О методе подготовительных задач

Н. М. Рогановский
(г. Могилев)

Потребность в подготовительных задачах при изучении доказательств особенно ощутима в тех случаях, когда в доказательстве используются новые, непривычные для учащихся рассуждения, которыми «с ходу» овладеть довольно трудно. Подготовительные задачи позволяют сформировать у учащихся некоторый опыт в проведении таких рассуждений и тем самым облегчить усвоение доказательства.

Сказанное относится, например, к доказательству теоремы о площади криволинейной трапеции. Эта теорема является центральной в теме «Интеграл». С ее помощью выясняется геометрический смысл понятия первообразной, а позднее обосновывается формула Ньютона — Лейбница. Приведем эту теорему в той редакции, в которой она формулируется в действующем учебном пособии.

Т е о р е м а. Пусть f — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;\ b]$ функция, S — площадь соответствующей криволинейной трапеции (рис. 1). Если F есть первообразная для f на отрезке $[a;\ b]$, то $S=F(b)-F(a)$.

Выясним, какие подготовительные задачи целесообразно рассмотреть при изучении данной теоремы.

1. Необходимо прежде всего учесть, что в доказательстве известные учащимся понятия (приращение аргумента, приращение функции) используются в специфических условиях: функция $S(x)$ задается не формулой, таблицей, графиком, а указанием геометрической фигуры — криволинейной трапеции; аналогичным образом представляются ее значения $S(x)$, $S(x+\Delta x)$ и приращение $\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$. Такая интерпретация значений функции и ее приращения является новой для учащихся. Поэтому доказательство полезно предварить следующим заданием: «На рис. 2 площадь криволинейной трапеции S есть функция от x. Укажите на этом рисунке фигуры, площади которых равны $S(x)$, $S(x+\Delta x)$, $\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$».

2. Определение производной тоже применяется в новой ситуации — к функции $S(x)$. Учащихся можно подготовить к этому, поставив такое задание: «Запишите определение производной применительно к функции $S(x)$».

3. В теореме на наглядном уровне используется понятие непрерывности функции. С этим понятием необходимо предварительно поработать: «Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная в точке x_0. Отметьте на оси абсцисс точки x_0, $x_0+\Delta x$ и точку c, лежащую между ними (рис. 3). Пусть Δx стремится к 0. К чему стремится $f(c)$?»

4. В теме «Интеграл» важную роль играет утверждение о том, что площадь криволинейной трапеции с основанием Δx можно заменить равной площадью прямоугольника с тем же основанием Δx и высотой $f(c)$, где c — некоторая точка отрезка $[x;\ x+\Delta x]$. Существование такой точки c как раз и утверждает данный факт.

Учащихся полезно отдельно ознакомить с данным фактом, проиллюстрировав его на рис. 4 и предложив следующее задание: «Дана криволинейная трапеция с основанием Δx (приводится новый рисунок). Постройте прямоугольник, у которого основание Δx, а площадь равна площади криволинейной трапеции».

5. При доказательстве теоремы о площади криволинейной трапеции определение первообразной применяется в новых обозначениях. Перед рассмотрением доказательства учащимся полезно поупражняться в оперировании с новыми обозначениями: «Пусть $S(x)$ — первообразная $f(x)$. Поясните, что это означает. Пусть $S(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$. Запишите формулу для общего вида первообразных функции $f(x)$».

После разбора указанных подготовительных заданий можно перейти к изложению доказа-

Рис. 1

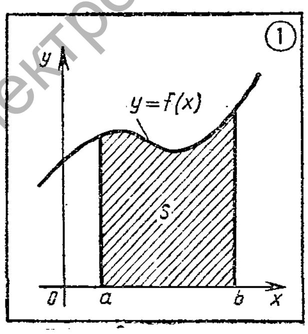


Рис. 2

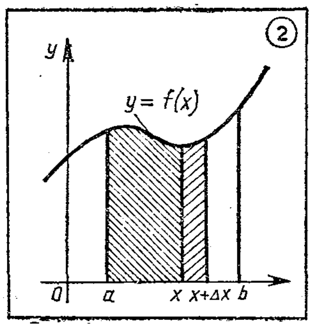


Рис. 3

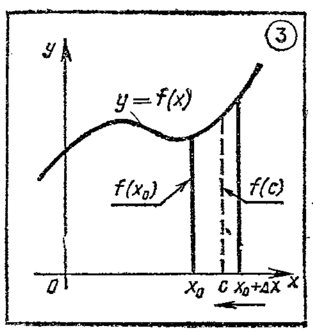
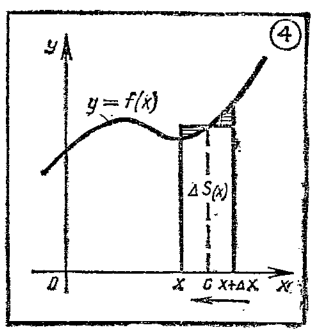


Рис. 4



тельства теоремы, которое целесообразно разбить на три части.

а) *Введение функции $S(x)$.* Рассмотрим функцию $S(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$, которая выражает зависимость площади криволинейной трапеции от аргумента x (рис. 5). Дадим аргументу x приращение Δx такое, что $a \leqslant x+\Delta x \leqslant b$. Тогда (задание 1) приращение функции $S(x)$ в точке x равно $\Delta S(x)=S(x+\Delta x)-S(x)$ (Δx полагаем положительным).

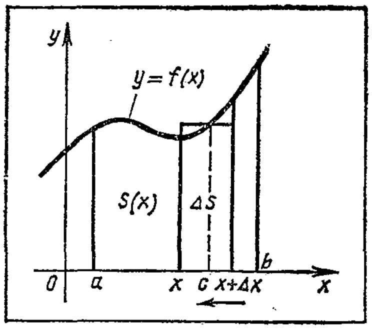


Рис. 5

б) *Доказательство того, что $S'(x)=f(x)$ для всех $x \in [a; b]$.* Согласно определению производной (задание 2) имеем

$$S'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x}.$$

Площадь $\Delta S(x)$ криволинейной трапеции с основанием Δx можно заменить равной площадью прямоугольника с основанием Δx и высотой $f(c)$, где $c \in [x; x+\Delta x]$: $\Delta S(x)=f(c)\Delta x$ (задание 4).

Тогда

$$S'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Поскольку c лежит между x и $x+\Delta x$, то при $\Delta x \to 0$ точка c стремится к x, а $f(c) \to f(x)$. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c)=f(x)$ (задание 3). Итак, $S'(x)=f(x)$.

в) *Доказательство равенства $S=F(b)-F(a)$.* Мы доказали, что $S(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[a; b]$. Но по условию $F(x)$ — также первообразная для $f(x)$ на этом же отрезке. Следовательно, функции $S(x)$ и $F(x)$ отличаются друг от друга на некоторую константу C: $S(x)=F(x)+C$ (задание 5). При $x=a$ это равенство примет вид $0=F(a)+C$. Отсюда $C=-F(a)$. При $x=b$ равенство $S(x)=F(x)+C$ примет вид $S(b)=F(b)+C$. Поэтому $S=S(b)=F(b)-F(a)$, что и требовалось доказать.

Отметим, что использование метода подготовительных задач привносит в изложение доказательства некоторое своеобразие. Оно состоит главным образом в разбиении доказательства на отдельные части, что помогает лучше воспринять общий замысел рассуждений и облегчает соотнесение каждой части доказательства с выполненными ранее подготовительными заданиями.