. Так как прямые MK и TP совпали, то они так же параллельны. Следовательно, TMKP - параллелограмм.

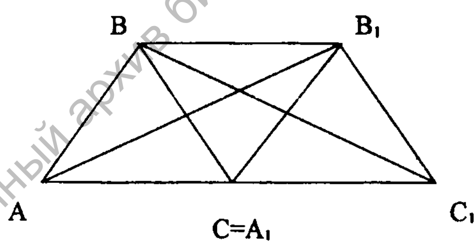
Параллельность прямых и плоскостей.

При решении задач на доказательство параллельности прямых одна из данных прямых принимается за направление проектирования.

Задача 1. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Доказать, что не существует плоскости, которой параллельны прямые AB_1, BC_1 и CA_1.

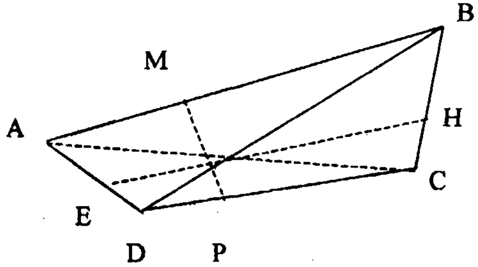


Считаем прямую CA_1 проектирующей. При этом условии данная призма изображается фигурой, показанной на рисунке.

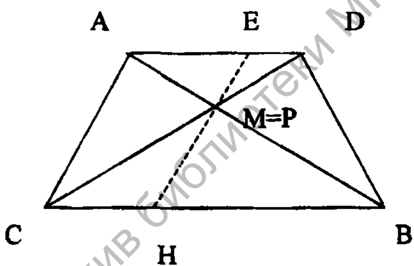


На этом чертеже прямые C_1B и AB_1 пересекаются (обоснуйте это!), а прямая CA_1 изображена точкой $C=A_1$. Следовательно, они не лежат в одной плоскости и не параллельны ни какой плоскости.

Задача 2. Дана произвольная треугольная пирамида DABC. BM=kBA, CP=kCD, BH=nBC, AE=nAD. Доказать, что точка M принадлежит плоскости PHE.

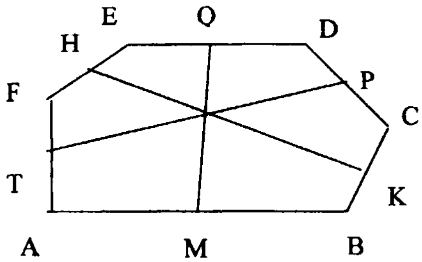


Считаем прямую MP проектирующей. По условию задачи точки M и P делят отрезки AB и DC в одном и том же отношении, поэтому данная пирамида изображается трапецией ADBC с основаниями AD и CB.

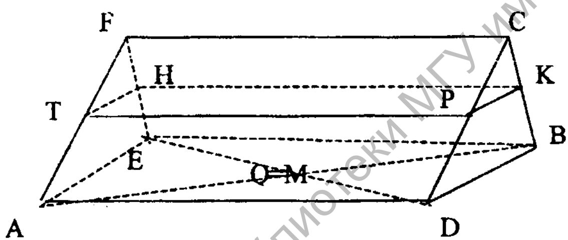


Треугольники AMD и BMC гомотетичны относительно точки M=P. Точки E и H делят отрезки AD и BC в одном и том же отношении. Поэтому отрезок HE проходит через центр гомотетии M=P, а это означает, что отрезки MP и HE пересекаются. Утверждение задачи доказано.

Задача 3. Дана пространственная замкнутая ломаная ABCDEFA. Точки M, K, P, Q, H, T - середины соответственно ее звеньев AB, BC, CD, DE, EF, FA. Доказать, что прямые MQ, HK и PT параллельны одной и той же плоскости.



Считаем прямую QM проектирующей. Тогда точки A, E, B, D изображаются вершинами параллелограмма.



Отрезки PK и TH изображают средние линии треугольников AEF и CBD, у которых AE=BD и отрезки AE и BD параллельны. Следовательно, на рисунке прямые HK и TP изображаются параллельными прямыми, а прямая MQ - точкой Q=M.

Расстояние между точками.

Эти задачи относятся к метрическим задачам. При выборе направления проектирования отрезок искомой длины проектируется, как правило, без искажения или является ортогональной проекцией известного отрезка.

Задача 1. Длина стороны основания $ABCD$ правильной пирамиды $MABCD$ равна 1, бокового ребра – 2. Найти расстояние между прямыми AC и MB.
Указание: проектировать в направлении AC.

Перпендикулярность прямых и плоскостей.

Проектирование осуществляется таким образом, чтобы плоскость, перпендикулярная данной прямой, спроектировалась в прямую, перпендикулярную проекции данной прямой.

Задача 1. Точка M делит ребро AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении $AM:MA_1 = 2:1$. К прямым BM и BD_1 построен общий перпендикуляр PK. В каком отношении делит точка P отрезок BM?
Указание: построить ортогональную проекцию на плоскость ACB_1.

Площади многоугольников.

Используется свойство: отношение площадей фигур-оригиналов в плоскости равно отношению площадей их проекций на другую плоскость.

Задача 1. На продолжениях диагоналей параллелограмма $ABCD$ взяты точки M, N, K и P так, что $MA=AO$, $NB=BO$, $KC=CO$ и $PD=DO$, где O – точка пересечения диагоналей. Найти площадь параллелограмма $MNKP$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1 см^2.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Точка E делит сторону BC параллелограмма ABCD в отношении BE:EC = 6:1. В каком отношении прямая AE делит диагональ BD?
2. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка E так, что AE:EB = 3:2. Прямая EC пересекает медиану BD треугольника ABC в точке K. Найти отношение площадей треугольников BEK и KDC. (Ответ : 8/15).

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что MN || AC. Медиана CD пересекает отрезок MN в точке O. Найти отношение площадей треугольников ABC и MBN, если OM = 2ON. (Ответ : 9/16).

4. В трапеции ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников AOD и BOC, если отношение длин оснований AD и BC равно 5. (Ответ : 25/1).

5. В четырехугольник ABCD вписана трапеция MKPE, параллельные стороны которой параллельны диагонали AC. Доказать, что прямые ME, BD и KP пересекаются в одной точке.

6. Точки M и K делят основания BC и AD трапеции ABCD в одном отношении. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Доказать, что точки M, N и O лежат на одной прямой.

7. Точки M, N и K лежат на сторонах AB, AD и диагонали AC четырехугольника ABCD соответственно. Доказать, что точки пересечения прямых NK и CD, KM и BC, MN и BD лежат на одной прямой.

8. Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания этой трапеции пополам.

9. Точка M лежит на стороне CD четырехугольника ABCD. Доказать, что BM || AD, если AF:FC=DM:MC, где F – точка пересечения BM с диагональю AC.

10. В шестиугольнике ABCDEF противоположные стороны параллельны. Доказать, что ABED – параллелограмм.

12. Дана замкнутая ломаная ABCDEF. Доказать, что если противоположные звенья ломаной попарно параллельны, то они попарно равны.

13. Основанием пирамиды SABC является равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC=4\sqrt{2}$ ед) с внешним углом 60°. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

14. Основанием пирамиды SABC является равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC=4\sqrt{3}$ ед) с углом при основании 30°. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Точка K лежит на продолжении стороны AC и KA:AC=1:2. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми BK и SM, где M – середина ребра BC.

15. Длины боковых сторон трапеции 3 и 5. Известно, что в трвпецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5:11. Найдите длины сторон.

16. К ребру AA1 и диагонали DB1 параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 построен общий перпендикуляр PK. Определить, в каком отношении делит точка P ребро AA1, если длины ребер AA1 и AB равны 1 и 2 соответственно.

17. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC взяты точки P, K и M соответственно. AP:PB = BK:KC = CM:MA = 1:2. Найти площадь треугольника PKM, если площадь треугольника ABC равна 10 см^2.

Содержание:

Список используемой литературы:

1. Егерев В.К. и др. "Сборник задач для поступающих во ВТУЗы"

2. Василевский А.Б. "Обучение решению задач по математике". Мн., "Выш. шк.", 1988.

3. Бортаковский А.С. и др. "Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы" (под ред. Р.Н. Молодожниковой). М., Изд. МАИ, 1995.