Н. М. РОГАНОВСКИЙ (г. Орск)

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ВЫЯСНЕНИЯ НЕОБХОДИМОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Общеизвестно, что учащиеся шестых классов затрудняются в усвоении доказательств в курсе геометрии, нередко заучивают их механически, не осознают необходимости доказательств.

Эти затруднения в большей мере являются следствием сложившейся практики обучения, в которой не выдерживается постепенность в переходе от индуктивных методов обоснования предложений, используемых учащимися преимущественно в курсе арифметики, к дедуктивным, встречающимся им впервые при изучении геометрии.

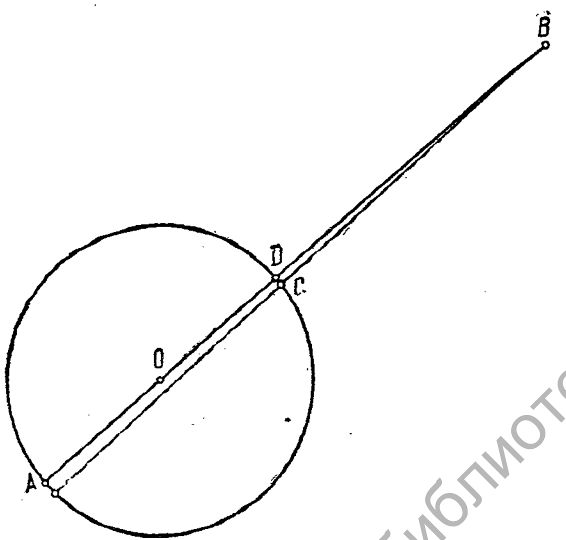
Положение осложняется еще и тем, что в школе, как правило, недостаточно внимания уделяется выяснению сущности доказательства, его преимуществ (общности, точности и объективности)[1] перед другими средствами обоснования, которыми учащиеся пользовались прежде. Учащиеся ше-

[1] Подробное изложение общности, точности и объективности доказательства содержится в книге Ф. Ф. Притуло «Методика изложения геометрических доказательств в средней школе», Учпедгиз, 1958.

стых классов при изучении геометрии вынуждены почти с первых уроков проводить доказательства, имея о них еще весьма смутное представление.

Мы приведем опыт организации такой работы с учащимися, когда они убеждаются в необходимости и ценности доказательств и тем самым создаются необходимые условия для должного отношения к доказательствам и сознательного усвоения их.

С помощью подобранных упражнений мы стремились убедить учащихся в необходимости использования доказательства с целью обоснования предложений; создать условия, побуждающие учащихся самих



Черт. 1

обращаться к доказательству как к средству обоснования.

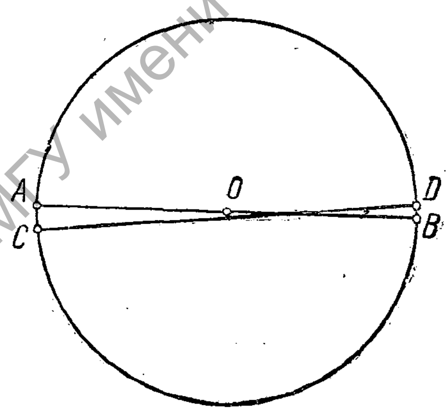
Первой серьезной беседе о доказательстве предпосылалось несколько задач, аналогичных следующей.

1. Из точки B, взятой вне круга, проведены прямая BA (черт. 1), проходящая через центр круга, и прямая BC, не проходящая через центр. Точки C и D — ближайшие к B точки встречи этих прямых с окружностью. Установить, что отрезок BC больше отрезка BD.

Задача предлагалась на готовом чертеже, причем точки C и D располагали достаточно близко друг к другу. Непосредственно из чертежа 1 при сравнении отрезков BC и BD «на глаз» нельзя прийти к требуемому в задаче выводу.

Учащиеся предлагают установить справедливость утверждения задачи путем измерения отрезков BD и BC линейкой или циркулем. Производя необходимые измерения, они приходят к выводу, что в этом случае измерения точного ответа не дают. Возникает необходимость, не прибегая к измерениям, установить истинное соотношение между отрезками BC и BD.

Предлагаем учащимся выяснить этот вопрос с помощью рассуждений и приводим доказательство, воспринимаемое ими как нечто необходимое. Обращаем внимание на то, что для решения задачи оказалось достаточным знание двух предложений: 1) отрезок прямой короче всякой другой линии, соединяющей его концы, следовательно, $OC + CB > OB$; 2) если от неравных величин отнимем поровну, то большая величина останется большей, следовательно, $BC > BD$.



Черт. 2

Учащимся разъясняется, что доказательство не связано с измерениями, при которых получаются приближенные результаты, и поэтому дало точный ответ.

Говорим и о другом важном свойстве доказательства — его общности. Рассуждения, которые велись при доказательстве для отрезка BC, справедливы для всех отрезков такого вида.

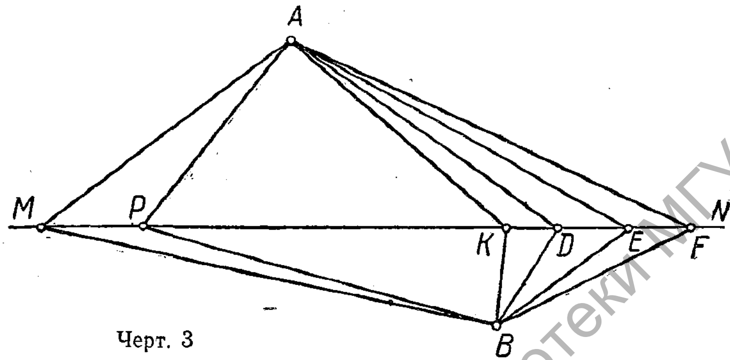
После изучения свойства хорды круга, не проходящей через центр, решались задачи на доказательство и построение, аналогичные задачам 2—4.

2. На диаметре AB (черт. 2) от точки A отложен отрезок AF, равный половине хорды CD, проведенной вблизи центра круга. Как расположена точка F относительно центра круга (совпадает, правее центра, левее)?

Учащиеся убеждались в недостаточности индуктивных средств для решения данной задачи, затем, при нашей помощи, проводили необходимые рассуждения. Доказательство велось методом исключения. Поочередно предполагая, что точка F совпадает с центром круга, расположена правее его, вступали в противоречие с тем, что CD меньше диаметра AB. Остается: точка F лежит левее центра круга.

В ряде задач построения «на глаз», подбором, к чему обычно склонны учащиеся шестых классов, явно не рациональны. Решая такие задачи, мы стараемся убеждать учащихся в целесообразности предпосылать тем или иным построениям некоторые рассуждения. Обоснования выполняемых построений вполне посильны шестиклассникам и служат хорошими упражнениями в проведении доказательств.

Остановимся подробнее на одной такой задаче.



Черт. 3

3. Даны прямая MN и точки A и B, лежащие по разные стороны этой прямой. На прямой MN найти такую точку C, чтобы сумма расстояний AC и CB была наименьшей[2].

Между учителем и учащимися может состояться беседа примерно следующего содержания.

Учитель. Пусть D — точка прямой MN (черт. 3). Точка D будет искомой точкой, если сумма отрезков AD и DB наименьшая. Возьмем несколько точек E, F и т. д. прямой MN правее точки D. Сравним сумму отрезков AE и BE с суммой отрезков AD и DB.

Ученик. Сумма отрезков AE и BE больше суммы отрезков AD и DB, так как видно, что AE больше, чем AD, и BE больше BD.

Учитель. Тогда может ли точка C лежать правее точки D?

Ученик. Нет, так как тогда будут получаться суммы, большие суммы отрезков AD и DB.

Учитель. Может быть, искомая точка C совпадает с наугад выбранной точкой D?

Ученик. Нет. Если взять точку K левее точки D, то сумма отрезков AK и KB будет меньше суммы отрезков AD и DB.

Другой ученик. Можно выбрать точку P левее точки D так, что сумма отрезков AP и PB будет больше суммы отрезков AD и DB. Для точек, расположенных левее точки P, это соотношение также будет справедливо. Значит, точка C не может быть левее точки P.

Учитель. Итак, искомая точка C должна лежать между точками P и D. Где именно?

(Сужая отрезок PD, учащиеся подбором определяют положение точки C.)

Учитель. Оставим задачу прежней. Изменим лишь положение точек A и B. Нельзя ли, не проделывая работу по подбору точки C снова, указать более рациональный, более точный способ нахождения ее?

Нам надо найти точку C на прямой MN такую, чтобы линия ACB была кратчайшей. Вспомните, отрезок какой линии самый короткий из всех линий, соединяющих точки A и B.

Ученик. Отрезок прямой AB.

Учитель. Какое построение нужно выполнить, чтобы получить искомую точку C? Свою догадку постарайтесь обосновать.

Ученик. Надо соединить точки A и B отрезком. Точка пересечения отрезка AB и прямой MN есть искомая точка C. Сумма отрезков AC и CB — наименьшая. Задача решена.

Учитель. Мы рассмотрели два способа нахождения точки C. Первый заключается в том, что точка C находилась подбором. Второй был основан на использовании свойства отрезка быть короче всякой линии, соединяющей его концы. Какой из этих способов кажется вам более рациональным?

Ученик. Второй способ лучше, так как он указывает построение, с помощью которого точка C находится сразу, независимо от расположения точек A и B.

Учитель. Правильно. Но второй способ обладает еще одним преимуществом: положение точки C с его помощью определяется точно.

---

[2] Н. Н. Никитин, Г. Г. Маслова, Сборник задач по геометрии, Учпедгиз, 1965, задача 38.

4. Отрезок AB пересекает окружность в двух точках. Найти на окружности точку C такую, чтобы отрезок, равный сумме отрезков AC и CB, был наименьшим. Сколько таких точек существует?

Задача имеет два решения: искомыми точками являются точки пересечения окружности и отрезка AB. От учащихся требуется «заметить» эти точки и доказать, что только они удовлетворяют условию задачи.

Приводя примеры, иллюстрирующие достоинства доказательства и недостаточность индуктивных средств в целях обоснования, необходимо следить за тем, чтобы у учащихся не сложилось недоверие к индуктивным средствам. Необходимо разъяснить им: почему измерения на данных чертежах не позволяли получить точного ответа, показать, что, варьируя чертеж, можно привести его к такому, на котором даже глазомер подсказывает верный вывод.