О развитии пространственных представлений учащихся при изучении векторов в IX классе

Н. М. Рогановский
(г. Могилев)

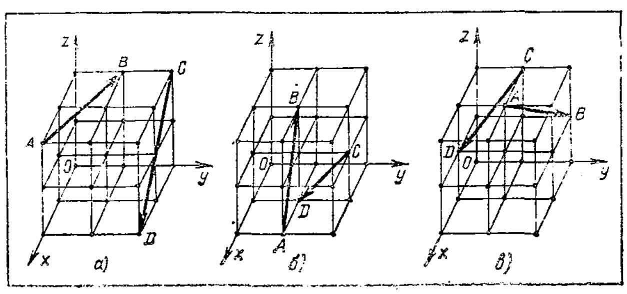
При изучении векторной алгебры в IX классе важно подчеркнуть учащимся пространственную специфику понятия вектора в пространстве. Большое значение в этом отношении имеют приемы изображения вектора в связи с теми или иными объектами: пространственной координатной сеткой, совокупностью двух или трех плоскостей, призм, пирамид и т. д.

Так, при введении понятия суммы двух векторов в IX классе полезно рассмотреть рис. 1,*а*—1,*в*, на которых по-разному заданы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ и требуется построить их сумму. Использование пространственной координатной сетки обогащает работу пространственного мышления школьников даже при выполнении такого простого задания. Координатная сетка хорошо помогает представить взаимное расположение данных векторов в пространстве. Важно отметить, что оперирование с пространственными объектами выполняется в данном случае не только на уровне наблюдения (восприятия), учащиеся выполняют с ними непосредственные действия: откладывается вектор $\overline{BP}$, равный вектору $\overline{CD}$, строится вектор $\overline{AP}$ —искомый вектор.

Подобные задания можно варьировать. Например, изобразить на координатной сетке вектор $\bar{c}$, а затем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ такие, чтобы выполнялось равенство $\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$. Можно изобразить два вектора $\bar{a}$ и $\bar{c}$, а затем вектор $\bar{b}$, для которого выполнялось бы равенство $\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$, и т. д.

Аналогичные задания могут быть составлены при изучении других понятий и фактов

Рис. 1



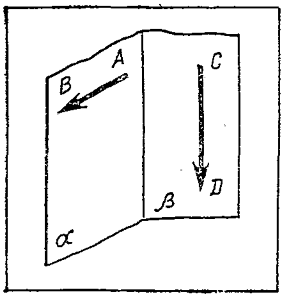


Рис. 2

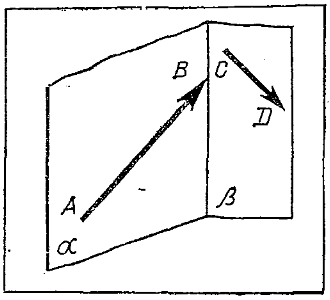


Рис. 3

векторной алгебры. Заметим, что в связи с тем, что в учебном пособии А. В. Погорелова векторная алгебра строится с широкой опорой на систему координат, использование координатной сетки становится естественным средством наглядности.

Пространственную специфику векторных понятий в курсе стереометрии можно подчеркнуть и другими рисунками (рис. 2—5), на которых также требуется построить сумму двух векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Развитию пространственного представления способствуют специальные пояснения того, каким образом располагаются векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{AP}$ (сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$) относительно данных плоскостей (рис. 2—3), граней куба (рис. 4), граней тетраэдра (рис. 5).

Постепенно задания могут усложняться, обогащаться в содержательном отношении. Приведем пример такого задания: «Пусть α и β — две полуплоскости с общей границей, $\overline{AB}$ — вектор, начало которого принадлежит α, а конец — β. От точки C, принадлежащей α, отложен вектор $\overline{CD}=\overline{AB}$. Лежит ли конец вектора $\overline{CD}$ на полуплоскости β?».

Как правило, векторное решение задач в содержательном отношении не является чисто векторным, оно содержит и немалый традиционно-синтетический аспект. Более явное выделение этого аспекта в процессе решения позволяет избежать механическое манипулирование с векторными равенствами.

Обратимся к следующей задаче на доказательство.

Рис. 4

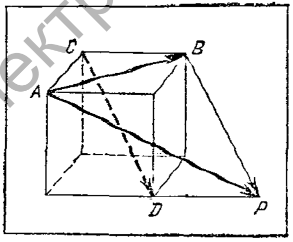
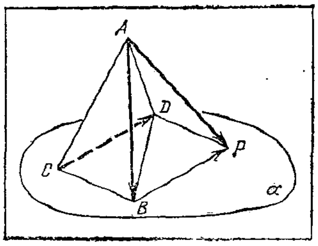


Рис. 5



Дано: $SABC$ — произвольный трехгранный угол, SD и SE — биссектрисы двух плоских его углов, SF — биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом.

Доказать: SD, SE и SF принадлежат одной плоскости.

Векторное доказательство. Возьмем точки D_1, E_1, F_1, принадлежащие соответственно биссектрисам SD, SE, SF (рис. 6), и векторы $\overline{SA}_1$, $\overline{SB}_1$, $\overline{SC}_1$, $\overline{SR}_1$ такие, чтобы выполнялись равенства:

$$\overline{SD}_1=\overline{SA}_1+\overline{SB}_1, \quad (1)$$

$$\overline{SE}_1=\overline{SB}_1+\overline{SC}_1, \quad (2)$$

$$\overline{SF}_1=\overline{SC}_1+\overline{SR}_1. \quad (3)$$

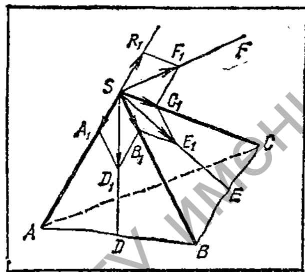


Рис. 6

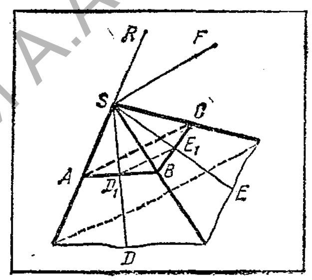


Рис. 7

Так как SD_1, SE_1 и SF_1 биссектрисы, то параллелограммы $SA_1D_1B_1$, $SB_1E_1C_1$, $SC_1\overline{F_1}R_1$ являются ромбами. Отсюда векторы $\overline{SA}_1$, $\overline{SB}_1$, $\overline{SC}_1$ и $\overline{SR}_1$ имеют одинаковую длину и, следовательно, $\overline{SR}_1=-\overline{SA}_1$.

Теперь нетрудно в равенстве (3) векторы $\overline{SC}_1$ и $\overline{SR}_1$ выразить через векторы $\overline{SD}_1$ и $\overline{SE}_1$:

$$\overline{SF}_1=\overline{SE}_1-\overline{SD}_1. \quad (4)$$

Равенство (4) означает, что векторы $\overline{SD}_1$, $\overline{SE}_1$ и $\overline{SF}_1$ являются компланарными (в учебном пособии этого термина нет, но он легко воспринимается учащимися). Отсюда следует, что биссектрисы SD, SE и SF принадлежат одной плоскости.

Как видно из приведенного доказательства, общий замысел решения задачи носит векторный характер, реализация же этого замысла существенно опиралась на традиционно-синтетические рассуждения (трижды использовалось свойство параллелограмма, диагональ которого является биссектрисой угла).

Решая приведенную задачу, ученик неоднократно мысленно представлял данный трехгранный угол, его плоские углы, биссектрисы, форму параллелограммов и т. д. Все это говорит о том, что решение задачи, хотя и является векторным, содержит в себе значительную нагрузку на пространственное представление и воображение учащихся.

На развитие пространственного представления благоприятно влияет решение задач различными способами, что позволяет глубже вникнуть в геометрию данной фигуры, обнаружить некоторые новые особенности взаимного расположения ее элементов, расширить имеющиеся пространственные представления. Особенно полезным является рассмотрение векторного и традиционно-синтетических способов решения одной и той же задачи.

Приведем с этой целью традиционно-синтетическое доказательство рассмотренной выше задачи.

На ребрах трехгранного угла (рис. 7) отложим равные отрезки SA, SB и SC. Пусть биссектриса SD пересекает отрезок AB в точке D_1, биссектриса SE пересекает отрезок BC в точке E_1. По свойству равнобедренного треугольника SD_1 и SE_1 являются медианами соответственно в треугольниках ASB и BSC, значит, отрезок D_1E_1 — средняя линия треугольника ABC и, следовательно, $D_1E_1 \| AC$. Так как SF — биссектриса внешнего угла равнобедренного треугольника ASC, то $SF \| AC$, а тогда $SF \| D_1E_1$.

Из того что $SF \| D_1E_1$, следует принадлежность биссектрис SD, SE и SF одной плоскости (плоскости, проходящей через параллельные прямые SF и D_1E_1).

Традиционно-синтетическое доказательство позволяет рассмотреть данную геометрическую фигуру (трехгранный угол) в связи с другой пространственной фигурой (тетраэдром). Доказательство опиралось на некоторые свойства этого тетраэдра, в иной интерпретации рассматривались биссектрисы углов, в рассуждениях привлекалась средняя линия основания тетраэдра и т. д. Все это дает материал для расширения и углубления первоначальных (возникших при первом способе решения) пространственных представлений учащихся.

Остановимся на некоторых приемах развития пространственных представлений учащихся в связи с применением понятия вектора на уровне координатного метода.

Рассмотрим, например, следующее задание.

Дано: Плоскость α задана уравнением $(x-2)+5(y-3)+2(z+4)=0$.

Требуется: Охарактеризовать положение плоскости α относительно системы координат.

Выполнение задания. Плоскость α проходит через точку $M(2;\ 3;\ -4)$ и перпендикулярна вектору $\bar{n}=(1;\ 5;\ 2)$. Изобразим точку M и вектор $\bar{n}$ в координатном пространстве (рис. 8). По этим данным не совсем точно, но все-таки можно «прикинуть», каким образом располагается плоскость α относительно системы координат. Более точное представление о расположении плоскости α можно получить, обратившись к специально приготовленной модели системы координат.

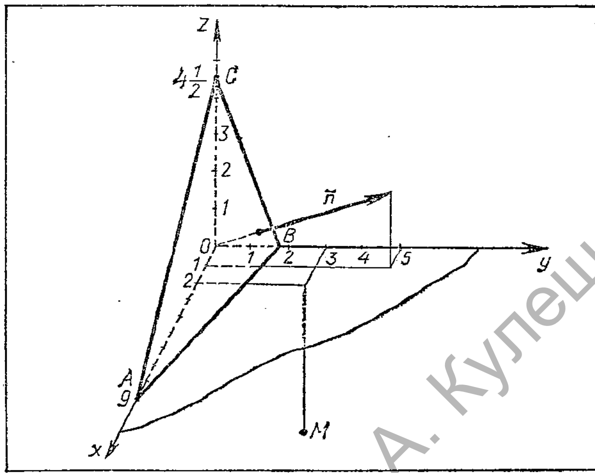


Рис. 8

Уточнить представления о расположении плоскости α можно и не прибегая к модели. Для этого необходимо построить линии пересечения плоскости α с координатными плоскостями (рис. 8). Плоскость α пересекает ось Ox в точке $A\ (9;\ 0;\ 0)$, ось Oy — в точке $B\left(0;\ 1\frac{4}{5};\ 0\right)$, ось Oz — в точке $C\left(0;\ 0;\ 4\frac{1}{2}\right)$. Выполненные построения позволяют получить достаточно полное представление о расположении плоскости α относительно системы координат.

Форма постановки данного задания способствовала тому, что в рамках координатного метода, по существу, решалась задача на построение. Увязывание координатно-векторного метода с задачей на построение является, на наш взгляд, удачным приемом, стимулирующим активное использование пространственных представлений учащихся в процессе выполнения задания.